Sbírka řešených příkladů z komplexní analýzy

Podle cvičení k předmětu M6170 (jaro 2022) vysázela Jana Káňová,
za což jí patří obrovský dík

30. ledna 2023

Kapitola 1

Komplexní čísla

Příklad 1.1

> $(1+i)(1+2i)$

Řešení: $(1+i)(1+2i) = 1+i+2i+2i^2 = -1+3i$

Příklad 1.2

> $i+i^3+i^{15}+i^{29}$

Řešení: $i+i^3+i^{15}+i^{29} = i+i^3+i^3+i = i-i-i+i = 0$

Příklad 1.3

> $\frac{1+2i}{3-4i}$

Řešení: $\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{1+2i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i} = \frac{-5+10i}{9+16} = -\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

Příklad 1.4

Dokažte

$$\begin{array}{c} \mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}\, z \\ \downarrow \\ (z = x + iy \implies iz = ix - y) \end{array}$$

Řešení:

Příklad 1.5

Dokažte

$$\frac{1}{\frac{1}{z}} = z \quad \text{pro } \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Řešení:

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{z}} = \frac{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2} + i\frac{-\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)}{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{x}{x^2 + y^2}}{\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}} + i\frac{\frac{y}{x^2 + y^2}}{\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}} =$$

$$= x + iz = z$$

Příklad 1.6

Ukažte, že

$$\sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

Řešení:

$$\sqrt{2}|z| = \sqrt{2x^2 + 2y^2}\,; \qquad \text{Platí } (|x| - |y|)^2 \geq 0 \quad \& \quad \begin{array}{l} |\operatorname{Re} z| = |x| \\ |\operatorname{Im} z| = |y| \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Neboli}\ \ x^2 + y^2 &\geq 2|x| \cdot |y| \qquad \text{(AG nerovnost)} \\ 2x^2 + 2y^2 &\geq x^2 + 2|x| \cdot |y| + y^2 = (|x| + |y|)^2 \\ \sqrt{2x^2 + 2y^2} &\geq |x| + |y| = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \end{aligned}$$

Příklad 1.7

Dokažme

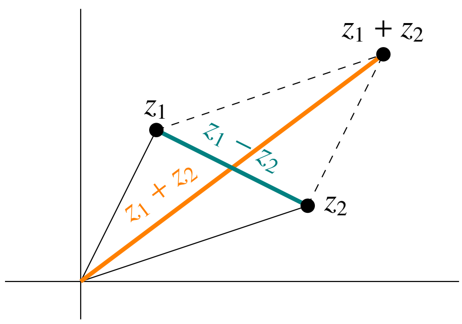
$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

a geometricky interpretujme.

Řešení:

$$\begin{aligned} & z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2 \\ \Longrightarrow\ & |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \qquad = \\ & = x_1^2 + \cancel{2x_1x_2} + x_2^2 + y_1^2 + \cancel{2y_1y_2} + y_2^2 + x_1^2 - \cancel{2x_1x_2} + x_2^2 + y_1^2 - \cancel{2y_1y_2} + y_2^2 \qquad = \\ & = 2(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) \\ & = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ V rovnoběžníku platí: součet čtverců obou úhlopříček je roven dvojnásobku součtu čtverců délek jednotlivých stran



Příklad 1.8

> Dokažte
>
> $$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{trojuhelníková nerovnost}}}{\leq} |z_1| + |z_2|$$
>
> Dodatek: Ukažte, že
>
> $$|\lambda_1 a_1 + \ldots \lambda_n a_n| < 1 \quad \text{pro } |a_i| < 1,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$$
> $$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$$

Řešení:

- i) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$

  $$|z_2| = |z_1 + (z_2 - z_1)| \overset{\substack{\text{trojúhelníková nerovnost} \\ \downarrow}}{\leq} |z_1| + |z_2 - z_1| \implies |z_1| - |z_2| \geq -|z_2 - z_1| = -|z_1 - z_2|$$

  Současně platí

  $$|z_1| = |(z_1 + z_2) + z_2| \overset{\substack{\text{trojúhelníková nerovnost} \\ \downarrow}}{\leq} |z_1 - z_2| + |z_2| \implies |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

  Zkombinováním těchto dvou nerovností dostáváme

  $$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|,\ \text{což jsou nerovnosti v } \mathbb{R}$$
  $$\Updownarrow \text{definice absolutní hodnoty v } \mathbb{R}$$
  $$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

  Jelikož $z_2 \in \mathbb{C}$ je libovolné a $|-z_2| = |z_2|$, dostáváme pro $z_2 \to -z_2$ požadovanou rovnost??

  $$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$$

- ii) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

  $\triangle$-nerovnost [Veselý, DA, str.296]

  Nechť $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Potom jistě platí

$$
\begin{aligned}
(x_1y_2 - x_2y_1)^2 &\geq 0 \\
&\Updownarrow \\
2x_1x_2y_1y_2 &\leq (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 \\
&\Updownarrow \\
\underbrace{2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2}_{(x_1x_2+y_1y_2)^2} &\leq (x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2) \\
&\Updownarrow \text{odmocníme – vše je kladné} \\
|x_1x_2 + y_1y_2| &\leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2)} \qquad (1.1) \\
&\uparrow
\end{aligned}
$$

(Samozřejmě idea této rovnosti je založena na opačném postupu)

$\triangle$-nerovnost vlastně znamená

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\,.$$

Jelikož vše je kladné, je toto ekvivalentní s

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leq x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} + x_2^2 + y_2^2$$

neboli

$$
\begin{aligned}
2x_1x_2 + 2y_1y_2 &\leq 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\
x_1x_2 + y_1y_2 &\leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)},
\end{aligned}
$$

Která ale jistě platí díky předchozí nerovnosti (1.1).

Příklad 1.9

Určete optimální (největší & nejmenší možné) konstanty A, B tak, že

$$A(1 + |y|) \leq |1 + iy| \leq B(1 + |y|)$$

Řešení:

- Dle $\triangle$-nerovnosti máme $|1 + iy| \leq 1 + |y| \implies B = 1$ optimální? Ano, pro $y = 1$! Vzhledem k symetrii stačí v první nerovnosti uvážit $y \geq 0$. Pak

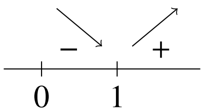
$$f(y) := \frac{|1+iy|}{1+y} = \frac{\sqrt{1+y^2}}{1+y}$$

má globální minimum pro $y = 1$ s hodnotou $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Longrightarrow\; A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ je optimální, neboť např. pro $y = 1$ dostaneme rovnost

$$f'(y) = \frac{\frac{1}{2}(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y\cdot(1+iy)(1+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 1}{(1+y)^2} = \frac{y+y^2-1-y^2}{(1+y)^2\cdot(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \iff$$

$$\iff y-1=0 \implies \underset{\substack{\uparrow\\ \text{stacionární bod}}}{y=1}$$



$\Longrightarrow$ globální minimum

Příklad 1.10

> Dokažte Cauchyho-Schwarzovu nerovnost. (iii)
> Dodatek: S pomocí Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti ukažte, že
>
> i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{|a_j|^2}{j} \geq \frac{2}{n(n+1)}$ pro $|\sum a_j| = 1$
>
> ii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|a_j|} \geq r^2$ pro $|\sum a_j| = 1,\; a_j \neq 0$

Řešení:

- iii) $|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\cdot\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2$

  Pro libovolné $\alpha\in\mathbb{C}$ platí

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n}|z_j-\alpha w_j|^2 = \sum_{j=1}^{n}(z_j-\alpha w_j)(\bar z_j-\bar\alpha_j\bar w_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(z_j\bar z_j+|\alpha|^2 w_j\bar w_j-\bar\alpha z_j\bar w_j-\alpha w_j\bar z_j) =$$

$$= (1, \overline{\alpha}) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n |z_j|^2 & -\sum_{j=1}^n \overline{z}_j w_j \\ -\sum_{j=1}^n \overline{w}_j z_j & \sum_{j=1}^n |w_j|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = v^* A v \, .$$

Odtud plyne, že pro libovolné $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{C}^2$ s $v_1 \neq 0$ je

$$v^* A v \geq 0 \tag{1.2}$$

neboť $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{v_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v_2}{v_1} \end{pmatrix}$, tj. předchozí případ s $\alpha = \frac{v_2}{v_1}$, přičemž násobíme zleva $\frac{1}{v_1}$ a zprava $\frac{1}{v_1}$, tj. $\frac{1}{|v_1|^2}$). Je-li $v_1 = 0$, pak také platí (1.2), neboť v takovém případě máme

$$v^* A v = |v_2|^2 \cdot \sum_{j=1}^n |w_j|^2 \geq 0$$

To znamená, že matice A je pozitivně semidefinitní. Tato skutečnost je ekvivalentní s nezáporností prvků na diagonále (triviálně pravdivé) a determinantu celé matice, tj.

$$0 \leq \det\{A\} = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \sum_{j=1}^n |w_j|^2 - \sum \overline{z}_j w_j \cdot \sum \overline{w}_j z_j$$

neboli

$$\underbrace{\sum_{j=1}^n \overline{z}_j w_j \cdot \overline{\sum_{j=1}^n \overline{z}_j w_j}}_{|\sum \overline{z}_j w_j|^2} \leq \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^n |w_j|^2 \, ,$$

což pro $\widetilde{z_j} := \overline{z}_j$ dává požadovanou nerovnost

$$|\sum_{j=1}^n \widetilde{z}_j w_j|^2 \leq \sum_{j=1}^n |\widetilde{z}_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^n |w_j|^2$$

a důkaz je hotov.

Příklad 1.11

> Vyřešme
>
> $$|z| + z = 3 + i$$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
|z| + z &= 3 + i \\
&\Downarrow \\
\sqrt{x^2 + y^2} + x + iy &= 3 + i \\
&\Downarrow y = 1 \\
\sqrt{x^2 + 1} + x &= 3 \\
\cancel{x^2} + 1 &= 9 - 6x + \cancel{x^2} \\
6x &= 8 \\
x &= \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\
&\Downarrow \\
z &= \frac{4}{3} + i
\end{aligned}
$$

Příklad 1.12

> Najděte řešení kvadratických rovnic v základním tvaru, dále určeme algebraický tvar čísla z takového, že
>
> (a) $z^2 = -3 - 4i$
>
> (b) $z^2 - 3z + 3 - i = 0$

Řešení:

nejdříve uvažme

$$z^2 = a,\ a = a_1 + a_2 i,\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

$\sqrt{a}$ v algebraickém tvaru $\implies z = x + iy$

$$\Downarrow$$

$$(x + iy)^2 = a_1 + a_2 i \implies x^2 - y^2 = a_1 \ \&\ 2xy = a_2$$

$$\downarrow$$

$$\Downarrow \qquad y = \frac{a_2}{2x}$$

potom máme rovnici (reálnou)

$$4x^4 - 4a_1x^2 - a_2^2 = 0$$

substituce $u = x^2$ dává

$$4u^2 - 4a_1u - a_2^2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$u_{1,2} = \frac{1}{2}(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2})$$

ovšem x musí být reálné $\implies$ proto pouze u_1, tudíž

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{u_1} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2})}$$

Potom

$$y_{1,2} = \frac{a_2}{2x_{1,2}} \implies z_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2})} + \frac{a_2 i}{\sqrt{2(a_1 + \sqrt{a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2})}}}$$

$$z_2 = -z_1$$

Pro rovnice

$$x^2 + px + q = 0\,,\ p,\ q \in \mathbb{C}$$

platí stejný vzorec jako v $\mathbb{R}$, neboť

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 - \frac{1}{4}p^2 + q = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

(a) určeme algebraický tvar čísla z takového, že

$$z^2 = -3 - 4i$$

Pro $z = x + iy$ dostáváme

$$x^2 - y^2 = -3,\ 2xy = -4$$

$$y = -\frac{2}{x} \implies x^2 - \frac{4}{x^2} = -3 \implies \qquad x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$u^2 + 3u - 4 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ \cancel{\frac{-8}{2} = -4} \end{cases} \implies \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$y_{1,2} = -\frac{2}{\pm 1} = \mp 2$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 = 1 - 2i$$

$$z_2 = -1 + 2i$$

(b) $z^2 - 3z + 3 - i = 0$

Dle vzorce platí

$$z_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{-3+4i}\right)$$

$$\sqrt{-3+4i} = ?\ \text{ tj. } w^2 = -3 + 4i$$

$$w = x + iy$$

$$x^2 - y^2 = -3\,,\ 2xy = 4$$

$$\downarrow$$

$$y = \tfrac{2}{x}$$

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = -3$$

$$x^4 - 4 + 3x^2 = 0$$

$$u^2 + 3u - 4 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ \cancel{-4} \end{cases} \quad x_{1,2} \quad = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$y_{1,2} = \pm 2$$

$$w_1 + 2i\,,\ w_2 = -1 - 2i$$

$$\Downarrow$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}(3 \pm (1 + 2i)) = \begin{cases} \frac{1}{2}(4 + 2i) = 2 + i \\ \frac{1}{2}(2 - 2i) = 1 - i \end{cases}$$

(c) někdy to může vyjít i snadněji

$$\begin{aligned}
z^2 - (2+i)z + 3 + i &= 0 \\
D &= (2+i)^2 - 4(3+i) = 4 + \cancel{4i} - 1 - 12 \cancel{-4i} = -9 \\
\sqrt{D} &= \pm 3i \\
&\Downarrow \\
z_{1,2} &= \frac{1}{2}((2+i) \pm 3i) \implies \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(2+4i) = 1+2i \\ z_2 = \frac{1}{2}(2-2i) = 1-i \end{cases}
\end{aligned}$$

(d) sami $z^2 - 2z + 2 = 0$ [$z_{1,2} = 1 \pm i$]

Příklad 1.13

$$z = e^{i\frac{2}{5}\pi}$$

určete z^2, z^3, z^4, $\bar{z}$
a načrtněte body $1,\ 1+z,\ 1+z+z^2,\ 1+z+z^2+z^3,\ 1+z+z^2+z^3+z^4$

Řešení:

Příklad 1.14

Určete

$$\begin{aligned}
z &= 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \\
&\implies \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ \&\ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\implies z = 1 + i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Řešení:

Příklad 1.15

Určete velikost a argument

$$\text{a) } z = i \implies |z| = 1,\ \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{b) } z = -1 + i \implies |z| = \sqrt{2},\ \cos\phi = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\implies \phi_0 = \frac{3}{4}\pi,\ \operatorname{Arg} z = \{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Řešení:

Příklad 1.16

vyjádřete v goniometrickém tvaru

(a) $\pm 2 \pm 5i$

(b) $z = bi$

(c) $z = a$

Řešení:

(a) $\pm 2 \pm 5i$
$|2 - 5i| = |2 + 5i| = |-2 + 5i| = |-2 - 5i| = \sqrt{29}$
uvažme $\arg 2 \in [0, 2\pi]$, $\tan\varphi = \frac{5}{2}$, $\arctan\frac{5}{2} = \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

- $2 - 5i$, pak $\varphi = 2\pi - \arctan\frac{5}{2}$, $2 - 5i = \sqrt{29}e^{i(2\pi - \arctan\frac{5}{2})}$
- $2 + 5i$, pak $\varphi = \arctan\frac{5}{2}$, $2 + 5i = \sqrt{29}e^{i(\arctan\frac{5}{2})}$
- $-2 + 5i$, pak $\varphi = \pi - \arctan\frac{5}{2}$, $-2 + 5i = \sqrt{29}e^{i(\pi - \arctan\frac{5}{2})}$
- $-2 - 5i$, pak $\varphi = \pi + \arctan\frac{5}{2}$, $-2 + 5i = \sqrt{29}e^{i(\pi + \arctan\frac{5}{2})}$

(b) $z = bi$, $b \neq 0$

$|z| = |b|$

$$\arg z = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pro } b \geq 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{pro } b < 0 \end{cases} \implies z = \begin{cases} b(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = be^{i\frac{\pi}{2}} & \text{pro } b \geq 0 \\ -b(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -be^{i\frac{\pi}{2}} & \text{pro } b < 0 \end{cases}$$

(c) $z = a, a \neq 0$

$$|z| = |a|$$

$$\arg z = \begin{cases} 0 & \text{pro } a \geq 0 \\ \pi & \text{pro } a < 0 \end{cases} \implies z = \begin{cases} a(\cos 0 + i\sin 0) = a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a(\cos\pi + i\sin\pi) = -ae^{i\pi} & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$

Příklad 1.17

Přechodem na goniometrický tvar vypočtěme

(a) $(1+i)^{10}$

(b) $(-2+2i)^6$

(c) $(\sqrt{3}-i)^8$

(d) $(1+\frac{\sqrt{3}}{3}i)^5$

(e) $(\sqrt{3}+i)^{10}$

Řešení:

(a) $$(1+i)^{10} \underset{\substack{\uparrow \\ \arctan 1 = \frac{\pi}{4}}}{=} \left[\sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4})\right]^{10} = 2^5(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}) = 32i$$

(b) $$(-2+2i)^6 = \left[\sqrt{8}(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4})\right]^6 = 8^3(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}) = 512i$$

(c) $$(\sqrt{3}-i)^8 \underset{\substack{\uparrow \\ \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}\,,\ 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}}}{=} \left[2(\cos\tfrac{11\pi}{6} + i\sin\tfrac{11\pi}{6})\right]^8 = 2^8(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}) = -128 + 128\sqrt{3}i$$

(d) $$(1+\tfrac{\sqrt{3}i}{3})^5 \underset{\substack{\uparrow \\ \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}}}{=} \left[\tfrac{2}{\sqrt{3}}(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6})\right]^5 = -\tfrac{16}{9} + \tfrac{16}{9\sqrt{3}}i$$

(e) $$(\sqrt{3}+i)^{10} \underset{\substack{\uparrow \\ |z| = \sqrt{3+1} = 2\,,\ \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,,\ \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \sin\varphi = \frac{1}{2} \implies \varphi = \frac{\pi}{6}}}{=} \left(2(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6})\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos\tfrac{10\pi}{6} + i\sin\tfrac{10\pi}{6}\right) = 2^{10}\left(\cos\tfrac{5\pi}{3} + i\sin\tfrac{5\pi}{3}\right) =$$
$$2^{10}\left(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^9(1 - i\sqrt{3})$$

Příklad 1.18

$$\sqrt[3]{i}$$

Řešení:

Příklad 1.19

$$\sqrt[4]{-1+i}$$

Řešení:

Příklad 1.20

$\sqrt[3]{-2+2i}$ až zpět do základního tvaru

Řešení:

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)} = \begin{cases} \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) = \clubsuit \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) = \spadesuit \end{cases}$$

$$\clubsuit \underset{\uparrow}{=} \sqrt{2}\left(-\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) = \left(-\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$\cos(\alpha \pm \pi) = \cos\alpha\cos\pi \mp \sin\alpha\sin\pi = -\cos\alpha\,,\ \sin(\alpha \pm \pi) = \sin\alpha\cos\pi \pm \cos\alpha\sin\pi = -\sin\alpha$$

$$\underset{\uparrow}{=} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} + \frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = ?\,,\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow |\cos\frac{\alpha}{2}| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \Longrightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$|\sin\frac{\alpha}{2}| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,,\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\spadesuit = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \cos\left(\alpha\pm\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{2}\mp\sin\alpha\sin\frac{\pi}{2}=\mp\sin\alpha\,,\ \sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{2}\pm\cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\pm\cos\alpha}}{=} \sqrt{2}\left[-\sin\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)+i\cos\frac{\pi}{12}+\pi\right] = \sqrt{2}\left[\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right] =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$$

Příklad 1.21

> Najděte všechna řešení
>
> $$z^6 = -8 \quad \text{tj. } \sqrt[6]{-8}$$

Řešení:

$$|-8| = 8\,,\ \operatorname{Arg}(-8) = \pi \implies -8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$$

tedy

$$\sqrt[6]{-8} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right) \text{ pro } k = 0,\ldots,5$$

$$= \begin{cases} \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}i \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = -\sqrt{2}i \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Příklad 1.22

> Načrtněte
>
> $$\operatorname{Im} z = -i$$

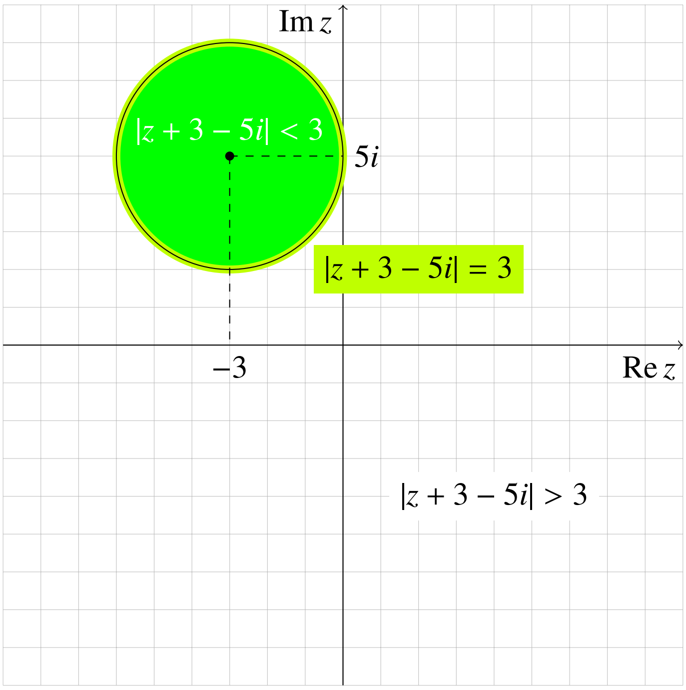
*Řešení:*neexistuje

Příklad 1.23

Načrtněte

$$|z + 3 - 5i| = 3\ , \quad |z + 3 - 5i| < 3\ , \quad |z + 3 - 5i| > 3$$

Řešení:

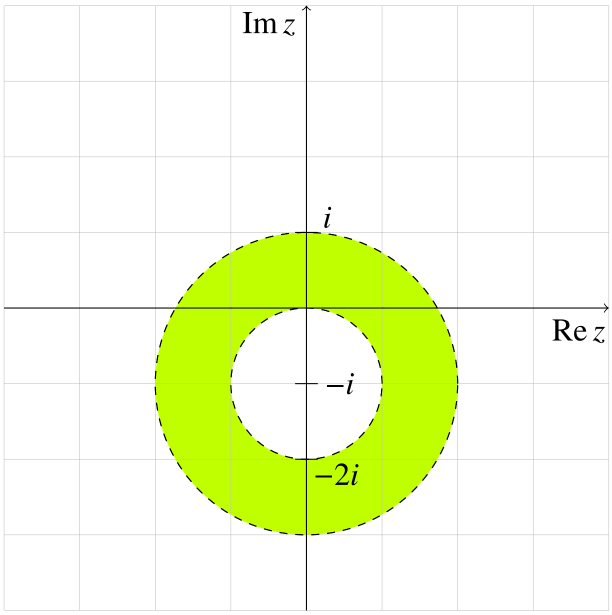


Příklad 1.24

Načrtněte

$$1 < |z + i| < 2$$

Řešení:

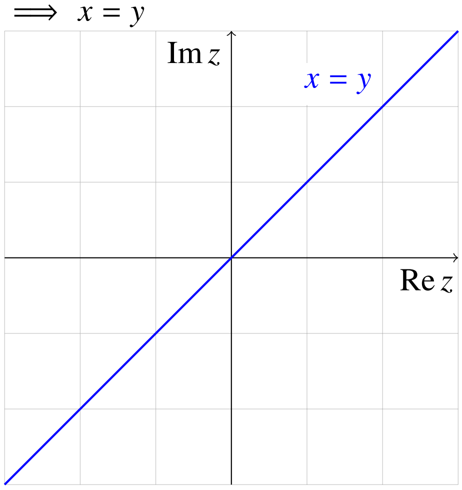


Příklad 1.25

> Načrtněte
> $$\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$$

Řešení:

$\implies x = y$

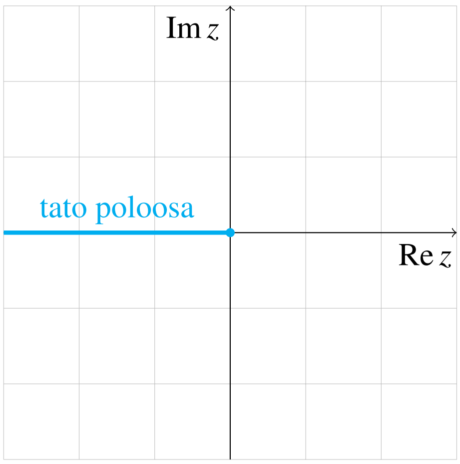


Příklad 1.26

> Načrtněte
> $$|z| + z = 0$$

Řešení:

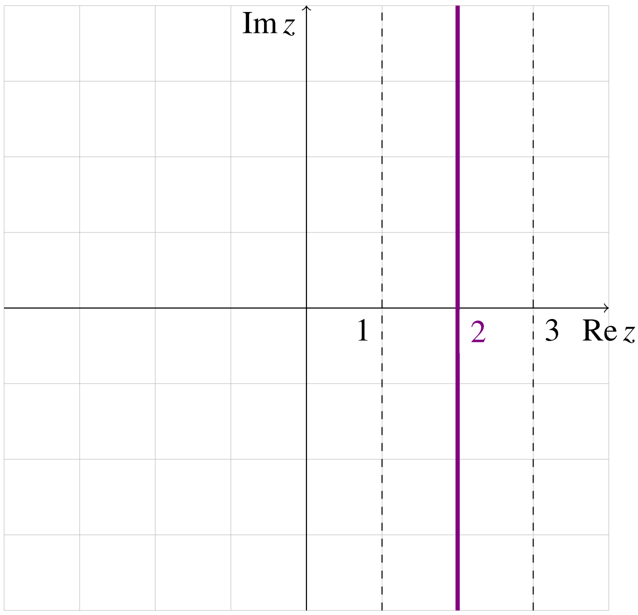
$$\sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 0$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = -x - iy$$
$$\downarrow$$
$$y=0$$
$$\Downarrow$$
$$|x| = -x$$
$$\Downarrow$$
$$x < 0$$



Příklad 1.27

> Načrtněte
> $$|z - 1| = |z - 3|$$

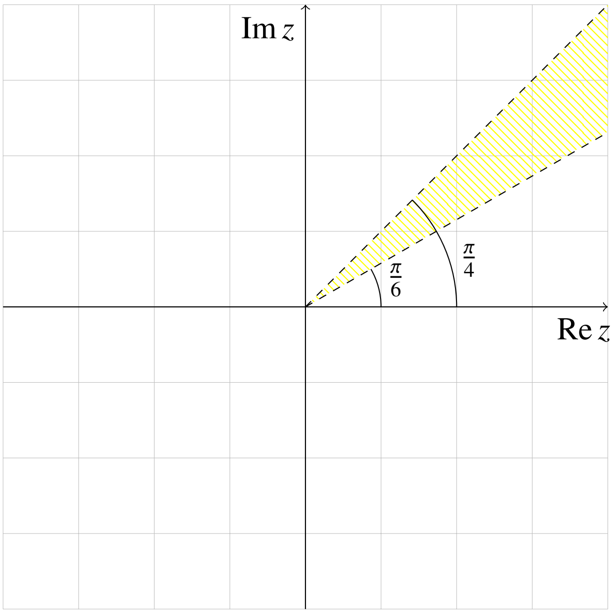
Řešení:



Příklad 1.28

Načrtněte
$$\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}$$

Řešení:

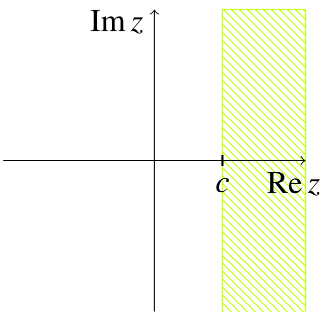


$\frac{\pi}{6} < \arg z - z_0 < \frac{\pi}{4} \to$ pouze posunutí

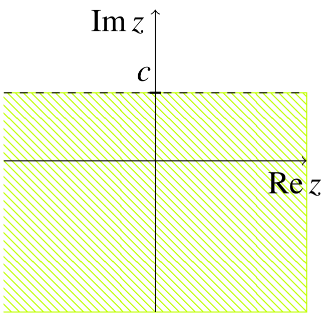
Příklad 1.29

> Načrtněte
>
> (a) $\operatorname{Re} z \geq c$
>
> (b) $\operatorname{Im} z < c$

Řešení:



(a) $\operatorname{Re} z \geq c$



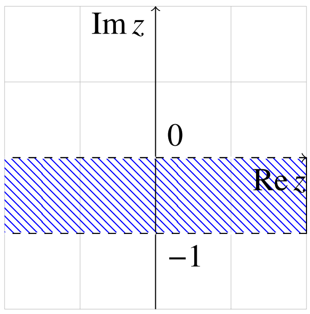
(b) $\operatorname{Im} z < c$

Příklad 1.30

> Načrtněte
> $$0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$$

Řešení:

$$\begin{aligned} z = x + iy \implies 0 < -y &< 1 \\ -1 < \quad y &< 0 \end{aligned}$$



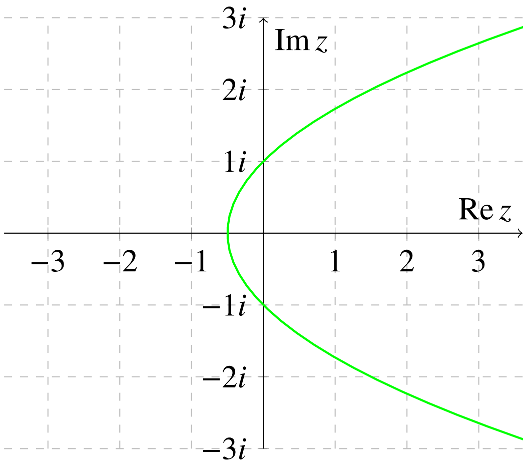
Příklad 1.31

> Načrtněte
> $$|z| = \operatorname{Re} z + 1$$

Řešení:

$$\sqrt{x^2+y^2} = x + 1 \implies \cancel{x^2} + x^2 = \cancel{x^2} + 2x + 1 \implies y^2 = 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

... parabola s osou x; vrchol v $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$; ohnisko $\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, 0\right] = [0, 0]$

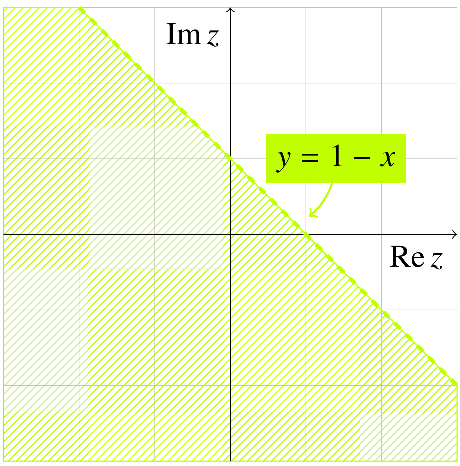


Příklad 1.32

> Načrtněte
> $$\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$$

Řešení:

$$x + y < 1$$



Příklad 1.33

> Načrtněte
> $$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = c$$

Řešení:

$\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$$\frac{x}{x^2+y^2} = c \implies c(x^2+y^2) = x$$
$$x^2 + y^2 - \frac{1}{c}x = 0$$
$$(x - \frac{1}{2c})^2 + y^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kružnice se středem } \left[\frac{1}{2},0\right],\ r = \frac{1}{2c}}}{=} \frac{1}{4c^2}$$

$c = 0 \implies x = 0 \leftarrow$ osa y bez počátku

Příklad 1.34

> Načrtněte
> $$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = c$$

Řešení:

$$-\frac{y}{x^2+y^2} = c \implies x^2 + y^2 + \frac{1}{c}y = 0 \implies x^2 + (y + \frac{1}{2c})^2 = \frac{1}{4c^2}$$

$c = 0 \implies$ osa x

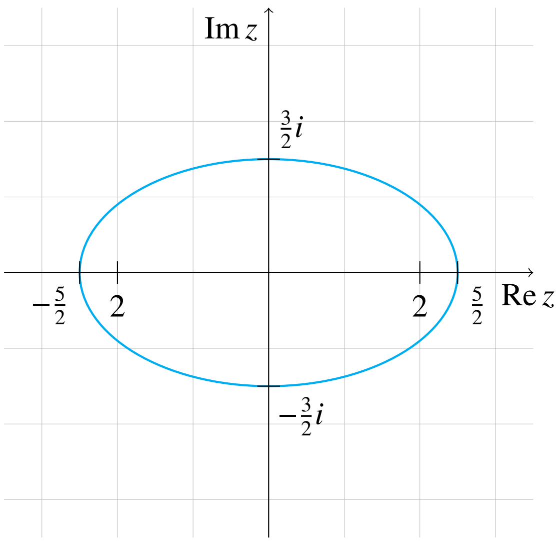
Příklad 1.35

> Načrtněte
> $$|z-2| + |z+2| = 5$$

Řešení:

(součet vzdáleností od ± 2 je roven 5)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2} &= 5 \\
\underbrace{(x-2)^2}_{\cancel{x^2}-4x+\cancel{4}}+y^2 &= 25-10\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\underbrace{(x+2)^2}_{\cancel{x^2}+4x+\cancel{4}}+y^2 \\
-8x-25 &= -10\sqrt{(x+2)^2+y^2} \\
64x^2+\cancel{400x}+625 &= 100\left[x^2+\cancel{4x}+4+y^2\right] \\
36x^2+100y^2 &= 225 \\
\frac{x^2}{\frac{225}{36}}+\frac{y^2}{\frac{225}{100}} &= 1 \\
\frac{x^2}{\left(\frac{15}{6}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{15}{10}\right)^2} &= 1 \\
\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} &= 1
\end{aligned}
$$



ohniska: $[\pm 2, 0]$; poloosy: $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{2}$; excentricita: 2

Příklad 1.36

> Načrtněte
> $$|z-2|-|z+2|>3$$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
|z-2|-|z+2| &= 3\\
&\Downarrow\\
\sqrt{(x-2)^2+y^2} &= 3+\sqrt{(x+2)^2+y^2}\\
\cancel{x^2}-4x+\cancel{4}+\cancel{y^2} &= 9+6\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\cancel{x^2}+4x+\cancel{4}+\cancel{y^2}\\
-9-8x &= 6\sqrt{(x+2)^2+y^2}\\
81+\cancel{144x}+64x^2 &= 36[x^2+\cancel{4x}+4+y^2]\\
28x^2-36y^2 &= 63\\
\frac{x^2}{\frac{63}{28}}-\frac{y^2}{\frac{63}{36}} &= 1\\
\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{\frac{7}{4}} &= 1\\
\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} &= 1
\end{aligned}
$$

hlavní poloosa: $\frac{3}{2}$; ohniska: $\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{7}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2 \leftarrow$ excentricita; $[\pm 2, 0]$

Příklad 1.37

> Načrtněte
> $$\arg\left(\frac{z+1}{z}\right)=\frac{\pi}{6}$$

Řešení:

$$\arg\left(\frac{x+iy+1}{x+iy}\right)=\arg\left(1+\frac{1}{z}\right)=\arg\left(1+\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)=$$

$$= \arg\left(\frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

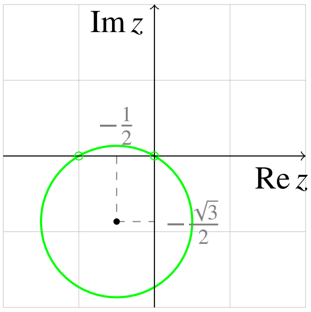
$$\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{y}{x^2+y^2+x} \qquad\qquad \frac{\pi}{6} \Longrightarrow \text{1.kvadrant}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2+y^2+x>0 \quad \& \quad -y>0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2+y^2+x+y\sqrt{3}>?=0 \iff (x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2=1 \quad \& \quad y<0$$



Příklad 1.38

> Dokažte Lemma 1.1.
>
> $$\rho(z_1,z_2)=\rho_3(F(z_1),F(z_2))=\begin{cases}\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}} & \text{pro } z_1,z_2\in\mathbb{C}\\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, & \text{pro } z_1\in\mathbb{C}, z_2=\infty\\ 0, & \text{pro } z_1=\infty=z_2\end{cases}$$

Řešení:

Je-li $z_1 = z_2 = \infty$ je tvrzení zřejmé. Zbývají tedy 2 možnosti:

1. Nechť $z_1 \neq \infty$ a $z_2 \neq \infty$. Potom

$$\rho^2(z_1,z_2)=\rho_3^2(F(z_1),F(z_2))=$$

$$=\left(\frac{\mathrm{Re}(z_1)}{1+|z_1|^2}-\frac{\mathrm{Re}(z_2)}{1+|z_2|^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{Im}(z_1)}{1+|z_1|^2}-\frac{\mathrm{Im}(z_2)}{1+|z_2|^2}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2}-\frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}\right)^2=$$

$$= \left(\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{1+|z_1|^2} - \frac{z_2}{1+|z_2|^2}\right)\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{1+|z_1|^2} - \frac{z_2}{1+|z_2|^2}\right)\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} - \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}\right)^2 =$$
$$= \left|\frac{z_1}{1+|z_1|^2} - \frac{z_2}{1+|z_2|^2}\right|^2 + \left(\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} - \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}\right)^2 =?=$$
$$= \frac{|z_1|^2}{(1+|z_1|^2)^2} + \frac{|z_2|^2}{(1+|z_2|^2)^2} - \frac{2\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} + \frac{|z_1|^4}{(1+|z_1|^2)^2} -$$
$$- \frac{2|z_1|^2 \cdot |z_2|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} + \frac{|z_2|^4}{(1+|z_2|^2)^2} =$$
$$= \frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} + \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2} - \frac{2(\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2) + |z_1|^2 + |z_2|^2)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} =$$
$$= \frac{|z_1|^2(1+|z_2|^2) + |z_2|^2(1+|z_1|^2) - 2\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2) - 2|z_1|^2|z_2|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} =$$
$$= \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} = \frac{|z_1 - z_2|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}$$

Z čehož plyne požadovaná rovnost.

2. Nechť $z_1 \neq \infty$ a $z_2 = \infty$. Potom

$$\rho^2(z_1, \infty) = \rho_3^2(F(z_1), (0,0,1)^T) =$$
$$= \left(\frac{\operatorname{Re}(z_1)}{1+|z_1|^2}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} z_1}{1+|z_1|^2}\right)^2 + \left(\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} - 1\right)^2 =$$
$$= \frac{(\operatorname{Re} z_1)^2 + (\operatorname{Im} z_1)^2}{(1+|z_1|^2)^2} + \frac{1}{(1+|z_1|^2)^2} = \frac{1+|z_1|^2}{(1+|z_1|^2)^2} = \frac{1}{1+|z_1|^2}$$

čímž je důkaz kompletní.

Pozn. ρ je skutečně metrika

i) $\rho(z_1, z_2) \geq 0$; $\rho(z_1, z_2) = 0 \iff z_1 = z_2$ ... zřejmé

ii) $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$ ... zřejmé (definice pro $z_1 \in \mathbb{C}$ & $z_2 = \infty$ je již symetricky dáno)

iii) $\rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \geq \rho(z_1, z_3)$

a) $z_1 = z_2 = z_3 = \infty$

b) $z_1 = z_2 = \infty \quad \& \quad z_3 \in \mathbb{C}$

$$0 + \frac{1}{\sqrt{1 + |z_3|^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + |z_3|^2}}$$

Kapitola 2

Posloupnosti a řady

Příklad 2.39

> rozhodněte o konvergenci
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + i(-1)^{n-1} n}{n^2}$$

Řešení:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2}$$

$$\downarrow$$

$\sum \frac{1}{n^p}$ konverguje pro $p > 1$, navíc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konverguje dle Leibnize; navíc platí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$

$\implies$ řada konverguje k součtu $\underline{\frac{\pi^2}{6} + i \ln 2}$

Příklad 2.40

rozhodněte o konvergenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$$

Řešení:

$$\left|\frac{i^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \quad \& \quad \sum \frac{1}{n^2} \text{ konv. abs.} \implies \text{řada konv. absolutně}$$

Příklad 2.41

rozhodněte o konvergenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$$

Řešení:$|a_n| = \frac{(\sqrt{2})^n}{n!}$

podílové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(\sqrt{2})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{n+1} = 0$$

Příklad 2.42

rozhodněte o konvergenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n \cdot 2^n}$$

Řešení:

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 2^n}} = \frac{1}{2} \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

absolutně konvergentní

Příklad 2.43

> rozhodněte o konvergenci
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}(1+i)^n$$

Řešení:

$$\left| \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}(1+i)^{n+1}}{\frac{n}{3^n}(1+i)^n} \right| = \left| \frac{1}{3} \frac{n+1}{n}(1+i) \right| \to \frac{\sqrt{2}}{3}$$

absolutně konvergentní

Příklad 2.44

> rozhodněte o konvergenci
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$$

Řešení:

platí

$$\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi}{n} + i \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{n}$$

jenže řada

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi}{n} \text{ diverguje}$$

limitní srovnávací kritérium $a_k > 0,\ b_k > 0, \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = L$

$L < \infty$ & $\sum b_n$ konv. $\implies$ $\sum a_n$ konv.

$L > 0$ & $\sum b_n$ div. $\implies$ $\sum a_n$ div.

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi}{n}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$L = \lim \cos \frac{\pi}{n} = 1 \qquad\qquad L > 0 \quad \& \quad \sum b_n \text{ div.}$$

$$\searrow \qquad \swarrow$$

$$\Longrightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi}{n} \quad \text{div.}$$

$$\Longrightarrow \text{diverguje}$$

Příklad 2.45

> Určete součet řady
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{2^n} \qquad \text{pro } \varphi \in \mathbb{R}$$

Řešení:

Platí $\cos n\varphi = \operatorname{Re}(e^{in\varphi}) = \operatorname{Re}(e^{i\varphi})^n$

$$\Downarrow$$

máme reálnou část geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \text{kde } z := \frac{e^{i\varphi}}{2}$$

Jelikož $\left|\frac{e^{i\varphi}}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ a platí stejně jako v $\mathbb{R}$: $\sum z^n = \frac{1}{1-z}$ pro $|z| < 1$

máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{i\varphi}}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{i\varphi}}{2}} = \frac{2}{2 - e^{i\varphi}} = \frac{2(2 - e^{-i\varphi})}{(2 - 2e^{-i\varphi})(2 - e^{i\varphi})} = \frac{4 - 3\cos\varphi + 2i\cos\varphi}{5 - 4\cos\varphi}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum \frac{\cos n\varphi}{2^n} = \operatorname{Re}\left(\frac{4 - 2\cos\varphi + 2i\cos\varphi}{5 - 4\cos\varphi}\right) = \frac{4 - 2\cos\varphi}{5 - 4\cos\varphi}$$

Příklad 2.46

Určete, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$, konvergují řady

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^{\alpha}}$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi \cdot i}{n}}}{n^{\alpha}}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{n!} i^{n}$$

Řešení:

(a) $(\alpha > 0)$

(b) $(\alpha > 1)$

(c) $(\alpha < 0)$

Kapitola 3

Základy kalkulu v $\mathbb{C}$

Příklad 3.47

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$$

A) Navíc, pouze s pomocí definice ukažte, že

a) $\lim_{z\to z_0}(az+b) = az_0 + b, \quad a, b \in \mathbb{C}$

b) $\lim_{z\to 1-i}(x + i(2x+y)) = 1 + i$

c) $\lim_{z\to 2}(z^2 + iz) = 4 + 2i$

d) $\lim_{z\to -i} \frac{1}{z} = i$

Řešení:

neexistuje, jelikož

- přiblížení po reálné ose ($z = x$):

$$\lim_{\substack{x>0 \\ x\in\mathbb{R}}} \frac{\overline{x}}{x} = \lim_{x>0} 1 = 1$$

- přiblížení po reálné ose ($z = iy$):

$$\lim_{\substack{y\to 0 \\ y\in\mathbb{R}}} \frac{\overline{iy}}{iy} = \lim \frac{-iy}{iy} = -1$$

A)

a) Nechť $\epsilon > 0$ je libovolné. Nechť $|z - z_0| < \delta$.

$$\text{Je-li } a = 0 \implies |b - b| = 0 < \epsilon$$
$$\text{Je-li } a \neq 0 \implies |(az + b) - (az_0 + b)| = |a(z - z_0)| = |a| \cdot |z - z_0| < |a| \cdot \delta$$
$$\text{Je-li tedy } |z - z_0| < \delta = \frac{\epsilon}{|a|} \implies |f(z) - L| < \epsilon$$

b) Nechť $\epsilon > 0$ je libovoln0. Položme $z = x + iy$ a $|z - (1 - i)| < \delta$. Pak $|x - 1| < \delta$ a $|y + 1| < \delta$ a

$$\begin{aligned} |(x + i(2x + y)) - (1 + i)| &= |(x - 1) + i(2x + y - 1)| \leq \\ &\leq |x - 1| + |2x + y - 1| \\ &= |x - 1| + |2x - 2 + y + 1| \\ &\leq |x - 1| + 2|x - 1| + |y + 1| < \delta + 2\delta + \delta = 4\delta \end{aligned}$$

Je tedy $|z - (1 - i)| < \delta = \frac{\epsilon}{4} \implies |f(z) - L| < \epsilon$

c) Nechť $\epsilon > 0$ je libovolné a $|z - 2| < \delta$. Pak

$$\begin{aligned} |z^2 + iz - (4 + 2i)| &= |z^2 - 4 + i(z - 2)| \leq \\ &\leq |z^2 - 4| + |z - 2| = |z + 2||z - 2| + |z - 2| \\ &= |z - 2 + 4||z - 2| + |z - 2| \leq \\ &\leq (|z - 2| + 4)|z - 2| + |z - 2| < (\delta + 4) \cdot \delta + \delta \\ &= (\delta + 5) \cdot \delta \end{aligned}$$

Je-li $|z - 2| < \delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{6}\} \implies |f(z) - L| < (\delta + 5) \cdot \delta < (1 + 5) \cdot \frac{\epsilon}{6} = \epsilon$

$\uparrow$

BÚNO $\delta \leq 1 \implies \delta \cdot (\delta + 5) \leq 6\delta = \epsilon$

d) Nechť $\epsilon > 0$ je libovolné a $|z - (-i)| < \delta$. Pak

$$\left|\frac{1}{z} - i\right| = \left|\frac{1 - iz}{z}\right| = \frac{|-i(z + i)|}{|z|} = \frac{|z + i|}{|z|} < \frac{\delta}{|z|}$$

Jelikož $|z - (-i)| < \delta$, je-li $\delta < \frac{1}{2} \implies |z| > \frac{1}{2}$, a tedy $\frac{1}{|z|} < 2$.

Takže
$$\left|\frac{1}{z} - i\right| < \frac{\delta}{|z|} < 2\delta$$

Je-li $|z - (-i)| < \delta - \min\{\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2}\}$, pak $\left|\frac{1}{z} - i\right| < \epsilon$.

Příklad 3.48

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z)}{z}$$

Řešení:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z)}{z} \underset{\uparrow}{=} \lim \frac{x^2}{x^2+y^2} - i \lim \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{neexistuje}$$

$$\frac{x}{x+iy} = \frac{x(x-iy)}{x^2+y^2}$$

$\lim_{x\to 0,\, y=kx} \frac{x^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{1}{1+k^2}$

Příklad 3.49

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|}$$

Řešení:

$$\begin{matrix} x\to 0 \\ y = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad 1 \qquad\qquad \begin{matrix} x = 0 \\ y \to 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad i$$

$$\frac{x}{|x|} = \pm 1 \qquad\qquad \frac{iy}{|y|} = \pm i$$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \; v(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\cos\varphi}{\rho} = \cos\varphi \implies \text{limita neexistuje}$$

Příklad 3.50

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z^2)}{z}$$

Řešení:

$$\frac{\mathrm{Re}(z^2)}{z} = \frac{x^3 - xy^2 + i(-x^2y + y^3)}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3(\cos^3\varphi - \cos\varphi\sin^2\varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho(\cos^3\varphi - \cos\varphi\sin^2\varphi) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2y + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3(-\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin^3\varphi)}{\rho^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim \frac{\mathrm{Re}(z^2)}{z} = 0$$

lze i elegantně $\frac{|\mathrm{Re}(z^2)|}{|z|} \le \frac{|z|^2}{|z|} = |z| \implies \epsilon = \delta$ v definici limity a $L = 0$

Příklad 3.51

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z^2}{\mathrm{Re}(z)}$$

Řešení:

$$z_0 = 0 \implies \text{neexistuje}$$
$$z_0 = \infty \implies \infty$$

Příklad 3.52

$$L = \lim_{z\to 0} e^{\frac{\mathrm{Im}\, z^2}{z}}$$

Řešení:

Příklad 3.53

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{z}\right)$$

Řešení:

$$\frac{1}{2i}\frac{z^2-\overline{z}^2}{z\cdot\overline{z}} = \frac{1}{2i}\frac{x^2-y^2+2ixy-(x^2-y^2-2ixy)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2i}\frac{4ixy}{x^2+y^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \lim_{\rho\to 0^+} 2\cdot\cos\varphi\sin\varphi = 2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi$$

$\downarrow$

limita neexistuje

Příklad 3.54

$$\lim_{z\to\infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2}$$

Řešení:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{4}{z^2}}{(\frac{1}{z}-1)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{4}{(1-z)^2} = 4$$

Příklad 3.55

$$\lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-1)^3}$$

Řešení:

$$\lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty$$

$$\Uparrow$$

$$\lim_{z\to 1} \tfrac{(z-1)^3}{1} = 0$$

Příklad 3.56

$$\lim_{z\to\infty} z\,\mathrm{Re}(z)$$

Řešení:

$$\text{“intuitivní přístup”:} \quad \lim_{z\to\infty} z = \infty$$

$$\lim_{z\to\infty} \mathrm{Re}\, z \underset{\uparrow}{=} \infty, \text{ neboť } \mathrm{Re}\,\infty = \infty$$

jenže toto není pravda

$$\lim_{z\to\infty} \mathrm{Re}\, z \ \text{ neexistuje}$$

i) podle definice: $O_\epsilon(\infty)$ existuje $O^*_\delta(\infty)$ takové, že pro $\forall z \in O^*_\delta(\infty)$ je $\mathrm{Re}\, z \in O_\delta(\infty)$

$$O_\epsilon(\infty) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{K\left(0, \frac{1}{\epsilon}\right)}$$

$$O^*_\delta(\infty) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{K\left(0, \frac{1}{\delta}\right)}$$

$\uparrow$

sem patří body $z = iy$ pro $y > \frac{1}{\delta}$ a pro ně je $\mathrm{Re}\, z = 0$ (což ale nepatří do $O_\epsilon(\infty)$!)

ii)

$$\mathrm{Re}\, z = x \implies \lim_{z\to\infty} \mathrm{Re}\, z = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{z=x \\ x\in\mathbb{R} \\ x\to\infty}} \mathrm{Re}\, z = \infty \\ \lim\limits_{\substack{z=iy \\ z\to\infty \\ (y\to+\infty)}} \mathrm{Re}\, z = 0 \end{cases} \implies \text{limita neexistuje}$$

Příklad 3.57

Dodefinujte funkci

$$f(z) = \frac{z \cdot \mathrm{Re}(z)}{|z|}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

tak, aby byla spojitá v bodě $z = 0$

Řešení:

$$\lim_{z\to 0}\frac{z\cdot \operatorname{Re} z}{|z|}=0 \implies f(0):=0$$

$$\frac{(x+iy)\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\begin{cases}\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{\sqrt{\rho^2}}=0\\ \lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^2\cdot\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2}}=0\end{cases}$$

$$\lim_{z\to\infty} z\operatorname{Re} z\ ? \iff \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\operatorname{Re}(\frac{1}{z})$$

$$\downarrow$$

$$\lim\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-iy}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}=\begin{cases}\lim_{x=0,\,y\to 0}\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}=\lim 0=0\\ \lim_{x=ky,\,y\to 0,\,k\neq 0}\frac{k^2y^2}{(k^2y^2+y^2)^2}=\lim_{y\to 0,\,k\neq 0}\frac{k^2}{y^2(k^2+1)}=\infty\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}=\begin{cases}\lim_{x\to 0,\,y\to 0}\frac{0}{y^4}=0\\ \lim_{x=ky,\,y\to 0}\frac{ky^2}{(k^2y^2+y^2)^2}=\lim\frac{k}{y^2(1+k^2)^2}=\infty\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

limita neexistuje

$$\lim_{z\to\infty} z\operatorname{Re} z=\infty \iff \lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{1}{z}\operatorname{Re}(\frac{1}{z})}=0$$

$\uparrow$ platí?

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{Re}(\frac{1}{z})}=\lim_{z\to 0}\frac{x+iy}{\frac{x}{x^2+y^2}}=\lim_{z\to 0}\frac{(x+iy)(x^2+y^2)}{x}$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(x^2+y^2)}{x}=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y(x^2+y^2)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{yx^2}{x}+\frac{y^3}{x}\right)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\underset{\substack{\downarrow\\0}}{yx}+\frac{y^3}{x}\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x} = \lim_{x=ky^3,\ y\to 0} \frac{y^3}{ky^2} = \frac{1}{k} \implies \text{neexistuje}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim \frac{y(x^2+y^2)}{x} \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim z \operatorname{Re} z \neq \infty$$

Příklad 3.58

a) Určete definiční obory (chápeme jako $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$)

1. $f(z) = \frac{3z+2i}{z^2+4}$
2. $f(z) = \frac{2iz^2+5}{(z+i)^2(z-1)}$
3. $f(z) = \frac{z^2 \operatorname{Im}(z)}{|z|-2\operatorname{Re}(z)}$
4. $f(z) = \frac{3|z|\operatorname{Re}(z)}{5\operatorname{Re}(z)-2\operatorname{Im}(z)}$

b) Určete definiční obory (i) jako funkce $f : \mathbb{C} \to \tilde{\mathbb{C}}$, ii) jako funkce $f : \tilde{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathbb{C}}$)

1. $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$
2. $f(z) = \frac{z+i}{z^2-i}$
3. $f(z) = \frac{1}{e^z-1}$

Řešení:

a)

1. $\mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\}$
2. $\mathbb{C} \setminus \{1, i\}$
3. $\mathbb{C} \setminus \{\underbrace{\operatorname{Im} z = \pm \operatorname{Re}(z) \cdot \sqrt{3},\ \operatorname{Re} z \geq 0}_{(\operatorname{Im} z)^2 \neq 3\cdot(\operatorname{Re} z)^2}\}$
4. $\mathbb{C} \setminus \{2\operatorname{Im} z = 5\operatorname{Re} z\}$

b) i) spojité všude v definičním oboru
b) ii)

1. všude
2. všude
3. nespojité v ∞

$$\text{spojitost v } \infty \iff f\left(\frac{1}{z}\right) \text{ spojitá v } 0:$$

$$\frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z^2}} = \frac{z}{z^2+1} \text{ spojitá v } 0$$

$$\frac{\frac{1}{z}+i}{\frac{1}{z^2}-i} = \frac{z+iz^2}{1-iz^2}$$

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{z}}-1} \text{ není def. v } 0$$

Příklad 3.59

> funkce $\arg z$ spojitá na $\mathbb{C} \setminus (\infty, 0]$

Řešení:

Věta 3.0.1. *Funkce* $\arg z$ *je spojitá v každém bodě* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *s výjimkou záporné reálné osy.*

Důkaz. Připomeňme, že

$$\arg z = \arg(z+iy) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0 \ \&\ y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0 \ \&\ y \le 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \ \&\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \ \&\ y < 0 \end{cases}$$

Jelikož $\arg z \in \mathbb{R}$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ (tj. $\mathrm{Re}(\arg z) = \arg z$ & $\mathrm{Im}(\arg z) = 0$), je spojitost $\arg z$ ekvivalentní se spojitostí v reálném oboru. Je zřejmé, že $\arg z$ je spojitá uvnitř jednotlivých kvadrantů (díky spojitosti $\arctan w$). Pro $x = 0$ a $y > 0$ máme hodnotu $\frac{\pi}{2}$ a limitním přechodem dostaneme totéž, neboť

$$\lim_{x\to 0^+,\, y>0} \arg z = \lim_{x\to 0^+,\, y>0} \arctan\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to 0^-,\, y>0} \arg z = \lim_{x\to 0^-,\, y>0} \left(\arctan\frac{y}{x} + \pi\right) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$$

Podobně pro $x = 0$ a $y < 0$ máme hodnotu $-\frac{\pi}{2}$ a

$$\lim_{x\to 0^+,\, y<0} \arg z = \lim_{x\to 0^+,\, y<0} \arctan\frac{y}{x} = -\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to 0^-,\, y<0} \arg z = \lim_{x\to 0^-,\, y<0} \left(\arctan\frac{y}{x} - \pi\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Spojitost na kladné části reálné osy je také zřejmá, zatímco na záporné části reálné osy máme hodnotu $-\pi$ (z předpisu pro $x < 0,\ \&\ y \geq$)

$$\lim_{y\to 0^+,\, x<0} \arg z = \lim_{y\to 0^+,\, x<0} \left(\arctan\frac{y}{x} + \pi\right) = \pi$$

tedy $\arg z$ má na záporné části reálné osy neodstranitelnou nespojitost I. druhu se skokem délky 2π, což dokazuje spojitost $\arg z$ na $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\} \cup \{0\})$ □

Poznámka:

i) Stejného výsledku dosáhneme i s pomocí alternativního vyjádření ze strany ?, tj.

$$\arg z = \arg x + iy = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}, & x \leq 0\ \&\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}, & x \leq 0\ \&\ y < 0 \\ -\pi, & x < 0\ \&\ y = 0 \end{cases}$$

Nicméně v obou případech jsme museli rozdělit $\arg z$ podle jednotlivých kvadrantů v $\mathbb{C}$. To je způsobeno tím, že $\arg z \in [-\pi, \pi)$, zatímco $\arctan w$ nabývá pouze hodnot mezi $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Tuto nevýhodu lze obejít pomocí polovičního argumentu Pro $y \neq 0$ máme oba $\triangle$ jsou podobné (SSS) $\Longrightarrow$ oba trojúhelníky jsou pravoúhlé, úhel φ je rozpůlen, úhel α je také "nahoře" Pak z trojúhelníku s vrcholy $[x, y]$, $[x, 0]$ & $[|z|, 0]$ plyne

$$\cot\alpha = \frac{|z| - x}{y}, \quad \text{tj. } \alpha = \operatorname{arccot}\frac{|z| - x}{y}$$

neboť platí $\arctan\alpha + \operatorname{arccot}\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($(\arctan\alpha)' + (\operatorname{arccot}\alpha)' = \frac{1}{1+\alpha^2} - \frac{1}{1+\alpha^2} = 0$ & $\arctan 0 +$?)
Tedy celkem

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} 2\cdot\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0\ \&\ x > 0 \\ -\pi, & y = 0\ \&\ x < 0 \end{cases}$$

Je-li $x > 0$ a $y \to 0$, pak

$$\lim_{y\to 0^+,\, x>0} 2\cdot \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spojitost arctan}}}{=}$$

$$= 2\cdot \arctan\left(\lim_{y\to 0^+,\, x>0} \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} \right) \underset{\uparrow}{=} 2\cdot \arctan 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0^+,\, x>0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y}{1} = \lim_{y\to 0^+,\, x>0} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\lim_{y\to 0^-,\, x>0} 2\cdot \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zcela totožný výpočet}}}{=}$$

Zatímco pro $x < 0$ a $y \to 0$ dostaneme

$$\lim_{y\to 0,\, x<0} 2\cdot \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} \left\| \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} \to \pm\infty \right\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spojitost arctan}}}{=} 2\cdot\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm\pi$$

tedy opět skok o délce 2π.

ii) Analogicky jako ve theorem 3.0.1 můžeme uvážit i jinou větev funkce $\operatorname{Arg} z$. Potom platí:

> funkce $\arg_\varphi z$ je spojitá v každém bodě $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ s výjimkou bodů na polopřímce vycházející z počátku s body o argumentu φ.

přičemž $\arg_\varphi z$ značí větev $\operatorname{Arg} z$, pro kterou platí

$$\arg_\varphi z \in [\varphi - 2\pi, \varphi)$$

Pak zjevně $\arg z = \arg_{2\pi} z$.

Příklad 3.60

Určete, kde má $f(z)$ derivaci:

a0) z definice $f(z) = \operatorname{Re} z$

a) $f(z) = z \operatorname{Re} z = (x + iy)x$

a1) $f(z) = z - \overline{z}$

b) $f(z) = |z|^2$

b1) $f(x + iy) = x^2 + iy^2$

c) $f(z) = \frac{1}{z}$

d) $f(z) = \frac{1}{\overline{z}}$

e) $f(z) = \overline{z} \operatorname{Im} z$

f) $e^x \cdot e^{-iy}$

Dále
60A) Je-li funkce f diferencovatelná v bodě z_0, pak platí

$$f'(z_0) = u_x + iv_x$$

Určete $f'(z_0)$, je-li z vyjádřeno v polárních souřadnicích, tj. $z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$
60B) Funkci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lze kromě tvaru $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ vyjádřit také pomocí polárních souřadnic jako

$$f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$$

Ukažte, že komplexně diferencovatelnou funkci f v bodě $z \neq 0$ platí

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \quad \text{a} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

(toto jsou vlastně C-R podmínky pro z v polárních souřadnicích)
A jak vypadá Laplaceova rovnice v polárních souřadnicích?
60C) Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ splňuje C-R podmínky v $K(0, R)$ a položme $g(z) := \overline{f\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)}$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus K(0, R)$. Ukažte, že g také splňuje C-R podmínky (v polárních souřadnicích).
(bod $\frac{R^2}{\overline{z}}$ je symetrický k z vzhledem ke kružnici $|z| = R$
s tímto se ještě potkáme v případě $R = 1$ $\to$ kruhová inverze)
60D) Uvažme funkci $f(z) = w = R(\cos\psi + i \sin\psi)$ pro $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. Ukažte, že pro $z \neq 0$ & $w' \neq 0$ a diferencovatelnou funkci f platí

$$\frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad a \quad \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

(toto jsou C-R podmínky pro z a f v polárních souřadnicích)

Řešení:

a0) $f(z) = \operatorname{Re} z$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0}{z - z_0} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x - x_0}{x + iy - x_0 - iy_0} \text{ neexistuje}$$

$$\lim_{x\to x_0,\ y=y_0+k(x-x_0)} \frac{x - x_0}{x + i(y_0 + k(x - x_0)) - x_0 - iy_0} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x + \cancel{iy_0} + ik(x - x_0) - x_0 \cancel{- iy_0}} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{(1 + ik)(x - x_0)} = \frac{1}{1 + ik} \quad ↯$$

nebo přes Cauchyho-Riemannovy podmínky: $u = x,\ v = 0$

$$\begin{matrix} u_x = 1 & v_x = 0 \\ u_y = 0 & v_y = 0 \end{matrix}$$

a) $f(z) = z \operatorname{Re} z = (x + iy),\ \mathcal{D}(f) = \mathbb{C}$

$$u = x^2, \quad v = xy$$

$$\begin{matrix} u_x = 2x & v_x = y \\ u_y = 0 & v_y = x \end{matrix}$$

$\Downarrow$

pouze pro $[0, 0]$

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{z \operatorname{Re} z - 0}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \operatorname{Re} z = 0$$

(ovšem dokázat existenci derivace pouze v $z = 0$ přímo z definice už by bylo trochu složitější. . .)

a1) $f(z) = z - \overline{z}$

$u = x - x = 0, \quad v = y + y = 2y$

$$\begin{matrix} u_x = 0 & v_x = 0 \\ u_y = 0 & v_y = 2 \end{matrix}$$

$u_x \neq v_y \implies$ funkce není diferencovatelná

b) $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$

$u = x^2 + y^2,\ v = 0$

$$\begin{matrix} u_x = 2x & v_x = 0 \\ u_y = 2y & v_y = 0 \end{matrix} \implies \text{C-R pouze pro } z = 0 \text{ a platí } f'(0) = 2x\Big|_{x=0} + i \cdot 0\Big|_{y=0} = 0$$

Přímým výpočtem dostaneme totéž

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z\to} \frac{z \cdot \overline{z}}{z} = \lim_{z\to 0} \overline{z} = 0$$

Ovšem dokázat přímo z definice, že derivace existuje pouze pro $z = 0$ už by bylo trochu komplikovnější...

b1) $f(x+iy) = x^2 + iy^2$

$$\begin{array}{cc} u_x = 2x & v_x = 0 \\ u_y = 0 & v_y = 2y \end{array}$$
$$\Downarrow$$
$$u_x = v_y \iff x = y$$

$\implies$ f je diferencovatelná pouze v bodech $x + ix$, $x \in \mathbb{R}$ a zde platí:

$$f'(x+ix) = u_x + iv_x = 2x$$

c) $f(z) = \frac{1}{z}$

$f(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ $\quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

$$\begin{array}{ll} u_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ u_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & v_y = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{array}$$

$\Downarrow$ $\quad u, v \in C^1$

komplexně diferencovatelná na $\mathcal{D}(f)$ a platí

$$f'(z) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \underset{\uparrow}{=} -\frac{x^2-2ixy-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(x-iy)^2}{(x-iy)^2(x+iy)^2} =$$

$$x = z \;\&\; y = 0 \implies -\frac{z^2}{z^4} = -\frac{1}{z^2}$$

$$= -\frac{1}{(x+iy)^2} = -\frac{1}{z^2}$$

60A) Pomocí pravidla pto derivování složené funkce dostaneme

$$u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \implies u_r = u_x \cdot x_r + u_y \cdot y_r =$$
$$= u_x \cdot \cos\varphi + u_y \cdot \sin\varphi$$

Podobně
$$v_r = v_x \cdot \cos\varphi + v_y \cdot \sin\varphi$$
Proto s využitím Cauchyho-Riemannových podmínek máme

$$\begin{array}{l} u_r = u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi \to u_r \cos\varphi = u_x \cos^2\varphi + u_y \cos\varphi \sin\varphi \\ v_r = v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi = -u_y \cos\varphi + u_x \sin\varphi \to v_r \sin\varphi = -u_y \cos\varphi \sin\varphi + u_x \sin^2\varphi \\ \hline \end{array}$$

$$\Longrightarrow\ u_r \cos\varphi + v_r \sin\varphi = u_x(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = u_x$$

Podobně

$$\begin{array}{c} u_r \sin\varphi = u_x \sin\varphi\cos\varphi + u_y \sin^2\varphi \\ v_r \cos\varphi = -u_y \cos^2\varphi + u_x \sin\varphi\cos\varphi \end{array} \quad\Longrightarrow\quad u_r \sin\varphi - v_r \cos\varphi = u_y$$

Takže
$$\begin{aligned} f'(z_0) = u_x + iv_x = u_x - iu_y &= u_r \cos\varphi + v_r \sin\varphi - iu_r \sin\varphi + iv_r \cos\varphi = \\ &= u_r(\cos\varphi - i\sin\varphi) + v_r(\sin\varphi + i\cos\varphi) = \\ &= u_r e^{-i\varphi} + iv_r(-i\sin\varphi + \cos\varphi) = (u_r + iv_r)e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

Máme tedy rovnosti

$$\begin{array}{ccc} ru_r = v_\varphi & a & -r\cdot v_r = u_\varphi \\ \downarrow \frac{\partial}{\partial f} & & \downarrow \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ u_r + ru_{rr} = v_{\varphi r} & & -rv_{r\varphi} = u_{\varphi\varphi} \\ \hookrightarrow & & \downarrow \\ & & -r(u_r + ru_{rr}) = u_{\varphi\varphi} \\ & & \Downarrow \\ & & r^2u_{rr} + ru_r + u_{\varphi\varphi} \underset{\uparrow}{=} 0 \end{array}$$

Laplaceova rovnice v polárních souřadnicích

Podobně máme

$$r^2 v_{rr} + rv_r + v_{\varphi\varphi}$$

60B) Platí

$$u_r + iv_r = \frac{\partial f}{\partial r} = f'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial r} \underset{\uparrow}{=} f'(z)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$u_\varphi + iv_\varphi = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = f'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi} = f'(z) \cdot r \cdot (-\sin\varphi + i\cos\varphi)$$

Proto

$$ir\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} = ir(u_r + iv_r) - u_\varphi - iv_\varphi = f'(z) \cdot r \cdot (i\cos\varphi - \sin\varphi) + f'(z) \cdot r(-\sin\varphi + i\cos\varphi) = 0$$

Oddělením reálné a imaginární části dostaneme

$$ru_r - v_\varphi = 0 \quad \& \quad -rv_r - u_\varphi = 0$$

z čehož plynou požadované rovnosti. Podobně jako v Důsledku 3.7. (str 20)bychom mohli ukázat, že splnění těchto C-R podmínek & $u, v \in C^1$ je postačující pro (komplexní) diferencovatelnost funkce f v bodě $z \neq 0$.

60C) Využijeme předchozí cvičení (60A). Položme $f = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$.

Protože $\arg\left(\frac{1}{\bar z}\right) = \arg z$, máme $g(z) = u(\frac{R^2}{r},\varphi) - iv(\frac{R^2}{r},\varphi)$.

Položením $g(z) = P(r,\varphi) + iQ(r,\varphi)$ pak s využitím řetězového pravidla dostaneme

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{R^2}{r^2}u_1(\frac{R^2}{r},\varphi) & \frac{\partial P}{\partial \varphi} = u_2(\frac{R^2}{r},\varphi) \\ \frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{R^2}{r^2}v_1(\frac{R^2}{r},\varphi) & \frac{\partial Q}{\partial \varphi} = -v_2(\frac{R^2}{r},\varphi) \end{array}$$

kde u_i, v_i pro $i \in \{1,2\}$ značí příslušné parciální derivace funkcí u, v vzhledem k i-té proměnné. Jelikož ale f splňuje C-R podmínky, musí podle předchozího cvičení platit

$$u_1(r,\varphi) = \frac{1}{r}v_2(r,\varphi) \quad \& \quad v_1(r,\varphi) = -\frac{1}{r}u_2(r,\varphi)$$

Nahrazením r za $\frac{R^2}{r}$ pak dostaneme

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{R^2}{r^2}u_1(\frac{R^2}{r},\varphi) = -\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{r}{R^2}v_2(\frac{R^2}{r},\varphi) = -\frac{1}{r}v_2(\frac{R^2}{r},\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \varphi}$$

a

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{R^2}{r^2}v_1(\frac{R^2}{r},\varphi) = -\frac{R^2}{r^2}\frac{r}{R^2}u_2(\frac{R^2}{r},\varphi) = -\frac{1}{r}u_2(\frac{R^2}{r},\varphi) = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \varphi}$$

tj. funkce g také splňuje C-R pro z v polárním tvaru.

60D) Platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial R}{\partial r}(\cos\psi + i\sin\psi) + R(-\sin\psi + i\cos\psi)\frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial R}{\partial \varphi}(\cos\psi + i\sin\psi) + R(-\sin\psi + i\cos\psi)\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Proto

$$
\begin{aligned}
ir \cdot \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} = r \cdot \frac{\partial R}{\partial r}(i\cos\psi - \sin\psi) + rR(-\sin\psi - \cos\psi)\frac{\partial \psi}{\partial r}\\
- \frac{\partial R}{\partial \varphi}(\cos\psi + i\sin\psi) - R(-\sin\psi + i\cos\psi)\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} =\\
= ir\frac{\partial R}{\partial r}(\cos\psi + i\sin\psi) - rR(\cos\psi + i\sin\psi)\frac{\partial \psi}{\partial r}\\
- \frac{\partial R}{\partial \varphi}(\cos\psi + i\sin\psi) - iR(\cos\psi + i\sin\psi)\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} =\\
= [\underbrace{\cos\psi + i\sin\psi}_{=/=0}][ir\frac{\partial R}{\partial r} - rR\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial \varphi} - iR\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}]
\end{aligned}
$$

Z předchozího cvičení ale víme, že $ir\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$. Proto díky $w \neq 0$ máme

$$ir\frac{\partial R}{\partial r} - rR\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial \varphi} - iR\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0$$

z čehož po oddělení reálné a imaginární složky získáme požadované rovnosti.

$$
\begin{array}{llll}
u_x = v_y & \Longleftrightarrow\ e^y + e^{-y} = -(e^y + e^{-y}) & \text{nebo} & \cos x = 0 \\
 & \quad e^y + e^{-y} = 0 & & \Downarrow \\
 & \text{neexistuje } \lightning & & x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\
u_y = -v_x & \Longleftrightarrow\ \sin x = 0 & \text{nebo} & e^y - e^{-y} = -(e^y - e^{-y}) \\
 & \qquad x = k\pi & \text{nebo} & e^y - e^{-y} = 0 \\
 & & & e^{2y} = 1 \\
 & & & y = 0 \\
 & & & \Downarrow u, v \in C^1 \\
 & & & \underline{z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}
\end{array}
$$

pouze v těchto bodech existuje derivace $f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0 + i0 = 0$
funkce není nikde holomorfní

Příklad 3.61

Kde je funkce $f(z)$ holomorfní?

a) $f(z) = 2|z| + 3i$

b) $f(z) = \sin \overline{z}$

c) je nekde zadani?

d) $f(z) = \frac{1}{\overline{z}}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

e) $f(z) = \overline{z}\,\mathrm{Im}\, z$

f) $f(x+iy) = e^x \cdot e^{-iy} = e^x (\cos(-y) + i\sin(-y))$

61A) Ukažte, že vztah mezi funkcí u a funkcí harmonicky sdruženou je antisymetrický. Tj. v je harmonicky sdružená s $u \iff -u$ je harmonicky sdružená s v.
61B) Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\mathbb{C}$. Ukažte, že totéž pak platí i o funkci $\overline{f(\overline{z})}$.

Řešení:

a) $f(z) = 2|z| + 3i$

$f(x+iy) = 2\sqrt{x^2+y^2} + 3i, \ \mathcal{D}(f) = \mathbb{C}$

$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \ v(x,y) = 3$

$$\left.\begin{array}{ll} u_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} & v_x = 0 \\ u_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} & v_y = 0 \end{array}\right. \implies \text{C-R neplatí v } \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ pro } z = 0 :$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sqrt{x^2+y^2} + 3i - 3i}{x+iy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2(x-iy)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

$$\implies \lim_{\rho\to 0^+} \frac{2\rho\cos\varphi \cdot \sqrt{\rho^2}}{\rho^2} = 2\cos\varphi$$

$\implies$ derivace neexistuje nikde v $\mathbb{C}$

$\implies$ není nikde holomorfní (to plyne již z $\mathbb{C} \setminus \{0\}$)

b) $f(z) = \sin \overline{z}$

$$f(x+iy) = \frac{e^{i\overline{z}} - e^{-i\overline{z}}}{2i} = \frac{e^{ix+y} - e^{-ix-y}}{2i} = \frac{e^y(\cos x + i\sin x) - e^{-y}(\cos(-x) + i\sin(-x))}{2i} =$$

$$= \frac{\cos x(e^y - e^{-y}) + i \sin x(e^y + e^{-y})}{2i} = -\frac{1}{2}\left(i \cos x(e^y - e^{-y}) - \sin x(e^y + e^{-y})\right)$$

$u(x,y) = \frac{1}{2}\sin x(e^y + e^{-y}),\ v(x,y) = -\frac{1}{2}\cos x(e^y - e^{-y})$

$$\begin{aligned} u_x &= \tfrac{1}{2}\cos x(e^y + e^{-y}) & v_x &= \tfrac{1}{2}\sin x(e^y - e^{-y}) \\ u_y &= \tfrac{1}{2}\sin x(e^y - e^{-y}) & v_y &= -\tfrac{1}{2}\cos x(e^y + e^{-y}) \end{aligned}$$

d) $f(z) = \frac{1}{\bar z}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$f(x,y) = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} u_x &= \tfrac{(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)} & v_x &= \tfrac{2xy}{x^2+y^2} \\ u_y &= \tfrac{2xy}{x^2+y^2} & v_y &= \tfrac{x^2+y^2-2y^2}{x^2+y^2} \end{aligned} \quad \text{neplatí všude}$$

e) $f(z) = \bar z \operatorname{Im} z$ kde je holomorfní? → nikde

$f(x,y) = (x - iy) \cdot y = xy - iy^2$

$$\begin{aligned} u_x &= y & v_x &= 0 \\ u_y &= x & v_y &= -2y \end{aligned} \quad \text{pouze v } [0,0]$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - iy^2}{x + iy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overbrace{(xy - iy^2)(x - iy)}^{x^2y - ixy^2 - iy^2x - y^3}}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3 \cos\varphi \sin\varphi - \rho^3 \sin^3_\varphi}{\rho^2} = 0$$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3 \cos\varphi \cdot \sin^2\varphi + \rho^3 \cos^2\varphi \sin\varphi}{\rho^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(0) = 0$$

f)

$$f(x + iy) = e^x \cdot e^{-iy} = e^x(\cos(-y) + i \sin(-y))$$

$$\Downarrow$$

$u = e^x \cos y,\ v = -e^x \sin y$

$$\begin{array}{ll} u_x = e^x \cos y & v_x = -e^x \sin y \\ u_y = -e^x \sin y & v_y = -e^x \cos y \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$u_x = v_y \iff e^x = 0 \text{ nebo } \cos y = 0 \implies \cos y = 0$$
$$u_y = -v_x \iff e^x = 0 \text{ nebo } \sin y = 0 \implies \sin y = 0$$

ale $\cos y = 0 = \sin y$ nenastane nikdy současně $\implies$ f není nikde diferencovatelná

61A) Nechť v je harmonicky sdružená s u na nějaké otevřené množině $D \subseteq \mathbb{C}$, tj. $u + iv$ je holomorfní na D. Pak ale také $-if$ je holomorfní na D, tj. $-iu + v$ nebo-li $v + i(-u)$, což tedy znamená, že $-u$ je harmonicky sdružená s v.

61B) Jelikož f je holomorfní $\implies$ u, v mají spojité parciální derivace (libovolného řádu) a platí

$$u_x = v_y \quad \& \quad u_y = -v_x$$

Položíme-li $g(z) := \overline{f(\overline{z})} = w(x,y) + i\omega(x,y)$,
$\overline{f(\overline{z})} = \overline{(u(x,-y) + iv(x,-y))} = u(x,-y) - iv(x,-y)$, 1. množnost) pak

$$w(x,y) = u(x,-y), \quad \omega(x,y) = -v(x,-y)$$

Zjevně i w, ω mají spojité parciální derivace a platí

$$w_x = u_x(x,-y) = v_y(x,-y) = \frac{\partial}{\partial y}(-v(x,-y)) = \omega_y(x,y)$$

a

$$w_y(x,y) = -u_y(x,-y) = v_x(x,-y) = -\omega_x(x,y)$$

$\implies$ C-R + spojitost $\implies$ holomorfní

2. možnost) – může se stát, že výpočet jednoho z integrálů je komplikovaný $\rightarrow$ tento postup pak nelze použít!

$$v = \int 2y\,dx + C(y) = 2xy + C(y)$$
$$\Downarrow$$
$$y(2x{+}1) + C(x) = 2xy + C(y)$$
$$C(x) = C(y) - y$$
$$\Downarrow$$
$$C(x) = K$$

$$f(z) = f(x+iy) =$$
$$= x^2 - y^2 + x + i(2xy + y + k)$$
$$\Downarrow x = z,\ y = 0$$
$$f(z) = z^2 + z + iK$$
$$\uparrow$$
ověřit (korektně pouze $x = \frac{z+\overline{z}}{2},\ y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$)

Příklad 3.62

> Najděte holomorfní funkci $f(z)$ takovou, že
>
> $$u(x, y) = \mathrm{Re}(x + iy) = x^2 - y^2 + x$$

Řešení: nejdříve "harmoničnost": $u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$ ✓
C-R podmínky

$$\begin{aligned} u_x &= 2x + 1 = v_y \\ u_y &= -2y = -v_x \end{aligned} \implies v = y(2x + 1) + C(x)$$

$$\downarrow \frac{\partial}{\partial x}$$

$$v_x = 2y + C'(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ -u_y}}{2y}$$

$$C'(x) = 0 \implies C = K$$

Příklad 3.63

> Najděte holomorfní funkci $f(z)$ takovou, že
>
> $$v(x, y) = x + y - 3 \quad \& \quad f(0) = -3i$$

Řešení:

$$v_y = 1 = u_x \implies y = x + C(y)$$

$$\downarrow \frac{\partial}{\partial y}$$

$$C'(y) = -1$$

$$C(y) = -y + K, \ K \in \mathbb{R}$$

$$f(x + iy) = x - y + K + i(x + y - 3) = z + K + i(z - 3), \ f(0) : \quad -3i = K - 3i$$

$$K = 0$$

$$f(z) = z + iz - 3i$$

Příklad 3.64

> Holomorfní pro
> $$v = \ln(x^2 + y^2) - x^2 + y^2$$

Řešení:

"harmoničnost"!

$$v_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} + 2y = u_x \implies u = \int \frac{2y}{x^2 + y^2}\, dx + C(y) = 2y\frac{1}{4} \arctan \frac{x}{y} + 2xy + C(y)$$

$$\downarrow \frac{\partial}{\partial y}$$

$$u_y = 2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + 2x + C'(y) = -\frac{2x}{x^2 + y^2} + 2x$$

$$-\frac{2x}{y^2 + x^2} + 2x + C'(y) = -\frac{2x}{x^2 + y^2} + 2x$$

$$C'(y) = 0$$

$$C(y) = K$$

$$f(x + iy) = 2 \arctan \frac{x}{y} + 2xy + K + i(\ln\left(x^2 + y^2\right) - x^2 + y^2),\ y \neq 0$$

$$x = 0$$

$$f(iy) = i(\ln y^2 + y^2) + K$$

$$y = -iz$$

$$f(z) = i \ln\left(-z^2\right) - iz^2 + K,\ K \in \mathbb{R}$$

Příklad 3.65

> Holomorfní pro
> $$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Řešení:

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2} \text{ na } \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$u = \frac{y}{x^2+y^2} \text{ je diferencovatelná na } \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}\text{“harmoničnost”!}$$

$$\begin{aligned}
\text{a platí } u_x &= -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} &&\to & v_y &= -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
u_y &= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} &&\to & v_x &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v &= \int v_y\,dy + C(x) = -\int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy + C(x) = \begin{vmatrix} s = x^2+y^2\\ ds = 2y\,dy\end{vmatrix} =\\
&= -x\int \frac{ds}{s^2} + C(x) = x\cdot\frac{1}{s} + C(x) = \frac{x}{(x^2+y^2)} + C(x)
\end{aligned}$$

$$\downarrow \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + C'(x) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$C'(x) = 0$$

$$C(x) = K$$

$$v = \frac{x}{x^2+y^2} + K$$

$$\Downarrow$$

$$f(x+iy) = \frac{y}{x^2+y^2} + i\frac{x}{x^2+y^2} + iK$$

$$f(z) = i\frac{z}{z^2} + iK = \frac{i}{z} + iK,\ z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Příklad 3.66

> Holomorfní s
> $$u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$$
> kde u je diferencovatelná a harmonická funkce.

Řešení:

$$u_x = e^x(x\cos y - y\cdot\sin y) + e^x\cdot\cos y = e^x((1+x)\cos y - y\sin y) = v_y$$

$$
\begin{aligned}
v &= \int e^x((1+x)\cos y - y\sin y)\, dy + C(x) = \\
&= e^x[(1+x)\sin y - \sin y + y\cos y] + C(x) \\
&\downarrow \frac{\partial}{\partial x} \\
& e^x[x\sin y + y\cos y] + e^x \sin y + C'(x) = -e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y) \\
&\Downarrow \\
& C'(x) = 0 \implies C(x) = K,\ K \in \mathbb{R} \\
&\implies f(z) = ze^z + iK,\ K \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Příklad 3.67

Holomorfní pro

a) $u = x^2 + y^2$

b) $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$

Řešení:

a) neexistuje → není harmonická → ověření

b) $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$
holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$??

Kapitola 4

(Funkční a) mocninné řady

Příklad 4.68

a) poloměr $\sum_1^\infty \frac{z^n}{n}$

b) poloměr $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$

c) $\sum_1^\infty n^n z^n$

d) $\sum \frac{n}{2^n} z^n$

e) $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$

f) $\sum_1^\infty z^{n!}$

g) $\sum_0^\infty 2^n z^{n!}$

h) $\sum_0^\infty [3 + (-1)^n]^n z^n$

i) $\sum_0^\infty (n + a^n) z^n$

Řešení:

a)

$$a_n = \frac{1}{n} \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \implies R = 1$$

b)

$$a_n = \frac{1}{n!} \implies \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 \implies R = \infty$$

c)

$$a_n = n^n \implies \lim \sqrt[n]{n^n} = \lim n = \infty \implies R = 0$$

d)

$$a_n = \frac{n}{z^n} \implies \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim \frac{n+1}{2n} = \lim \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \implies R = 2$$

e)

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \implies \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\lim(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} \quad R = e$$

f) $a_n = \begin{cases} 0, & n \neq k! \\ 1, & n = k! \end{cases}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0, & n \neq k! \\ 1, & n = k! \end{cases} \implies \limsup \sqrt[n]{a_n} = 1 \to R = 1$$

g) $a_n = \begin{cases} 0, & n \neq k! \\ 2^k, & n = k! \end{cases}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0, & n \neq k! \\ \sqrt[k!]{2^k}] = \sqrt[(k-1)!]{2}, & n = k! \end{cases}$$

$$\limsup = \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[(k-1)!]{2} = 1 \quad R = 1$$

h)

$$a_n = [3 + (-1)^n]^n \to \sqrt[n]{|a_n|} = 3 + (-1)^n = \begin{cases} 4 & n \ldots \text{sudé} \\ 2 & n \ldots \text{liché} \end{cases} \implies \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 4$$

$$R = \frac{1}{4}$$

i) i) $a \le 1 \implies a^n \le 1 \implies n + a^n \le n + 1$

$n \le n + a^n = a_n \le n + 1$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n + a^n} \begin{cases} \ge \sqrt[n]{n} \to 1 \\ \le \sqrt[n]{n+1} \to 1 \end{cases} \implies \lim \sqrt[n]{a_n} = 1 \quad R = 1$$

ii) $a > 1 \implies a^n > n$ pro velká n

pro tato n platí

$$n + a^n < 2a^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n + a^n} \begin{cases} > \sqrt[n]{a^n} = a \\ < \sqrt[n]{2a^n} = \sqrt[n]{2}a \to a \end{cases} \implies \lim \sqrt[n]{|a_n|} = a \implies R = \frac{1}{a}$$

Příklad 4.69

poloměr pro

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(z_n)!} z^n$$

Řešení:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \to \frac{1}{4}$$

$$R = 4$$

Příklad 4.70

poloměr pro

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 - e^{i\alpha})^n} (z - e^{i\alpha})^n, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \ne k\pi$$

Řešení:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)(1 - e^{i\alpha})^{n+1}} \cdot n \cdot (1 - e^{i\alpha})^n \right| = \lim \left| \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - e^{i\alpha}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{n}{n+1}} \left| \frac{1}{1-\cos\alpha - i\sin\alpha} \cdot \frac{1-\cos\alpha + i\sin\alpha}{1-\cos\alpha + i\sin\alpha} \right| = 1 \cdot \left| \frac{1-\cos\alpha + i\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2 - (i\sin\alpha)^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{1-\cos\alpha + i\sin\alpha}{1-2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^\alpha} \right| = \left| \frac{1-\cos\alpha + i\sin\alpha}{2+2\cos\alpha} \right| = \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{4(1-\cos\alpha)^2} + \frac{\sin^2\alpha}{4(1-\cos\alpha)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-2\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}}$$

$$\Longrightarrow R = 2\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = 2 \cdot \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$$

Příklad 4.71

> Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ konverguje absolutně pro $|z| \le 1$

Řešení:

Pro $|z| \le 1$ dostaneme

$$\left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right| \le \frac{|z|^n}{n(n+1)} \le \frac{1}{n(n+1)} \le \frac{1}{n^2}$$

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ konverguje}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum \left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right| \le \sum \frac{1}{n^2}$$

$$\Downarrow \text{ konverguje}$$

$$\sum \frac{z^n}{n(n+1)} \text{ konverguje absolutně}$$

Příklad 4.72

> Určete obor konvergence pro řadu
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 \cdot 4^n}$$

Řešení:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 \cdot 4^n} \quad \rightsquigarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^{n}}{(n+2)^3 \cdot 4^{n+1}}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^3 \cdot 4^{n+2}}{(n+2)^3 \cdot 4^{n+1}} = 4 \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^3}{(n+2)^3} = 4$$

$R = 4$

konverguje absolutně pro $|z+2| < 4$

pro $|z+2| = 4$ dostaneme

$$\left|\frac{(z+2)^n}{(n+2)^3 \cdot 4^{n+1}}\right| = \frac{1}{4(n+2)^3} \le \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konverguje absolutně}}}{\frac{1}{n^3}}$$

obor konvergence $\overline{K(-2,4)}$

Příklad 4.73

> obor konvergence
>
> $$\sum \frac{n}{2^n} z^n$$

Řešení:

$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}$

$R = 2,$

$z = 2.$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{z^n} \cdot z^n\right| = \lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$$

obor konvergence: $K(0,2)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cdot z^n =$$

$$= \sum \frac{n}{2^n} \left(2^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)\right) =$$

$$= \sum \underset{\substack{\uparrow \\ \text{neplatí nutná podmínka}}}{n}(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Diverguje

platí $\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = -,\ n \cdot (\cos n\varphi \dots) = n$ ↯

Příklad 4.74

> Poloměr konvergence
>
> $$\sum_{1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n} = z^3 + 0 \cdot z^4 + 0 \cdot z^5 + \frac{z^6}{2} + \dots$$

Řešení:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 3k+1, 3k+2 \\ \frac{1}{k} & n = 3k \end{cases} \qquad \text{nebo přímo}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{3n+3}}{n+1} \cdot \frac{n}{z^{3n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^3 \cdot n}{n+1} \right| = |z^3| = |z|^3$$

$$\Downarrow$$

$|z| < 1$ konverguje

$|z| > 1$ diverguje

$$\sum \left| \frac{z^{3n}}{n} \right| \underset{\underset{|z|=1}{\uparrow}}{=} \sum \frac{1}{n} = \infty \text{ na hranici nekonverguje absolutně}$$

na hranici? $|z| = 1 \iff z = e^{i\varphi}$

$$\sum \frac{e^{i\varphi 3n}}{n} = \sum \frac{1}{n} \cos 3n\varphi + i \sum \frac{1}{n} \sin 3n\varphi$$

$$\left.\begin{aligned} |\textstyle\sum \cos 3n\varphi| &\le \frac{1}{|\sin\frac{3\varphi}{2}|} \\ |\textstyle\sum \sin 3n\varphi| &\le \frac{1}{|\sin\frac{3\varphi}{2}|} \end{aligned}\right. \quad \text{pro } \varphi \ne \frac{2}{3}k\pi$$

konvergují (dodej sipku) podle Dirichleta – viz str.26

$\varphi = 0 \implies z_1 = 1$ diverguje

$\varphi = \frac{2}{3}\pi \implies z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ diverguje

$\varphi = \frac{4\pi}{3} \implies z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ diverguje

$\overline{K(0,1)} \setminus \{1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

Příklad 4.75

> Nechť $p \in \{\pm 1, -2\}$. Vyšetřeme konvergenci pro
>
> $$\sum_{1}^{\infty} n^p z^n$$

Řešení:

$a_n = n^p \implies r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{n^p} = \lim(\sqrt[n]{n})^p = 1$

$R = 1$

na hranici?

a) $p = 1$

$$\sum nz^n \text{ pro } |z| = 1 \text{ platí}$$

$$|nz^n| = z \to \infty$$

$\uparrow$

není AK

pro $z \neq \pm i, \pm 1$ je vždy $\operatorname{Re} z > 1$ nebo $\operatorname{Im} z > 1$, pak tedy $n \cdot (\ ) \to \infty$ vždy Re $\sum$ nebo Im $\sum$ bude divergentní

$\implies$ tedy obor konvergence je K(0,1)

b) $p = -2$

$$\sum \frac{1}{n^2} z^n$$

pro $|z| = 1 \implies \left|\frac{1}{n^2} z^n\right| = \frac{1}{n^2} \implies$ konverguje absolutně $\implies \overline{K(0,1)}$

c) $p = -1$

$$\sum \frac{1}{n} z^n$$

$z \in \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\} \implies z = e^{i\varphi}$ pro $\varphi \in (-\pi, \pi)$

pro $\varphi = 0 \implies z = 1$ dostáváme harmonickou řadu $\implies$ diverguje

je-li $\varphi \neq 0$, použijeme Dirichletovo kritérium

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$\uparrow$

nerostoucí a $a_n \to 0$

$$\beta_n = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ohraničená posloupnost součtů?}}}{e^{in\varphi}}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} e^{i\varphi n}\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geom.řada}}}{=} \left|e^{i\varphi\frac{1-e^{in\varphi}}{1-e^{i\varphi}}}\right| \le \frac{2}{|1-e^{i\varphi}|} = \frac{2}{\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2-2\cos\varphi}} = \left|\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right| = K$$

$\implies$ Tedy pro pevné $\varphi \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ je $\left|\sum e^{i\varphi n}\right| \le K = \left|\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|$ ✓ $\implies$ $\sum \frac{z^n}{n}$ má obor konvergence $\overline{K(0,1)} \setminus \{1\}$

Příklad 4.76

> Určete obor konvergence pro řadu
>
> $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n} \cdot z^{3n}$$

Řešení:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)} \cdot n \cdot \ln n\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\ln n}{(n+1)\cdot\ln(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + 1}{\ln n + 1 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1$$

$R = 1$

■ $z^3 \neq -1,\ |z^3| = 1$

- $\varphi = 0$

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n} \leftarrow \text{konverguje dle kritéria pro alternující řady: } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n} = 0$$

- $\varphi \neq 0$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n}\underset{\substack{\uparrow \\ z = e^{i\varphi} \to z^n}}{(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)} = \sum(-1)^n \cdot \frac{\cos n\varphi}{n\cdot\ln n} + i\sum(-1)^n\frac{\sin n\varphi}{n\cdot\ln n}$$

konverguje? $\Longrightarrow$ 26A

■ $z^3 = -1$:

$$\sum_2^\infty \frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n}\cdot(z^3)^n = \sum_2^\infty \underset{\uparrow}{\frac{1}{n\cdot\ln n}}$$

diverguje podle integrálního kritéria $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x} = [\ln|\ln x|]_2^\infty$

$z^3 = -1$

$z = -1,\ \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{K(0,1)} \setminus \left\{-1,\ \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

---

pro $z = e^{i\varphi}$:

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n}e^{3i\varphi n}$$

$a_n = \frac{1}{n\cdot\ln n}$
$\uparrow$
nerostoucí, $a_n \to 0$

$b_n = (-1)^n e^{3i\varphi n}$ ohraničená posloupnost částečých součtů

$$(1 \mp \cos 3\varphi n)^2 + \sin^2 3\varphi n = 2 \mp 2\cos 3\varphi n \le 4$$
$$\downarrow$$

$$\left|\sum_2^\infty (-1)^n e^{3i\varphi n}\right| \underset{\uparrow}{=} \left|e^{6i\varphi}\frac{1-(-1)^n e^{3i\varphi n}}{1+e^{3i\varphi}}\right| = \frac{|1-(-1)^n e^{3i\varphi n}|}{|1+e^{3i\varphi}|} \le \frac{2}{\sqrt{((1+\cos 3\varphi^2 + \sin^2 3\varphi))}}$$

geom. řada

$$= \frac{2}{\sqrt{2+2\cos 3\varphi}} = \frac{2}{\sqrt{2(1+\cos 3\varphi)}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos 3\varphi}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\cos 3\varphi}{2}}} = \frac{1}{\left|\cos\frac{3\varphi}{2}\right|}\checkmark$$

$$\text{pro}\frac{3\varphi}{2} \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Longrightarrow\ \varphi \ne \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi$$

$\varphi = \frac{\pi}{3} \implies z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\varphi = \pi \implies z = -1$
$\varphi = \frac{5\pi}{3} \implies z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\implies \overline{K(0,1)} \setminus \{-1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

Příklad 4.77

> Určete součet řady
>
> $$\sum_{1}^{\infty} n \cdot z^n$$

Řešení:

$$\sum_{0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \implies \sum_{0}^{\infty} n \cdot z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} \implies \sum_{0}^{\infty} n \cdot z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Příklad 4.78

> ~~Určete součet řady~~
>
> $$\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}}$$

Řešení:

Příklad 4.79

> Určete součet řady
>
> $$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n n \cdot z^n$$

Řešení:

$$\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n = \frac{1}{1+z}$$

$$\sum_0^\infty (-1)^n \cdot n \cdot z^{n-1} = \frac{-1}{(1+z)^2}$$
$$\sum_0^\infty (-1)^n \cdot n \cdot z^n = \frac{-z}{(1+z)^2}$$
$$\sum_1^\infty (-1)^n \cdot n \cdot z^n = \frac{-z}{(1+z)^2}$$

Příklad 4.80

> ~~Určete součet řady~~
>
> $$\cancel{\sum_0^\infty \frac{z^{2n+1}}{2n+1}}$$

Řešení:

Příklad 4.81

> Ukažte, že
>
> $$\sum_{n=1}^\infty \frac{z^{2n}}{z + z^n + z^{5n}}$$
>
> konverguje na $K(0,1)$.

Řešení:

Platí

$$\left|\frac{z^{2n}}{2 + z^n + z^{5n}}\right| \le \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konverguje pro } |z|<1}}{\frac{|z|^{2n}}{2(1-|z|)}}, \quad z \in K(0,1)$$

$$|2 + z^n + z^{5n}| \ge |2 - |z^n + z^{5n}|| =$$
$$= 2 - |z^n + z^{5n}| \underset{\substack{\uparrow \\ |z^n + z^{5n}| \le |z|^n + |z|^{5n} \le 2|z| \implies -|z^n + z^{5n}| \ge -2|z|}}{\ge} 2 - 2|z|$$

$\Downarrow$

původní řada také konverguje

Příklad 4.82

> Ukažte, že řada
> $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$
> konverguje pro $\forall z \notin \mathbb{N}$. Ukažte, že konvergence je stejnoměrná na libovolné kompaktní množině v $\mathbb{C}$ neobsahující žádné $z \in \mathbb{N}$.

Řešení:
Pro $z = 0$ je to triviální (pouze nulová řada). Dále

$$\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n} = -\frac{z}{n^2(1-\frac{z}{n})}$$

Pro libovolné $z \in \mathbb{C}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n \geq n_0 \implies \left|\frac{z}{n}\right| < \frac{1}{2}$$

Pro libovolné $n \geq n_0$ máme

$$\left|\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right| = \left|\frac{z}{n^2\left(1-\frac{z}{n}\right)}\right| \leq \frac{|z|}{n^2\left(1-\frac{|z|}{n}\right)} < \frac{2|z|}{n^2} \tag{4.1}$$

Proto řada konverguje absolutně. Nechť je K kompaktní množina bez bodů z $\mathbb{N}$. Tu lze vložit do zavřené množiny

$$K_0 = \{|z| \leq R\} \setminus \bigcup_{j=1}\left\{|z-n_j| < \epsilon_j\right\}$$

kde bereme $R \notin \mathbb{N}$ a n_j jsou prvky $\mathbb{N}$ (pokud vůbec) takové, že $|n_j| < R$ a ϵ_j jsou kladná čísla dostatečně malá. Vezměme N_0 takové, že

$$\frac{R}{N_0} \leq \frac{1}{2}$$

a napišme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) = \sum_{1}^{N}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) + \sum_{N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

pro nějaké $N > N_0$. První suma je konečná a má konečný součet, neboť v K nejsou přirozená čísla menší než R. Z (4.1) vidíme, že členy druhé sumy jsou ohraničeny výrazem $\frac{2R}{n^2}$, a tedy tato řada konverguje stejnoměrně na K_0, tudíž i na K.

Příklad 4.83

> Najděte řadu takovou, že
>
> $$\sum_{1}^{\infty} z_n^k \text{ konverguje pro } \forall k \in \mathbb{N}$$
>
> a zároveň
>
> $$\sum_{1}^{\infty} |z_n|^k \text{ diverguje pro } \forall k \in \mathbb{N}$$

Řešení:

Například $z_n = \dfrac{e^{2\pi i\varphi n}}{\ln n + 1}$ pro φ iracionální.

Příklad 4.84

> Nechť $z_n \in \mathbb{C}$ jsou taková, že $\mathrm{Re}\{z_n\} \geq 0$ & $\sum z_n$ konverguje & $\sum z_n^2$ konverguje. Ukažte, že pak i $\sum |z_n|^2$ konverguje. Dejte protipříklad, pokud z_n může mít i zápornou reálnou část.

Řešení:

Nechť $z_n = x_n + iy_n$. Pak $x_n \geq 0$,a tedy

$$\sum x_n \text{ konverguje} \implies \sum x_n^2 < \infty \tag{4.2}$$

neboť $x_n^2 \leq x_n \leq 1$ pro n dostatečně velká (konvergence $\implies \lim x_n = 0$). Protože $\sum z_n^2$ konverguje:

$$\sum \mathrm{Re}\, z_n^2 = \sum (x_n^2 - y_n^2) \text{ konverguje,}$$

a tedy také řada

$$-\sum (x_n^2 - y_n^2) + 2\sum x_n^2 = \sum (x_n^2 + y_n^2) = \sum |z_n|^2$$

konverguje. Kdyby $\mathrm{Re}\, z_n$ byla libovolná, pak by (4.2) nemusela platit. Např. pro $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to \sum x_n$ konverguje (Leibniz), ale $\sum x_n^2$ je harmonická řada $\implies$ diverguje.

Obecněji, pro $z_n = \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$
pro $\varphi \in \mathbb{R}$ takové, že $\varphi \& 2\varphi$ nejsou násobky 2π (např. $\varphi = \frac{\pi}{4}$),
pak opět $\sum z_n$ konverguje a

$$\sum z_n^2 = \sum \frac{e^{2in\varphi}}{n}$$

konverguje. Ovšem $|z_n|^2 = \frac{1}{n} \implies \sum |z_n|^2$ diverguje.

Kapitola 5

Elementární funkce