evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Diskrétní deterministické modely

Tento učební text vznikl za přispění Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost v rámci projektu Univerzitní výuka matematiky v měnícím se světě (CZ.1.07/2.2.00/15.0203).

Jeho první varianta vznikala v jarním semestru 2011, kdy byl předmět poprvé vyučován. Na základě zkušeností z výuky byl text přepracován a rozšířen v jarním semestru 2013.

Přes všechnu snahu má text daleko do dokonalosti. Budu vděčný za všechny připomínky, doplnění a upozornění na chyby, které v něm zůstaly.

Srpen 2013 Zdeněk Pospíšil

Obsah

Používané symboly

$\square$, $\blacksquare$	konec důkazu, konec příkladu
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$	rozšířená množina reálných čísel
$\mathcal{O}(\alpha)$	okolí $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{O}(\alpha) = \begin{cases} (h, \infty), & \alpha = \infty, \\ (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon), & \alpha \in \mathbb{R}, \\ (-\infty, h), & \alpha = -\infty; \text{ přitom } h, \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0 \end{cases}$
$\operatorname{sgn} \alpha$	znaménko reálného čísla α $\operatorname{sgn} \alpha = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0 \\ -1, & \alpha < 0 \end{cases}$
$f : A \to B$	zobrazení množiny A do množiny B
$\operatorname{Dom} f$	definiční obor zobrazení (funkce) f
$\operatorname{Im} f$	obor hodnot zobrazení (funkce) f
$[f]_a^b = f(b) - f(a)$	rozdíl funkčních hodnot funkce f
$f\|_A$	zúžení zobrazení f na množinu A
$\ker f$	jádro morfismu (lineárního zobrazení) f, $\ker f = \{x \in \operatorname{Dom} f : f(x) = 0\}$
id_A	identické zobrazení (identita) na množině A, $(\forall x \in A)\, \mathrm{id}_A(x) = x$
f', f'',..., $f^{(j)}$	obyčejná derivace funkce f podle její proměnné, druhá až j-tá derivace
$\\|\boldsymbol{x}\\|$	norma vektoru $\boldsymbol{x}$ ekvivalentní s normou euklidovskou
$\det \mathsf{A}$	determinant matice A
$\operatorname{tr} \mathsf{A}$	stopa matice $\mathsf{A} = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, $\operatorname{tr} \mathsf{A} = \sum\limits_{i=1}^n a_{ii}$.
$\mathbb{Z}_{t_0}$	množina celých čísel nepřevyšujících celé číslo t_0, str. 6
$\mathbb{Z}_{-\infty}$	množina celých čísel, $\mathbb{Z}_{-\infty} = \mathbb{Z}$, str. 6
$\mathcal{P}$	množina reálných posloupností, str. 7
$\mathcal{P}_{t_0}$	množina reálných posloupností definovaných na množině $\mathbb{Z}_{t_0}$, str. 7
$\mathcal{P}_{-\infty}$	množina reálných posloupností definovaných na množině $\mathbb{Z}$, str. 7
$a \equiv \alpha$	posloupnost α je stacionární, $(\forall t \in \operatorname{Dom} a) a(t) = \alpha$, str. 9
$\lim a$, $\lim\limits_{t\to\infty} a(t)$	limita posloupnosti a, str. 10
$\mathcal{P}_\tau^\bullet$	množina konvergentních posloupností z prostoru $\mathcal{P}_\tau$, $\mathcal{P}_\tau^\bullet = \left\{a \in \mathcal{P}_\tau :\ (\exists \alpha \in \mathbb{R})\, \alpha = \lim\limits_{t\to\infty} a(t)\right\}$, str. 11
$\limsup\limits_{t\to\infty} a(t)$, $\liminf\limits_{t\to\infty} a(t)$	limes superior a inferior posloupnosti a, str. 13

$\sum_{t=m}^{n} a(t)$	součet členů posloupnosti a od m do n, str. 14
$\cdot^{\sigma}$, a^{σ}	operátor posunu, str. 16
Δ, $\Delta a(t)$	operátor (první) diference (vpřed), str. 16
$\sum_{t_0}$, $\sum_{t_0} a(t)$	operátor sumace od t_0, str. 18
$\vert_{t_0}$, $a\vert_{t_0}$	operátor odečtení členu posloupnosti $a(t_0)$, $a\vert_{t_0}(t) = a(t) - a(t_0)$, str. 19
$t^{(\nu)}$	faktoriálová funkce, str. 30
$\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_{t_0}$, $\mathcal{R}_{-\infty}$	množina regresivních posloupností, množina regresivních posloupností definovaných na $\mathbb{Z}_{t_0}$ a na $\mathbb{Z}$, str. 50
$\oplus$, $\ominus$	operace na množině regresivních posloupností, str. 50
$e_p(\,\cdot\,, t_0)$, $e_p(t, t_0)$	exponenciální posloupnost příslušná k posloupnosti $p \in \mathcal{R}$ s počátkem $t_0 \in \operatorname{Dom} p$, hodnota této posloupnosti v $t \in \operatorname{Dom} p$, str. 51

Kapitola 1

Přípravné úvahy

Nejprve se pokusíme sestavit matematický model jednoduchého procesu, děje, který lze nějak kvantifikovat a který se odehrává v průběhu času. Konkrétně půjde o model růstu nějaké populace. Přitom si budeme představovat, že proces pozorujeme nebo popisujeme v oddělených časových okamžicích. Běh času si tedy budeme představovat jako diskrétní, jako plynoucí v nějakých krocích nebo taktech, jejichž trvání budeme považovat za jednotkové. Tato představu bude podstatná.

Základním objektem vystupujícím v modelu bude posloupnost. Právě členy posloupnosti budou vyjadřovat stav procesu v jednotlivých okamžicích. U posloupností si budeme všímat její monotonnosti, ohraničenosti, existence nebo neexistence limity, případně jiné charakteristiky chování posloupnosti. To ukazuje, že je užitečné připomenout některé základní poznatky o posloupnostech případně je uvést v nových souvislostech. Zejména si ukážeme, že pro posloupnosti můžeme vytvořit kalkulus, která je analogií diferenciálního a integrálního počtu pro funkce.

Jednoduchý model růstu populace

Představme si populaci složenou z nějakých organismů; mohou to být obratlovci, rostliny, mikrobi — na zvolené úrovni abstrakce na jejich povaze nezáleží. Všechny jedince budeme považovat za stejné, jeden od druhého se nijak neliší, v průběhu svého života se nijak nemění. Do naší úvahy zahrneme jediné dva děje, konkrétně že jedinci vznikají (rodí se, líhnou, klíčí, pučí, ...) a zanikají (umírají, hynou, dělí se, ...). Jako jedinou kvantitativní charakteristiku populace budeme uvažovat její velikost; ta může být vyjádřena počtem jedinců, populační hustotou, celkovou biomasou a podobně. Dále si budeme představovat, že velikost populace zjišťujeme v pravidelných časových intervalech, jinak řečeno, že máme nějakou „přirozenou“ jednotku času, takže můžeme časové okamžiky očíslovat přirozenými čísly 0,1,2,. . . . Je celkem jasné, že

$$\begin{aligned}
&(\text{velikost populace v čase } t+1) = (\text{velikost populace v čase } t) + \\
&\qquad + (\text{množství jedinců vzniklých v časovém intervalu od } t \text{ do } t+1) - \\
&\qquad\qquad - (\text{množství jedinců uhynulých v časovém intervalu od } t \text{ do } t+1).
\end{aligned}$$

Z tohoto *pojmového modelu* vytvoříme *model matematický* tak, že zavedeme veličinu x závislou na čase, tedy $x = x(t)$, kterou budeme interpretovat jako (pozorovanou) velikost populace v časovém okamžiku t. Dále označíme $B(t)$ množství jedinců vzniklých v časovém intervalu od t do $t+1$ a $D(t)$ množství jedinců uhynulých v tomto období. Symboly jsou voleny tak, že x označuje veličinu, kterou chceme znát, B je zkratkou slova „birth“ a D slova „death“.

Uvedené slovně vyjádřené rovnici nyní můžeme dát tvar

$$x(t+1) = x(t) + B(t) - D(t). \tag{1.1}$$

Abychom z této rovnice mohli spočítat velikost populace v jednotlivých časových okamžicích, potřebujeme ještě specifikovat veličiny $B(t)$ a $D(t)$. Vzhledem k předpokladu, že všichni jedinci jsou stejní, můžeme očekávat, že každý z nich „vyprodukuje“ během časového intervalu jednotkové délky určité stejné množství živých potomků; označme toto množství b. Alternativně bychom mohli říci, že b je střední hodnota počtu potomků jedince za jednotkový časový interval. Hodnota b tedy nemusí být celé číslo. Celkové množství jedinců vzniklých v časovém intervalu od t do $t+1$ tedy bude

$$B(t) = bx(t). \tag{1.2}$$

Z téhož předpokladu také můžeme odvodit, že každý jedinec má v libovolném intervalu jednotkové délky stejnou pravděpodobnost, že uhyne; označme tuto pravděpodobnost d. Klasicky spočítáme pravděpodobnost, že jedinec během jednotkového intervalu uhyne jako podíl množství uhynulých jedinců a množství všech jedinců, tj. $d = D(t)/x(t)$, neboli

$$D(t) = dx(t). \tag{1.3}$$

Možnost, že nějaký jedinec vznikne i zanikne v témže jednotkovém časovém intervalu, nemá na vztahy (1.2), (1.3) vliv. Takoví jedinci by totiž nemohli být zahrnuti mezi živé potomky, kterých je b, a tím pádem by v odvozených rovnostech vůbec nefigurovali.

Při odvození vztahu (1.2) jsme však uvažovali, jako by se množství jedinců, kteří žili v časovém okamžiku t, v průběhu intervalu do $t+1$ neměnilo. Mlčky jsme tedy přijali další zjednodušující předpoklad: k rození dochází „krátce po začátku“ uvažovaného časového intervalu, k úhynům „krátce před jeho koncem“.

Vyjádření (1.2) a (1.3) dosadíme do rovnice (1.1). Dostaneme

$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t),$$

nebo po triviální úpravě

$$x(t+1) = (1+b-d)x(t). \tag{1.4}$$

Parametr b v této rovnici nazýváme *porodnost* (birth rate); tento parametr je kladný, neboť v nevyhynulé populaci musí noví jedinci vznikat. Parametr d nazýváme *úmrtnost* (death rate); poněvadž vyjadřuje pravděpodobnost, nabývá hodnot mezi 0 a 1 — úmrtí je možné, ale není nutné. Tedy

$$b > 0, \quad 0 < d < 1. \tag{1.5}$$

Označíme-li

$$r = 1 + b - d, \tag{1.6}$$

můžeme rovnici (1.4) zapsat v kratším tvaru

$$x(t+1) = rx(t); \tag{1.7}$$

parametr r nazveme *koeficient růstu* (růstový koeficient, growth rate). Vyjadřuje relativní přírůstek populace za jednotku času. Podle podmínek (1.5) platí

$$r > 0. \tag{1.8}$$

Rovnost (1.7) můžeme chápat jako rekurentní formuli pro geometrickou posloupnost

$$\{x(0), x(1), x(3), \dots\}$$

s kvocientem r, dobře známou ze střední školy. Pokud tedy na počátku, tj. v čase $t = 0$, je velikost populace rovna

$$x(0) = \xi_0, \tag{1.9}$$

kde ξ_0 je nějaké kladné číslo, pak velikost populace v libovolném časovém okamžiku t je rovna

$$x(t) = \xi_0 r^t. \tag{1.10}$$

Dostáváme tak první závěr: velikost populace roste jako geometrická posloupnost („populace roste geometrickou řadou“). Tento závěr — ovšem odpozorovaný na růstu obyvatelstva severoamerických osad, nikoliv odvozený uvedeným postupem — zpopularizoval Thomas Malthus ve svém slavném Pojednání o principech populace z roku 1798. Proto rovnici (1.7) s počáteční podmínkou (1.9) budeme nazývat *malthusovský model růstu populace.*

Závěr bychom ale měli formulovat opatrněji: pokud se populace vyvíjí podle modelu (nebo snad podle přírodního zákona?) vyjádřeného rovností (1.7) a na počátku má velikost rovnu ξ_0, pak její velikost v časovém okamžiku t je dána výrazem na pravé straně rovnosti (1.10). Je-li přitom $r > 1$, tj. porodnost je větší než úmrtnost, pak velikost populace roste nade všechny meze, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \infty$; je-li $r < 1$, tj. úmrtnost je větší než porodnost, pak populace vymírá, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Pokud by $r = 1$, tj. porodnost by se vyrovnala s úmrtností, velikost populace by se neměnila, $x(t) = \xi_0$ v každém časovém okamžiku t.

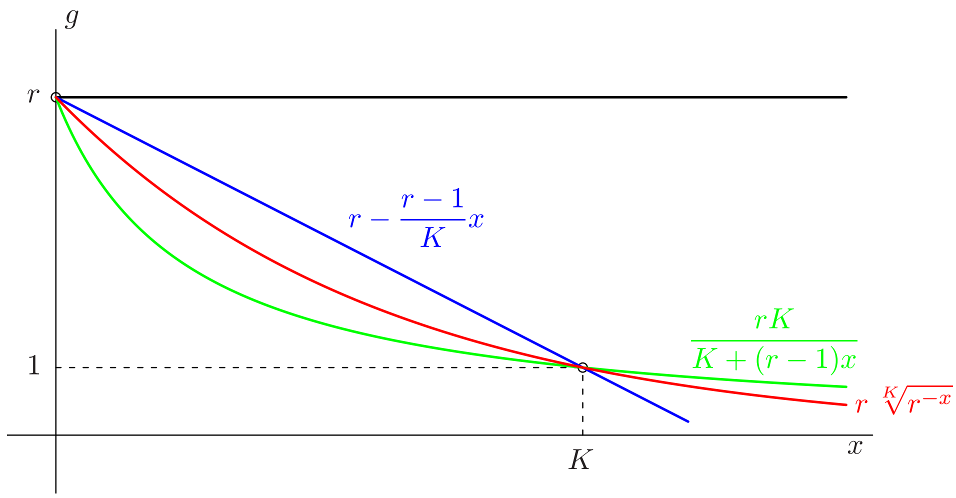
Geometrický růst populace skutečně může být pozorován v případech, kdy populace je malá a prostředí, ve kterém se vyvíjí, je prakticky neomezené; jako např v době počátečního osídlení Ameriky imigranty z Evropy a západní Afriky, nebo růst kolonie bakterií na živném substrátu. Malthusovský model (1.7) tedy za jistých podmínek popisuje růst reálné populace. Ovšem žádná populace nemůže růst nade všechny meze, přinejmenším proto, že povrch Země je konečný.

Nyní jsme tedy v situaci, že pro popis růstu (nebo přesněji pro popis vývoje velikosti) populace máme matematický model (1.4), který adekvátně popisuje skutečnost za jistých, dosti omezujících předpokladů. Chtěli bychom však mít model, který zachovává „dobré vlastnosti“ modelu (1.4), tj. správně popisuje počáteční fáze růstu malé populace, ale nemá jeho „vlastnost špatnou“, tj. nepředpovídá nerealistický růst nade všechny meze.

V omezeném prostředí velká populace spotřebovává velké množství omezených zdrojů, na jedince připadne jejich menší podíl a proto se mu nebude dostávat energie k reprodukci. Je-li tedy v prostředí s omezenými zdroji velká populace, je její porodnost (počet potomků na jedince) menší, než by byla v případě, že by populace byla malá.

Velká populace znečišťuje prostředí produkty svého metabolismu; žádný organismus ale nemůže žít v prostředí tvořeném odpady jeho činnosti nebo života. Je-li tedy populace v omezeném prostředí velká, na jedince připadne větší množství produkovaných odpadních látek, které bývají toxické a proto se úmrtnost v populaci zvětší.

Těmito úvahami můžeme dojít k závěru, že u velké populace je malá porodnost nebo velká úmrtnost. Tyto jevy se vzájemně zesilují podle (1.6), růst populace působí pokles růstového koeficientu. Při „vylepšování“ modelu (1.4) tedy konstantní koeficient růstu r nahradíme



Obrázek 1.1: Různé možnosti volby funkce g na pravé straně obecného modelu (1.11) růstu populace v prostředí s omezenými zdroji.

nějakým výrazem závislým na velikosti populace, nějakou funkcí proměnné x. Model růstu populace tedy může mít obecný tvar

$$x(t+1) = g\big(x(t)\big)x(t). \tag{1.11}$$

Přitom funkce g je definována pro nezáporné hodnoty argumentu x a je klesající. Chceme, aby model (1.7) byl speciálním případem modelu (1.11) pro „malé“ velikosti populace. Přesněji tento požadavek vyjádříme ve tvaru

$$g(0) = r > 1. \tag{1.12}$$

V tomto případě se r nazývá *vnitřní koeficient růstu* (intrinsic growth rate). Vyjadřuje maximální možný relativní přírůstek velikosti populace za jednotku času, tj. takový přírůstek, který by populace měla v prostředí s neomezenými zdroji.

Existující populace žijí v dynamické rovnováze se svým prostředím, jejich velikost se dlouhodobě nemění, přestože jedinci se rodí a umírají. Toto pozorování vede k předpokladu, že pro každou populaci existuje nějaká „rovnovážná velikost“. Pokud by populace byla větší, spotřebovávaly by více zdrojů nebo více odpadů a její růstový koeficient by byl menší než 1. Naopak, kdyby populace byla menší než „rovnovážná“, měla by nadbytek zdrojů na jedince a „přebytečná“ energie by se mohla využít pro reprodukci. Růstový koeficient takové populace by byl větší než 1. Tyto úvahy nyní vyjádříme tak, že pro klesající funkci g existuje konstanta K taková, že $g(K) = 1$,

$$(\exists K > 0)\ g(K) = 1. \tag{1.13}$$

Hodnota K vyjadřuje *kapacitu (úživnost) prostředí.*

Funkce g vystupující v modelu (1.11) je tedy klesající a splňuje podmínky (1.12), (1.13). Tuto funkci potřebujeme dále nějak specifikovat.

Nejjednodušší volbou je lineární funkce,

$$g(x) = r - \frac{r-1}{K}x,$$

tato funkce je na obr. 1.1 znázorněna modrou přímkou. Model (1.11) tedy získá tvar

$$x(t+1) = x(t)\left(r - \frac{r-1}{K}x(t)\right). \tag{1.14}$$

Tato rovnice se nazývá *logistická.* Jako model růstu populace ji patrně poprvé použil John Maynard Smith ve slavné knize Mathematical Ideas in Biology[1].

Rovnici (1.14) lze opět chápat jako rekurentní formuli pro nějakou posloupnost. Pro obecný člen takové posloupnosti však neznáme vzoreček. Aspoň ale můžeme vypočítat prvních několik členů této posloupnosti pro různé hodnoty parametrů. Tyto simulace provedeme pro hodnoty $K = 1$ a $x(0) = \xi_0 = 0{,}01$; to lze interpretovat jako růst populace v neobsazeném prostředí, do něhož invadovalo několik jedinců, rovnovážnou velikost populace přitom považujeme za jednotkovou.

Vidíme, že pro malé hodnoty koeficientu r, přesněji pro $r < 2$, populace roste. Pro malé hodnoty t, růst připomíná geometrickou posloupnost, poté se stane skoro lineárním (připomíná aritmetickou posloupnost s kladnou diferencí), pak se zpomalí až dosáhne hodnoty kapacity prostředí a růst ustane. Jinak řečeno, posloupnost zadaná rekurentně rovností (1.14) je rostoucí omezenou posloupností, pro niž platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = K. \tag{1.15}$$

Pokud je hodnota růstového koeficientu r větší, přesněji pokud je $2 < r < 3$, posloupnost překročí hodnotu kapacity prostředí, ale s tlumenými oscilacemi se na této hodnotě postupně ustálí. Stále tedy platí (1.15), ale posloupnost již není monotonní.

Při ještě větší hodnotě r se hodnoty posloupnosti neustálí na kapacitě prostředí, ale kolísají kolem ní. Pro menší r pravidelně, pro velká r již z obrázků žádnou pravidelnost vypozorovat nemůžeme.

Z těchto pozorování můžeme uzavřít, že model (1.14) může popisovat jak populaci, jejíž velikost je v dynamické rovnováze se svým prostředím (takové jsou např. populace velkých savců, nazýváme je K-stratégové — ustálí se na hodnotě K), tak populaci, jejíž velikost kolísá (to je typické např. pro drobné hlodavce, nazýváme je r-stratégové — mají velkou hodnotu r). Jeden model popisuje různé ekologické jevy. To je jeho velká přednost a proto je model (1.14) dobrým adeptem na „objevený přírodní zákon“.

Velká nevýhoda modelu (1.14) však spočívá v tom, že pro velkou počáteční hodnotu ξ_0 jsou její další hodnoty záporné, konkrétně pro $\xi_0 > Kr/(r-1)$ je $x(1) < 0$. Reálná populace nemůže mít zápornou velikost. Přitom velká počáteční hodnota může vyjadřovat např. to, že se v důsledku nějaké ekologické disturbance skokem zmenšila úživnost prostředí. Model (1.14) tedy není dostatečně obecný.

Naznačený problém modelu (1.14) spočívá v tom, že funkční hodnoty funkce g jsou pro velké hodnoty argumentu záporné. Potřebujeme tedy klesající funkci, která má vlastnosti (1.12), (1.13) a navíc je pro všechny hodnoty argumentu kladná. Takovou funkcí může být funkce lomená,

$$g(x) = \frac{rK}{K + (r-1)x},$$

[1] Cambridge Univ. Press, 1968

která je na obr. 1.1 znázorněna zelenou křivkou. Příslušný model má tvar

$$x(t+1) = x(t)\frac{rK}{K + (r-1)x(t)} \tag{1.16}$$

Tento model zavedli Raymond Beverton a Sidney Holt[2], nezávisle na nich a jiným způsobem ho odvodila Evelyn Pielou[3]. Často bývá nazýván Bevertonova-Holtova logistická rovnice nebo logistická rovnice Pielou.

Opět můžeme vypočítat několik prvních členů posloupnosti pro kapacitu prostředí $K = 1$, s počáteční hodnotou $x_0 = \xi_0$ a s různými hodnotami koeficientu r. V tomto případě vidíme, že výsledná posloupnost vždycky roste a dosáhne kapacity prostředí, tedy pro libovolnou hodnotu r platí vztah (1.15). Model (1.16) je tedy vhodný pouze pro popis populace K-stratégů.

Cenou za odstranění nedostatku v modelu (1.14) jeho nahrazením modelem (1.16) je ztráta universality. Oba modely (1.14) i (1.16) mají nějaké „dobré vlastnosti“, ale také „nedostatky“. Zkusíme v modelu (1.11) použít funkci g, která je „něco mezi“ funkcí lineární a lomenou.

Elementární klesající kladná funkce, která má vlastnosti (1.12) a (1.13) a jejíž hodnoty jsou mezi hodnotami funkce lineární a lomené, je funkce exponenciální

$$g(x) = r^{1-x/K} = r\sqrt[K]{\frac{1}{r^x}} = r\exp\left(1 - \frac{X}{K}\right),$$

viz na obr. 1.1 červenou křivku mezi modrou přímkou a zelenou křivkou. Příslušný model je tvaru

$$x(t+1) = x(t)r\exp\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \tag{1.17}$$

a zavedl ho William Ricker[4]. Bývá nazýván Rickerova (logistická) rovnice. Vypočítáme-li z něho několik prvních členů posloupnosti pro kapacitu $K = 1$ a s počáteční hodnotou $x(0) = \xi_0 = 0{,}01$ pro různé hodnoty růstového koeficientu r, vidíme, že model (1.17) je universální jako model (1.14) a nemá jeho vadu.

Ještě si můžeme povšimnout skutečnosti, že malthusovský model (1.7) je mezním případem všech logistických modelů (1.14), (1.16) a (1.17) také pro $K \to \infty$. Malthusovský model proto můžeme považovat za popis růstu populace v prostředí s neomezenými zdroji, tj. s nekonečnou úživností.

1.1 Posloupnosti

Pro celé číslo $t_0 \in \mathbb{Z}$ označíme

$$\mathbb{Z}_{t_0} = \{t_0 + n : n \in \mathbb{N}\} = \{t_0, t_0+1, t_0+2, \dots\}$$

množinu všech celých čísel větších nebo rovných číslu t_0. Pro sjednocení symboliky budeme někdy množinu celých čísel označovat $\mathbb{Z}_{-\infty}$.

[2] R. J. H. Beverton and S. J. Holt, On the dynamic of exploited fish populations. Fisheries Investigations Series 2(19). Ministry of Agriculture, Fisheries, and Food, London, UK, 1957

[3] E. C. Pielou, Mathematical Ecology. Wiley Interscience, 1977

[4] W. E. Ricker, Stock and recruitment. *J.Fish.Res.Board Can.*, 11:559–623, 1954

Definice 1. *Reálná posloupnost* je zobrazení a z množiny celých čísel $\mathbb{Z}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ takové, že jeho definiční obor $\operatorname{Dom} a$ je celá množina $\mathbb{Z}$ nebo některá z množin $\mathbb{Z}_{t_0}$.

Přívlastek „reálná“ budeme většinou vynechávat. Hodnotu posloupnosti $a(t)$ budeme nazývat *člen posloupnosti* nebo podrobněji *t-tý člen posloupnosti.* Hodnotu nezávisle proměnné t budeme někdy nazývat *index posloupnosti.* Pokud $t_0 > -\infty$ a $\operatorname{Dom} a = \mathbb{Z}_{t_0}$, řekneme, že t_0 je *počáteční index* posloupnosti.

Posloupnost a můžeme také zapisovat pomocí jejích členů jako $\{a(t)\}_{t=t_0}^{\infty}$ nebo stručně $\{a(t)\}$.

Množinu posloupností definovaných na $\mathbb{Z}_{t_0}$, resp. na $\mathbb{Z}$, označíme symbolem $\mathcal{P}_{t_0}$, resp. $\mathcal{P}_{-\infty}$; množinu všech posloupností označíme symbolem $\mathcal{P}$, tj.

$$\mathcal{P}_{t_0} = \{a : \mathbb{Z}_{t_0} \to \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{P}_{-\infty} = \{a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{P} = \bigcup_{t_0 \in \mathbb{Z}} \mathcal{P}_{t_0} \cup \mathcal{P}_{-\infty}.$$

Tvrzení 1. Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. Množina posloupností $\mathcal{P}_\tau$ je vektorovým prostorem nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$. Sčítání posloupností je definováno vztahem

$$(a+b)(t) = a(t) + b(t) \quad \text{pro všechny posloupnosti } a, b \in \mathcal{P}_\tau \text{ a každé } t \in \mathbb{Z}_{t_0},$$

nulovým prvkem je posloupnost $o \in \mathcal{P}_\tau$ taková, že $\operatorname{Im} o = \{0\}$, tj.

$$o(t) = 0 \quad \text{pro všechna } t \in \operatorname{Dom} o,$$

násobení skalárem je definováno vztahem

$$(\alpha a)(t) = \alpha a(t) \quad \text{pro všechny posloupnosti } a \in \mathcal{P}_\tau \text{ a všechna čísla } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Věta 1. *Nechť $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{P}_\tau$. Označme*

$$C(t) = C(t; a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1(t) & a_2(t) & \ldots & a_n(t) \\ a_1(t+1) & a_2(t+1) & \ldots & a_n(t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(t+n-1) & a_2(t+n-1) & \ldots & a_n(t+n-1) \end{vmatrix}.$$

Pokud existuje $t \in \mathbb{Z}_\tau$ takový index, že $C(t) \neq 0$, pak jsou posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lineárně nezávislé.

Jsou-li posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lineárně závislé, pak $C(t) = 0$ pro všechny indexy $t \in \mathbb{Z}_\tau$.

Důkaz: Nechť pro konstanty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ platí

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = o$$

a nechť $t \in \mathbb{Z}_\tau$ je takový index, že $C(t) \neq 0$. Z předchozí rovnosti nyní plyne

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 a_1(t) & + & \alpha_2 a_2(t) & + \cdots + & \alpha_n a_n(t) & = 0 \\ \alpha_1 a_1(t+1) & + & \alpha_2 a_2(t+1) & + \cdots + & \alpha_n a_n(t+1) & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 a_1(t+n-1) & + & \alpha_2 a_2(t+n-1) & + \cdots + & \alpha_n a_n(t+n-1) & = 0. \end{array}$$

To je homogenní soustava n lineárních rovnic pro n neznámých $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ a $C(t)$ je její determinant. Odtud plyne, že tato soustava má jen triviální řešení, tj.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

To ovšem znamená, že posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou lineárně nezávislé a první tvrzení je dokázáno.

Druhé tvrzení je bezprostředním důsledkem prvního. □

Poznámka 1. Determinant $C(t; a_1, a_2, \dots, a_n)$ zavedený v předchozí větě se nazývá *Casoratián posloupností* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *v indexu* t_0. Tvrzení 1 lze tedy přeformulovat: Jsou-li posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{P}_\tau$ lineárně závislé, pak jejich Casoratián je nulový v každém indexu ze společného definičního oboru těchto posloupností.

Definice 2. Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá

ohraničená zdola, pokud existuje nějaká hranice $h \in \mathbb{R}$ taková, že žádný člen posloupnosti a není menší než tato hranice, tj. $(\exists h \in \mathbb{R})(\forall t \in \mathrm{Dom}\, a)\, a(t) \geq h$;

ohraničená shora, pokud existuje nějaká hranice $h \in \mathbb{R}$ taková, že žádný člen posloupnosti a není větší než tato hranice, tj. $(\exists h \in \mathbb{R})(\forall t \in \mathrm{Dom}\, a)\, a(t) \leq h$;

ohraničená, pokud je ohraničená zdola i shora, tj. $(\exists h \in \mathbb{R})(\forall t \in \mathrm{Dom}\, a)\, |a(t)| \leq h$.

Definice 3. Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá

rostoucí, pokud pro každou hodnotu argumentu t platí nerovnost $a(t) \leq a(t+1)$, tj. $(\forall t \in \mathrm{Dom}\, a)\, a(t) \leq a(t+1)$;

ryze rostoucí, pokud pro každou hodnotu argumentu t platí nerovnost $a(t) < a(t+1)$, tj. $(\forall t \in \mathrm{Dom}\, a)\, a(t) < a(t+1)$;

klesající, pokud pro každou hodnotu argumentu t platí nerovnost $a(t) \leq a(t+1)$, tj. $(\forall t \in \mathrm{Dom}\, a)\, a(t) \leq a(t+1)$;

ryze klesající, pokud pro každou hodnotu argumentu t platí nerovnost $a(t) > a(t+1)$, tj. $(\forall t \in \mathrm{Dom}\, a)\, a(t) > a(t+1)$;

monotonní, pokud je rostoucí nebo klesající;

ryze monotonní, pokud je ryze rostoucí nebo ryze klesající;

stacionární, pokud je současně rostoucí a klesající.

Terminologická poznámka. Uvedená terminologie monotonních posloupností je méně obvyklá — posloupnost splňující podmínku

$$(\forall t_1 \in \mathbb{Z}_{t_0})(\forall t_2 \in \mathbb{Z}_{t_0})\, t_1 < t_2 \Rightarrow a(t_1) \leq a(t_2)$$

je častěji nazývaná „neklesající“ a posloupnost splňující podmínku

$$(\forall t_1 \in \mathbb{Z}_{t_0})(\forall t_2 \in \mathbb{Z}_{t_0})\, t_1 < t_2 \Rightarrow a(t_1) < a(t_2)$$

„rostoucí“, podobně pro posloupnosti klesající. V této tradičnější terminologii však posloupnost, která není „klesající“ ještě nemusí být „neklesající“ (např. posloupnost daná rovností $a(t) = \sin t$).

V terminologii zavedené v Definici 2 je ryze rostoucí posloupnost také posloupností rostoucí; pojem označující zvláštní případ nějakého obecnějšího pojmu se od tohoto obecnějšího pojmu liší přívlastkem (v pojetí aristotelské logiky nebo biologické klasifikace lze slovo „rostoucí“ považovat za rodové jméno, slovo „ryze“ za druhové jméno).[5]

Poznámka 2. Z tranzitivity relací $\leq$, $<$, $\geq$, $>$ plyne, že posloupnost $a \in \mathcal{P}$ je

– rostoucí právě tehdy, když $(\forall t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a) t_1 < t_2 \;\Rightarrow\; a(t_1) \leq a(t_2)$;

– ryze rostoucí právě tehdy, když $(\forall t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a) t_1 < t_2 \;\Rightarrow\; a(t_1) < a(t_2)$;

– klesající právě tehdy, když $(\forall t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a) t_1 < t_2 \;\Rightarrow\; a(t_1) \geq a(t_2)$;

– ryze klesající právě tehdy, když $(\forall t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a) t_1 < t_2 \;\Rightarrow\; a(t_1) > a(t_2)$.

Poznámka 3. Obor hodnot stacionární posloupnosti je jednoprvkový, tj. existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $\operatorname{Im} a = \{\alpha\}$ a $(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) = \alpha$.

Je-li $a \in \mathcal{P}$ stacionární posloupnost a $\operatorname{Im} a = \{\alpha\}$, budeme psát $a \equiv \alpha$. S použitím této symboliky můžeme nulovou posloupnost zapsat jako $o \equiv 0$.

Poznámka 4. Všechny pojmy zavedené v Definici 3 lze relativizovat na interval nezávisle proměnné. Např. posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *klesající na intervalu* $[n, m]$, jestliže pro každý index posloupnosti t takový, že $\{t, t+1\} \subseteq [n, m] \cap \operatorname{Dom} a$ platí $a(t) \geq a(t+1)$, tj.

$$(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, \{t, t+1\} \subseteq [n, m] \cap \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) \leq a(t+1).$$

Definice 4. Buď $a \in \mathcal{P}$ a $t \in \operatorname{Dom} a$. Řekneme, že index t je

uzel posloupnosti a, pokud $a(t) = 0$ nebo $a(t)a(t+1) < 0$;

argument lokálního maxima, pokud $a(t) \geq a(t+1)$ a $t - 1 \in \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) \geq a(t-1)$;

argument lokálního minima, pokud $a(t) \leq a(t+1)$ a $t - 1 \in \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) \leq a(t-1)$;

argument ostrého lokálního maxima, pokud $a(t) > a(t+1)$ a $t-1 \in \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) > a(t-1)$;

argument ostrého lokálního minima, pokud $a(t) < a(t+1)$ a $t-1 \in \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) < a(t-1)$;

argument lokálního extrému, pokud je argumentem lokálního maxima nebo minima;

argument ostrého lokálního extrému, pokud je argumentem ostrého lokálního maxima nebo minima.

Je-li t argumentem lokálního extrému, řekneme že hodnota $a(t)$ je *lokálním extrémem posloupnosti a.* Analogickou terminologii používáme pro ostré lokální extrémy, maxima a minima.

[5] Analogická terminologie byla navržena v knize L. Kosmák. *Základy matematickej analýzy.* Bratislava-Praha, Alfa-SNTL, 1984, str. 16. Místo slova „ryze“ je tam používáno slovo „ostro“.

Definice 5. *Limita posloupnosti* lim je zobrazení z množiny posloupností $\mathcal{P}$ do rozšířené množiny reálných čísel $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Obraz posloupnosti a při zobrazení lim značíme $\lim\limits_{t\to\infty} a(t)$. Řekneme, že limita posloupnosti a je rovna hodnotě $\alpha \in \mathbb{R}^*$, pokud ke každému okolí α existuje takový index posloupnosti τ, že všechny členy posloupnosti a s indexy alespoň τ jsou v tomto okolí, tj.

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = \alpha \text{ pokud } \big(\forall \mathcal{O}(\alpha)\big)\big(\exists \tau \in \mathbb{Z}\big)\big(\forall t \in \operatorname{Dom} a\big)\, t \geq \tau \Rightarrow a(t) \in \mathcal{O}(\alpha).$$

Limita se nazývá *vlastní,* pokud $\alpha \in \mathbb{R}$, tj.

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = \alpha \in \mathbb{R} \text{ pokud } (\forall \varepsilon > 0)(\exists \tau \in \mathbb{Z})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, t \geq \tau \Rightarrow |a(t) - \alpha| < \varepsilon.$$

Limita se nazývá *nevlastní,* pokud $\alpha \in \{-\infty, \infty\}$, tj.

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = \infty \text{ pokud } (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \tau \in \mathbb{Z})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, t \geq \tau \Rightarrow a(t) > h,$$

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = -\infty \text{ pokud } (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \tau \in \mathbb{Z})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, t \geq \tau \Rightarrow a(t) < h.$$

Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *konvergentní,* pokud existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = \lim\limits_{t\to\infty} a(t)$. Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *divergentní,* pokud $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \infty$ nebo $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = -\infty$.

Terminologická poznámka. Nevlastní limita posloupnosti obvykle v učebních textech o posloupnostech nebývá považována za limitu; „nevlastní limita není limita analogicky jako nevlastní matka není matka“. Terminologie zavedená v Definici 5 je však stejná jako terminologie používaná v textech o funkcích.

Věta 2. *Monotonní posloupnost má limitu. Podrobněji:*

- *je-li a rostoucí neohraničená posloupnost, pak $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \infty$;*
- *je-li rostoucí posloupnost a ohraničená shora, pak $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \sup\{a(t) :\ t \in \operatorname{Dom} a\}$;*
- *je-li klesající posloupnost a ohraničená zdola, pak $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \inf\{a(t) :\ t \in \operatorname{Dom} a\}$;*
- *je-li a klesající neohraničená posloupnost, pak $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = -\infty$.*

Důkaz: V. Novák. *Diferenciální počet v R.* Brno, MU, 1997. Věta 5.5., str. 127. □

Důsledek: Nechť $k \in \mathcal{P}_0$ je ryze rostoucí posloupnost taková, že $\operatorname{Im} k \subseteq \mathbb{Z}$. Pak $\lim\limits_{t\to\infty} k(t) = \infty$.

Důkaz: Poněvadž k je ryze rostoucí a $k(t) \in \mathbb{Z}$ pro každé $t \in \mathbb{N}$, je

$$k(t+1) \geq k(t) + 1 \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{N}.$$

Nechť $h \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo. K němu existuje $t \in \mathbb{N}$, že $t > h - k(0)$. Pro tento index t platí

$$k(t) \geq k(t-1) + 1 \geq k(t-2) + 2 \geq \cdots \geq k(0) + t > k(0) + h - k(0) = h.$$

To znamená, že posloupnost k není ohraničená shora a dokazované tvrzení plyne z Věty 2. □

Tvrzení 2. Nechť $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. Označme $\mathcal{P}_\tau^\bullet$ množinu konvergentních posloupností z vektorového prostoru $\mathcal{P}_\tau$, tj.

$$\mathcal{P}_\tau^\bullet = \left\{ a \in \mathcal{P}_\tau : \, (\exists \alpha \in \mathbb{R}) \, \alpha = \lim_{t \to \infty} a(t) \right\}.$$

Pak $\mathcal{P}_\tau^\bullet$ je vektorový podprostor prostoru $\mathcal{P}_\tau$ a zobrazení $\lim : \mathcal{P}_\tau^\bullet \to \mathbb{R}$ je lineární.

Důkaz: $\lim(\alpha a + \beta b) = \lim\limits_{t \to \infty} (\alpha a + \beta b)(t) = \alpha \lim\limits_{t \to \infty} a(t) + \beta \lim\limits_{t \to \infty} b(t) = \alpha \lim a + \beta \lim b \in \mathbb{R}$

□

Definice 6. Nechť $a \in \mathcal{P}_\tau$ je libovolná posloupnost a $k \in \mathcal{P}_0$ je ryze rostoucí posloupnost celých čísel taková, že $k(0) \geq \tau$, tj. $\operatorname{Im} k \subseteq \operatorname{Dom} a$. Pak složené zobrazení $a \circ k$ se nazývá *posloupnost vybraná z posloupnosti a*.

Vzhledem k důsledku Věty 2 je složené zobrazení $a \circ k$ z předchozí definice skutečně posloupnost, t-tý člen vybrané posloupnosti je $a\big(k(t)\big)$.

Tvrzení 3. Nechť $a \in \mathcal{P}$ je konvergentní nebo divergentní posloupnost. Pak $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je její limitou, tj. $\lim a = \lim\limits_{s \to \infty} a(s) = \alpha$, právě tehdy, když α je limitou každé posloupnosti vybrané z posloupnosti a;

$$\lim a = \lim_{s \to \infty} a(s) = \alpha \quad \Leftrightarrow$$
$$\Big((\forall k \in \mathcal{P}_0) \operatorname{Im} k \subseteq \operatorname{Dom} a, \lim_{t \to \infty} k(t) = \infty \Rightarrow \lim a \circ k = \lim_{t \to \infty} a\big(k(t)\big) = \alpha \Big).$$

Důkaz: „$\Rightarrow$“: Buď $\mathcal{O}(\alpha)$ libovolné okolí limity α a $a \circ k$ libovolná posloupnost vybraná z posloupnosti a. K okolí $\mathcal{O}(\alpha)$ existuje $s_1 \in \mathbb{Z}$ takové, že pro všechna $s \in \operatorname{Dom} a$, $s \geq s_1$ je $a(s) \in \mathcal{O}(\alpha)$. Množina $\{t \in \mathbb{N} : \, k(t) \geq s_1\}$ je podmnožinou dobře uspořádané množiny přirozených čísel, a tato množina je neprázdná, neboť $\lim\limits_{t \to \infty} k(t) = \infty$. Existuje tedy

$$t_1 = \min \{t \in \mathbb{N} : \, k(t) \geq s_1\}.$$

Pro libovolné $t > t_1$ je $k(t) > k(t_1) \geq s_1$, a tedy

$$a \circ k(t) = a\big(k(t)\big) \in \mathcal{O}(\alpha).$$

„$\Leftarrow$“: Nechť $s_0 \in \operatorname{Dom} a$. Definujme $k \in \mathcal{P}_0$ vztahem $k(t) = s_0 + t$. Pak $a \circ k$ je posloupnost vybraná z posloupnosti a. Je tedy

$$\lim_{s \to \infty} a(s) = \lim_{t \to \infty} a(s_0 + t) = \lim_{t \to \infty} a\big(k(t)\big) = \alpha.$$

□

Definice 7. Řekneme, že $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je *hromadný bod posloupnosti a*, pokud ke každému okolí α a každému celému číslu τ existuje takový index t posloupnosti a, který není menší než τ a člen $a(t)$ posloupnosti leží v tomto okolí, tj.

$\alpha \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod posloupnosti a pokud
$$\big(\forall \mathcal{O}(\alpha)\big) \big(\forall \tau \in \mathbb{Z}\big) \big(\exists t \in \operatorname{Dom} a\big) \, t \geq \tau, a(t) \in \mathcal{O}(\alpha).$$

Tvrzení 4. Hodnota $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem posloupnosti a právě tehdy, když existuje posloupnost $a \circ k$ vybraná z posloupnosti a taková, že $\lim a \circ k = \alpha$, tj. $\lim\limits_{t\to\infty} a\bigl(k(t)\bigr) = \alpha$.

Důkaz: „$\Rightarrow$“: Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem posloupnosti a. Zkonstruujeme ryze rostoucí posloupnost $k \in \mathcal{P}_0$ takovou, že $\operatorname{Dom} a \subseteq \mathbb{Z}$ a $\lim a \circ k = \alpha$.

Buď $\mathcal{O}(\alpha)$ libovolné okolí bodu α a $s_0 \in \operatorname{Dom} a$ libovolný prvek.

Položíme $k(0) = s_0$. K s_0 existuje $s_1 \in \operatorname{Dom} a$, že $s_1 \geq s_0$ a $a(s_1) \in \mathcal{O}(\alpha)$.

Položíme $k(1) = s_1$. K s_1 existuje $s_2 \in \operatorname{Dom} a$, že $s_2 \geq s_1 + 1$ a $a(s_2) \in \mathcal{O}(\alpha)$.

Položíme $k(2) = s_2$ atd.

Výsledkem této induktivní konstrukce je ryze rostoucí posloupnost $k \in \mathcal{P}_0$; přitom $k(t) = s_t$ a $s_t \in \mathcal{O}(\alpha)$ pro každý index $t \geq 0$ a tedy $a \circ k(t) = a(s_t) \in \mathcal{O}(\alpha)$. Pro všechny indexy $t \geq 0$ je $a \circ k(t) \in \mathcal{O}(\alpha)$, což znamená, že $\lim a \circ k = \alpha$.

„$\Leftarrow$“: Nechť existuje vybraná posloupnost $a \circ k$ taková, že $\lim a \circ k = \alpha \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\mathcal{O}(\alpha)$ je libovolné okolí α a $\tau \in \mathbb{Z}$ je libovolné číslo. Podle Definice 5 existuje číslo $\tau_1 \in \mathbb{Z}$ takové, že pro každé $t \geq \tau_1$ je $a \circ k(t) \in \mathcal{O}(\alpha)$. Vezmeme $t_1 \in \operatorname{Dom} k$ takové, že $t_1 > \tau_1$, $k(t_1) \in \operatorname{Dom} a$ a $k(t_1) \geq \tau$; takové číslo t_1 existuje, neboť posloupnost k je rostoucí a $\lim k = \infty$. Položíme $s_1 = k(t_1)$. Pak $s_1 \geq \tau$ a $a(s_1) = a\bigl(k(t_1)\bigr) = a \circ k(t_1) \in \mathcal{O}(\alpha)$, tedy α je hromadným bodem posloupnosti a. □

Tvrzení 5. Nechť existuje limita posloupnosti a. Pak $\lim a$ je hromadným bodem posloupnosti a.

Důkaz plyne bezprostředně z Tvrzení 3 a 4. □

Příklady. Uvažujme posloupnosti z množiny $\mathcal{P}_0$.

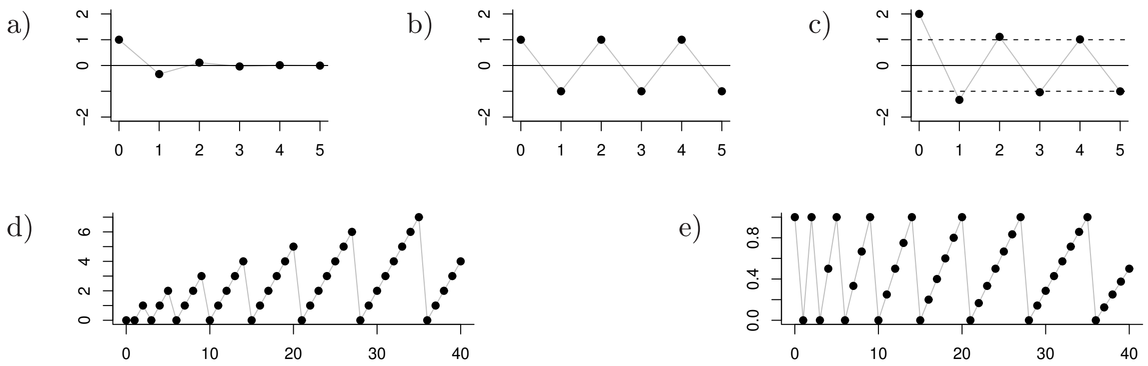
a) $a(t) = \left(-\frac{1}{3}\right)^t$, obr. 1.2 a).
Jediný hromadný bod je 0.

b) $b(t) = (-1)^t$, obr. 1.2 b).
Hromadné body jsou 1 a -1.

c) $c(t) = (-1)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t = (-1)^t \dfrac{1+3^t}{3^t}$,
$c = \left\{2, -\frac{4}{3}, \frac{10}{9}, -\frac{28}{27}, \frac{82}{81}, -\frac{244}{243}, \dots\right\}$, obr. 1.2 c). Hromadné body jsou 1 a -1.

d) Definujme posloupnost $m \in \mathcal{P}_0$ předpisem $m(t) = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8t} - 1\right)\right]$, kde $[x]$ označuje celou část z reálného čísla x.
Položme $d(t) = t - \frac{1}{2}\bigl(m(t)+1\bigr)m(t)$.
$d = \{0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, \dots\}$, obr. 1.2 d).
Každé přirozené číslo se v této posloupnosti vyskytuje nekonečně mnohokrát, je tedy jejím hromadným bodem. Vybraná posloupnost
$$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \left\{a(0), a(2), a(5), a(9), a(14), \dots, a\left(\tfrac{1}{2}t(t+3)\right), \dots\right\}$$
diverguje do ∞, je tedy také ∞ hromadným bodem posloupnosti d.

e) Uvažujme posloupnosti m a d zavedené v předchozím příkladu a položme
$$e(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\[2ex] \dfrac{d(t)}{m(t)}, & t \geq 1, \end{cases}$$



Obrázek 1.2: Příklady posloupností s různými množinami hromadných bodů.

$e(t) = \left\{1, 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 0, \dots\right\}$, obr. 1.2 e).
Každé racionální číslo z intervalu $[0, 1]$ se mezi členy této posloupnosti vyskytuje nekonečně mnohokrát. V každém okolí libovolného reálného čísla z intervalu $[0, 1]$ existuje nějaké racionální číslo $q \in [0, 1]$. To znamená, že každé reálné číslo z intervalu $[0, 1]$ je hromadným bodem posloupnosti e, množina všech hromadných bodů vyplní kompaktní interval $[0, 1]$.

Příklady ukazují, že posloupnost může mít jeden hromadný bod (a), konečně mnoho hromadných bodů (b, c), spočetně (d) nebo nespočetně (e) mnoho hromadných bodů; hromadný body mohou být konečné (a, b, c, e) nebo nekonečné (d); konečný hromadný bod může být členem posloupnosti (b, d, e) ale nemusí (a, c, e). ■

Tvrzení 6. Množina hromadných bodů libovolné posloupnosti $a \in \mathcal{P}$ má nejmenší a největší prvek.

Důkaz: V. Novák. *Diferenciální počet v R.* Brno, MU, 1997. Věta 5.7., str. 131. □

Definice 8. Nejmenší hromadný bod posloupnosti $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *limes inferior* a označuje $\liminf\limits_{t\to\infty} a(t)$; největší hromadný bod posloupnosti $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *limes superior* a označuje $\limsup\limits_{t\to\infty} a(t)$.

Z definice bezprostředně plyne

$$\liminf_{t\to\infty} a(t) \leq \limsup_{t\to\infty} a(t).$$

Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ je ohraničená zdola právě tehdy, když

$$-\infty < \liminf_{t\to\infty} a(t);$$

je ohraničená shora právě tehdy, když

$$\limsup_{t\to\infty} a(t) < \infty;$$

je konvergentní právě tehdy když

$$-\infty < \liminf_{t\to\infty} a(t) = \limsup_{t\to\infty} a(t) < \infty;$$

nemá (vlastní ani nevlastní) limitu právě tehdy, když

$$\liminf_{t\to\infty} a(t) < \limsup_{t\to\infty} a(t).$$

Definice 9. Nechť $a \in \mathcal{P}$, $m \in \operatorname{Dom} a$, $n \in \mathbb{Z}$ takové, že $n+1 \in \operatorname{Dom} a$. *Součet členů posloupnosti a od m do n* definujeme vztahem

$$\sum_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} a(m) + a(m+1) + \cdots + a(n), & n \geq m, \\ 0, & n = m-1, \\ -\big(a(n+1) + a(n+2) + \cdots + a(m-1)\big), & n < m-1. \end{cases}$$

Součin členů posloupnosti a od m do n definujeme pro $n \geq m-1$ vztahem

$$\prod_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} a(m)a(m+1)\cdots a(n), & n \geq m, \\ 1, & n = m-1; \end{cases}$$

pokud $n < m+1$ a $a(t) \neq 0$ pro $t \in [0+1, m-1] \cap \mathbb{Z}$, klademe

$$\prod_{t=m}^{n} a(t) = \frac{1}{a(n+1)a(n+2)\cdots a(m-1)}.$$

Tvrzení 7. Nechť $a \in \mathcal{P}$. Pak platí

$$\sum_{t=m}^{n-1} a(t) = -\sum_{t=n}^{m-1} a(t), \qquad \sum_{t=m}^{l} a(t) + \sum_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum_{t=m}^{n} a(t),$$

$$\sum_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} \sum\limits_{t=0}^{n-m} a(n-t), & n \geq m, \\ \sum\limits_{t=m-n}^{0} a(m-t), & n \leq m-1, \end{cases} \qquad \sum_{t=m}^{n-1} \sum_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum_{t=m}^{n-1} (n-t)a(t)$$

pro všechna m, n, l taková, že uvedené součty jsou definovány.

Pokud navíc $a(t) \neq 0$ pro $t \in \operatorname{Dom} a$, pak

$$\prod_{t=m}^{n-1} a(t) = \left(\prod_{t=n}^{m-1} a(t)\right)^{-1}, \qquad \prod_{t=m}^{l} a(t) \prod_{t=l+1}^{n} a(t) = \prod_{t=m}^{n} a(t),$$

$$\prod_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} \prod\limits_{t=0}^{n-m} a(n-t), & n \geq m, \\ \prod\limits_{t=m-n}^{0} a(m-t), & n \leq m-1, \end{cases} \qquad \prod_{t=m}^{n-1} \prod_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \prod_{t=m}^{n-1} (n-t)a(t)$$

pro všechna m, n, l taková, že uvedené součiny jsou definovány.

Důkaz: Nechť $m < n$. Pak také $m-1 < n-1$ a tedy

$$\sum_{t=n}^{m-1} a(t) = -\big(a(m) + a(m+1) + \cdots + a(n-1)\big) = -\sum_{t=m}^{n-1} a(t),$$

což je ekvivalentní s první rovností. Její platnost budeme v dalších částech důkazu využívat.

Platnost druhé rovnosti ověříme pro $m < n$. Je-li $m \le l < n$, pak

$$\sum_{t=m}^{l} a(t) + \sum_{t=l+1}^{n} a(t) = \big(a(m)+a(m+1)+\cdots+a(l)\big)+\big(a(l+1)+a(l+2)+\cdots+a(n)\big) = \sum_{t=m}^{n} a(t);$$

je-li $m < n = l$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t) + 0;$

je-li $m < n < l$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{l} a(t) - \sum\limits_{t=n+1}^{l} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t);$

je-li $l+1 = m < n$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{m-1} a(t) + \sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = 0 + \sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t);$

je-li $l+1 < m < n$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = -\sum\limits_{t=l+1}^{m-1} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t).$

V případech $m > n$ a $m = n$ ukážeme platnost druhé rovnosti analogicky.

Při ověřování třetí rovnosti rozlišíme čtyři případy:

je-li $n \ge m$ pak $\sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = a(m) + a(m+1) + \cdots + a(n-1) + a(n) =$

$$= a(n-0) + a(n-1) + \cdots + a\big(n-(n-m)\big) = \sum_{t=0}^{n-m} a(n-t);$$

je-li $n = m-1$ pak $\sum\limits_{t=m}^{m-1} a(t) = 0 = \sum\limits_{t=1}^{0} a(n-t);$

je-li $n = m-2$ pak $\sum\limits_{t=m}^{m-2} a(t) = -\sum\limits_{t=m-1}^{m-1} a(t) = -a(m-1) = -\sum\limits_{t=1}^{1} a(m-t) = \sum\limits_{t=2}^{0} a(m-t);$

je-li $n < m-2$ pak $\sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = -\sum\limits_{t=n+1}^{m-1} a(t) = -\sum\limits_{t=0}^{m-n-2} a(m-1-t) =$

$$= \sum_{t=m-n-1}^{1} a(m-1-t) = \sum_{t=m-n}^{0} a(m-t).$$

Čtvrtou rovnost dokážeme úplnou indukcí:

pro $n = m$ platí $\sum\limits_{t=m}^{m-1} \left(\sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau)\right) = 0 = \sum\limits_{t=m}^{m-1} (m-t)a(t);$

indukční krok „vpřed“: $\sum\limits_{t=m}^{n} \sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum\limits_{\tau=m}^{n} a(\tau) + \sum\limits_{t=m}^{n-1} \sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) =$

$$= \sum_{t=m}^{n} a(t) + \sum_{t=m}^{n-1} (n-t)a(t) = a(n) + \sum_{t=m}^{n-1} (n-t+1)a(t) =$$

$$= (n+1-n)a(n) + \sum_{t=m}^{n-1} (n+1-t)a(t) = \sum_{t=m}^{n} (n+1-t)a(t);$$

indukční krok „vzad“: $\sum\limits_{t=m}^{n-2} \sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum\limits_{t=m}^{n-1} \sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) + \sum\limits_{t=n}^{n-2} \sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) =$

$$= \sum_{t=m}^{n-1} (n-t)a(t) - \sum_{t=n-1}^{n-1} \sum_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum_{t=m}^{n-1} (n-t)a(t) - \sum_{\tau=m}^{n-1} a(\tau) =$$

$$= \sum_{t=m}^{n-1} (n-t-1)a(t) = \sum_{t=m}^{n-2} (n-t-1)a(t).$$

Rovnosti pro součin ověříme stejně. □

1.2 Operátory na prostoru posloupností

1.2.1 Operátor posunu

Definice 10. *Operátor posunu (shift operator)* $\cdot^\sigma : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ přiřadí posloupnosti a posloupnost a^σ definovanou vztahem

$$a^\sigma(t) = a(t+1).$$

Obrazem posloupnosti $a \in \mathcal{P}_{t_0}$ při zobrazení $\cdot^\sigma$ je tedy posloupnost $a^\sigma \in \mathcal{P}_{t_0-1}$, obrazem posloupnosti $a \in \mathcal{P}_{-\infty}$ je posloupnost $a^\sigma \in \mathcal{P}_{-\infty}$.

Věta 3. *Operátor posunu $\cdot^\sigma$ je bijekce. Zúžení $\cdot^\sigma$ na množinu $\mathcal{P}_\tau$, kde $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ je lineární.*

Důkaz: Nechť $b \in \mathcal{P}$ je libovolná posloupnost. Definujme posloupnost $a \in \mathcal{P}$ tak, že pro každé $t \in \operatorname{Dom} b$ položíme $a(t) = b(t-1)$. Pak je $a^\sigma(t) = a(t+1) = b(t+1-1) = b(t)$, tedy $b = a^\sigma$. Zobrazení $\cdot^\sigma$ je tedy surjektivní.

Nechť posloupnosti $a, b \in \mathcal{P}$ jsou různé. Pokud $\operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$, existuje nějaká hodnota $t_1 \in \operatorname{Dom} a$ taková, že $a(t_1) \neq b(t_1)$; odtud plyne, že $a^\sigma(t_1 - 1) = a(t_1) \neq b(t_1) = b^\sigma(t_1 - 1)$, tedy $a^\sigma \neq b^\sigma$. Pokud $\operatorname{Dom} a \neq \operatorname{Dom} b$, pak podle Definice 10 je také $\operatorname{Dom} a^\sigma \neq \operatorname{Dom} b^\sigma$ a opět $a^\sigma \neq b^\sigma$. Zobrazení $\cdot^\sigma$ je tedy injektivní (prosté).

Pro všechny posloupnosti $a, b \in \mathcal{P}$ takové, že $\operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$, pro všechna reálná čísla α, β a každé celé číslo $t \in \operatorname{Dom} a$ platí

$$(\alpha a + \beta b)^\sigma(t) = (\alpha a + \beta b)(t+1) = \alpha a(t+1) + \beta b(t+1) = \alpha a^\sigma(t) + \beta b^\sigma(t),$$

takže zobrazení $\cdot^\sigma$ je lineární. □

1.2.2 Diference

Definice 11. *Operátor (první) diference (vpřed)* $\Delta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ přiřadí posloupnosti $a \in \mathcal{P}$ posloupnost $\Delta a \in \mathcal{P}$ definovanou vztahem

$$\Delta a(t) = a(t+1) - a(t).$$

Je-li $a \in \mathcal{P}_\tau$, pak také $\Delta a \in \mathcal{P}_\tau$ pro libovolné $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Z definice operátorů diference a posunu plyne, že

$$\Delta a = a^\sigma - a, \qquad a^\sigma = a + \Delta a, \tag{1.18}$$

nebo stručněji $\Delta = \cdot^\sigma - \mathrm{id}_\mathcal{P}$, $\cdot^\sigma = \Delta + \mathrm{id}_\mathcal{P}$.

Operátory posunu a diference komutují na prostoru posloupností, tj. pro každou posloupnost $a \in \mathcal{P}$ platí

$$(\Delta a)^\sigma = \Delta\left(a^\sigma\right).$$

Pro libovolný index $t \in \operatorname{Dom} a$ totiž platí

$$(\Delta a)^\sigma(t) = (\Delta a)(t+1) = a(t+2) - a(t+1) = a^\sigma(t+1) - a^\sigma(t) = \Delta\left(a^\sigma\right)(t).$$

Věta 4. *Operátor diference Δ je surjektivní zobrazení, které není prosté. Zúžení Δ na množinu $\mathcal{P}_\tau$, kde $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, je lineární a jeho jádrem je množina stacionárních posloupností.*

Důkaz: Buď $a \in \mathcal{P}$ libovolná posloupnost, $t_0 \in \operatorname{Dom} a$. Pro každé $t \in \operatorname{Dom} a$ položíme

$$s(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i).$$

Pak podle Tvrzení 7 platí

$$\Delta s(t) = \sum_{i=t_0}^{t} a(i) - \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i) = a(t),$$

což znamená, že posloupnost a je obrazem posloupnosti s při zobrazení Δ.

Nechť $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $a \in \mathcal{P}$ je libovolná posloupnost. Pro každé $t \in \operatorname{Dom} a$ položme $b(t) = a(t) + c$. Pak $b \in \mathcal{P}$ a $b \neq a$. Avšak pro libovolné $t \in \operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$ platí

$$\Delta b(t) = b(t+1) - b(t) = \big(a(t+1) + c\big) - \big(a(t) + c\big) = a(t+1) - a(t) = \Delta a(t),$$

tedy $\Delta a = \Delta b$.

Nechť $a, b \in \mathcal{P}_\tau$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha a + \beta b)(t) &= (\alpha a + \beta b)(t+1) - (\alpha a + \beta b)(t) = \\ &= \alpha\big(a(t+1) - a(t)\big) + \beta\big(b(t+1) - b(t)\big) = \alpha\Delta a(t) + \beta\Delta b(t).\end{aligned}$$

Nechť $a \in \mathcal{P}_\tau$, $a \equiv \alpha$. Pak $\Delta a(t) = \alpha - \alpha = 0$, tedy $a \in \ker \Delta|_{\mathcal{P}_\tau}$.

Nechť $b \in \ker \Delta|_{\mathcal{P}_\tau}$, tedy $\Delta b \equiv 0$. Pak pro každé $t \in \operatorname{Dom} b$ platí $0 = \Delta b(t) = b(t+1) - b(t)$, tedy pro všechna $t \in \operatorname{Dom} b$ je $b(t) = b(t+1)$, takže posloupnost b je stacionární. □

Poznámka 5. Z důkazu první části Věty 4 plyne

$$\Delta \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i) = a(t) \tag{1.19}$$

pro libovolnou posloupnost $a \in \mathcal{P}$ a indexy $t, t_0 \in \operatorname{Dom} a$.

Druhou část věty 4 lze přeformulovat: Pro libovolné posloupnosti a, b se stejným definičním oborem a pro každé reálné číslo α platí

$$\Delta(\alpha a) = \alpha\Delta a, \quad \Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b, \tag{1.20}$$

$\Delta a = o$ právě tehdy, když posloupnost a je stacionární.

Z rovností (1.20) bezprostředně plyne

$$\Delta(a - b) = \Delta a - \Delta b.$$

Máme tedy formule pro diferenci součtu a rozdílu posloupností.

Věta 5 (Diference součinu a podílu posloupností)**.** *Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ a $a, b \in \mathcal{P}_\tau$. Pak platí*

$$\Delta ab = b\Delta a + a^\sigma \Delta b = b^\sigma \Delta a + a\Delta b = \frac{b + b^\sigma}{2}\Delta a + \frac{a + a^\sigma}{2}\Delta b. \tag{1.21}$$

Pokud $b(t) \neq 0$ pro každý index $t \in \operatorname{Dom} b$, pak platí

$$\Delta \frac{1}{b} = -\frac{\Delta b}{bb^\sigma}, \tag{1.22}$$

$$\Delta \frac{a}{b} = \frac{a^\sigma b - ab^\sigma}{bb^\sigma} = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{bb^\sigma} = \frac{b^\sigma \Delta a - a^\sigma \Delta b}{bb^\sigma} = \frac{(b + b^\sigma)\Delta a - (a + a^\sigma)\Delta b}{2bb^\sigma}. \tag{1.23}$$

Důkaz: První rovnost v (1.21) plyne z výpočtu

$$\begin{aligned}\big(\Delta ab\big)(t) &= a(t+1)b(t+1) - a(t)b(t) = \\ &= a(t+1)b(t+1) - a(t+1)b(t) + a(t+1)b(t) - a(t)b(t) = \\ &= a(t+1)\big(b(t+1) - b(t)\big) + b(t)\big(a(t+1) - a(t)\big),\end{aligned}$$

druhá z výpočtu

$$\begin{aligned}\big(\Delta ab\big)(t) &= a(t+1)b(t+1) - a(t)b(t) = \\ &= a(t+1)b(t+1) - a(t)b(t+1) + a(t)b(t+1) - a(t)b(t) = \\ &= \big(a(t+1) - a(t)\big)b(t+1) + a(t)\big(b(t+1) - b(t)\big)\end{aligned}$$

a třetí je důsledkem prvních dvou.

Nechť všechny členy posloupnosti b jsou nenulové. Pak

$$\left(\Delta \frac{a}{b}\right)(t) = \frac{a(t+1)}{b(t+1)} - \frac{a(t)}{b(t)} = \frac{a(t+1)b(t) - a(t)b(t+1)}{b(t+1)b(t)},$$

což je první rovnost (1.23). Z ní plyne rovnost (1.22); z té a z rovností (1.21) plynou zbývající rovnosti (1.23). □

1.2.3 Sumace

Definice 12. Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ a $t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 \geq \tau$ libovolný index. *Operátor sumace od t_0* $\sum_{t_0} : \mathcal{P}_\tau \to \mathcal{P}_\tau$ přiřadí posloupnosti $a \in \mathcal{P}_\tau$ posloupnost $\sum_{t_0} a$ definovanou vztahem

$$\textstyle\sum_{t_0} a(t) = \displaystyle\sum_{i=t_0}^{t-1} a(i).$$

Věta 6. *Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ a $t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 \geq \tau$ libovolný index. Operátor sumace $\sum_{t_0} : \mathcal{P}_\tau \to \mathcal{P}_\tau$ je lineární prosté zobrazení, které není surjektivní.*

Důkaz: Buďte $a, b \in \mathcal{P}_\tau$ libovolné posloupnosti a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ libovolná čísla. Pak

$$\textstyle\sum_{t_0} (\alpha a + \beta b)(t) = \displaystyle\sum_{i=t_0}^{t-1} \big(\alpha a(i) + \beta b(i)\big) = \alpha \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i) + \beta \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) = \alpha \textstyle\sum_{t_0} a(t) + \beta \sum_{t_0} b(t)$$

pro libovolný index $t \in \operatorname{Dom} a$. To znamená, že zobrazení $\sum_{t_0}$ je lineární.

Připusťme, že zobrazení $\sum_{t_0}$ není prosté, tj. existují různé posloupnosti $a, b \in \mathcal{P}_\tau$ takové, že $\sum_{t_0} a(t) = \sum_{t_0} b(t)$ pro všechna $t \in \mathbb{Z}_\tau$. Poněvadž $a \neq b$, existuje index $t_1 \in \operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$ takový, že $a(t_1) \neq b(t_1)$. To znamená, že

$$0 = \sum_{t_0} a(t_1+1) - \sum_{t_0} b(t_1+1) = \sum_{i=t_0}^{t_1} a(i) - \sum_{i=t_0}^{t_1} b(i) = \sum_{i=t_0}^{t_1-1} a(i) + a(t_1 0 - \sum_{i=t_0}^{t_1} b(i) - b(t_1) =$$
$$= \sum_{t_0} a(t_1) + a(t_1) - \sum_{t_0} b(t_1) - b(t_1) = a(t_1) - b(t_1) \neq 0,$$

což je spor.

Pro libovolnou posloupnost $a \in \mathcal{P}_\tau$ platí $\sum_{t_0} a(t_0) = \sum\limits_{i=t_0}^{t_0-1} a(i) = 0$, takže posloupnost $b \in \mathcal{P}_\tau$ taková, že $b(t_0) \neq 0$ není obrazem žádné posloupnosti $a \in \mathcal{P}_\tau$ při zobrazení $\sum_{t_0}$. $\square$

Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ a $t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 \geq \tau$ libovolný index. Pak platí

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta a(i) = \sum_{i=t_0}^{t-1} \big(a(i+1) - a(i)\big) = \sum_{i=t_0+1}^{t} a(i) - \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i) = a(t) - a(t_0),$$

stručně

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta a(i) = a(t) - a(t_0), \tag{1.24}$$

Rovnosti (1.19) a (1.24) můžeme bezprostředně přepsat na tvar

$$\Delta \sum\nolimits_{t_0} a(t) = a(t), \qquad \sum\nolimits_{t_0} \Delta a(t) = [a]_{t_0}^{t}. \tag{1.25}$$

Abychom ještě zestručnili zápis, zavedeme operátor $|_{t_0} : \mathcal{P}_\tau \to \mathcal{P}_\tau$ předpisem

$$a|_{t_0}(t) = a(t) - a(t_0).$$

Operátor $|_{t_0}$ lze interpretovat jako odečtení t_0-tého členu posloupnosti. Pokud posloupnost $a \in \mathcal{P}_\tau$ je taková, že $a(t_0) \neq 0$, pak

$$a|_{t_0}(t_0) = a(t_0) - a(t_0) = 0 \neq a(t_0) = \mathrm{id}_{\mathcal{P}_\tau} a(t_0),$$

což znamená, že $\mathrm{id}_{\mathcal{P}_\tau} \neq |_{t_0}$. Porovnáním rovností (1.19) a (1.24) nyní vidíme, že

$$\Delta \sum\nolimits_{t_0} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}_\tau} \neq |_{t_0} = \sum\nolimits_{t_0} \Delta.$$

To zejména znamená, že operátory diference a sumace nejsou vzájemně inversní na množině $\mathcal{P}_\tau$.

Operátory posunu a sumace od t_0 na prostoru posloupností obecně nekomutují, tj. existuje posloupnost $a \in \mathcal{P}$ taková, že

$$\Big(\sum\nolimits_{t_0} a\Big)^\sigma \neq \sum\nolimits_{t_0} a^\sigma.$$

Tyto operátory však komutují na podprostoru $\{a \in \mathcal{P} : \, a(t_0) = 0\}$. Pro každý index $t \in \operatorname{Dom} a$ totiž platí

$$\Big(\sum\nolimits_{t_0} a\Big)^{\sigma}(t) = \sum\nolimits_{t_0} a(t+1) = \sum_{i=t_0}^{t} a(i),$$

$$\sum\nolimits_{t_0} a^{\sigma}(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} a^{\sigma}(i) = \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i+1) = \sum_{i=t_0+1}^{t} a(i).$$

Tvrzení o linearitě operátoru sumace lze přeformulovat: Pro libovolné posloupnosti a, b se stejným definičním oborem a pro každé reálné číslo α platí

$$\sum\nolimits_{t_0} \alpha a = \alpha \sum\nolimits_{t_0} a, \quad \sum\nolimits_{t_0} (a+b) = \sum\nolimits_{t_0} a + \sum\nolimits_{t_0} b.$$

Z těchto rovností bezprostředně plyne

$$\sum\nolimits_{t_0} (a-b) = \sum\nolimits_{t_0} a - \sum\nolimits_{t_0} b.$$

Máme tedy formule pro sumaci součtu a rozdílu posloupností. Jisté vyjádření sumace součinu posloupností vyjadřuje následující věta.

Věta 7 (Sumace „per partes“). *Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $a, b \in \mathcal{P}_\tau$ a $t_0 \in \operatorname{Dom} a$. Pak platí*

$$\sum\nolimits_{t_0} a \Delta b = ab|_{t_0} - \sum\nolimits_{t_0} b^{\sigma} \Delta a, \tag{1.26}$$

$$\sum\nolimits_{t_0} a^{\sigma} \Delta b = ab|_{t_0} - \sum\nolimits_{t_0} b \Delta a. \tag{1.27}$$

Důkaz: Podle (1.24) platí

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta(ab)(i) = a(t)b(t) - a(t_0)b(t_0)$$

a podle druhé z rovností (1.21) a Věty 6 platí

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta(ab)(i) = \sum_{i=t_0}^{t-1} \big(b(i+1)\Delta a(i) + a(i)\Delta b(i)\big) = \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i+1)\Delta a(i) + \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i)\Delta b(i).$$

Odtud již plyne rovnost (1.26). Rovnost (1.27) odvodíme analogicky s využitím první z rovností (1.21). □

1.2.4 Diference a posun vyššího řádu

Operátory $\cdot^{\sigma}$, Δ a $\sum_{t_0}$ jakožto zobrazení z množiny $\mathcal{P}$ do sebe můžeme skládat. Složený operátor $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$, tj. operátor, který posloupnosti a přiřadí posloupnost definovanou vztahem

$$\Delta^2 a(t) = \Delta\big(\Delta a(t)\big) = \Delta a(t+1) - \Delta a(t) = \big(a(t+2) - a(t+1)\big) - \big(a(t+1) - a(t)\big) = \\ = a(t+2) - 2a(t+1) + a(t)$$

nazýváme *druhá diference (vpřed)*. Obecně pro $n \in Z$, $n > 1$ klademe $\Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$ a tento operátor nazýváme *n-tá diference (vpřed)*. Pro $n = 0$ můžeme psát $\Delta^0 a(t) = a(t)$, tj. $\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

Složený operátor $\cdot^{\sigma^2} = \cdot^\sigma \circ \cdot^\sigma$ přiřadí posloupnosti a posloupnost definovanou vztahem $a^{\sigma^2}(t) = a(t+2)$. Obecně pro $n \in Z$, $n > 1$ klademe $\cdot^{\sigma^n} = \cdot^\sigma \circ \cdot^{\sigma^{n-1}}$, tedy $a^{\sigma^n}(t) = a(t+n)$, a $a^{\sigma^0}(t) = a(t+0) = a(t)$, tj. $\cdot^{\sigma^0} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

Tvrzení 8. Buď $a \in \mathcal{P}$ libovolná posloupnost, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\Delta^n a(t) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a(t+n-i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a^{\sigma^{n-i}}(t),$$

$$a^{\sigma^n}(t) = a(t+n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i a(t).$$

Důkaz: Úplnou indukcí.

$$\Delta^0 a(t) = a(t) = (-1)^0 \binom{0}{0} a(t+0-0).$$

$$\Delta^1 a(t) = \Delta a(t) = a(t+1) - a(t) = (-1)^0 \binom{1}{0} a(t+1-0) + (-1)^1 \binom{1}{1} a(t+1-1).$$

Indukční krok pro první formuli:

$$\begin{aligned}
\Delta^n a(t) &= \Delta\left(\Delta^{n-1} a(t)\right) = \Delta\left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-1-i)\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-i) - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-1-i) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-i) - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n-1}{i-1} a(t+n-i) = \\
&= a(t+n) + \sum_{i=1}^{n-1} \left((-1)^i \binom{n-1}{i} - (-1)^{i-1} \binom{n-1}{i-1}\right) a(t+n-i) - (-1)^{n-1} a(t) = \\
&= a(t+n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right) a(t+n-i) + (-1)^n a(t) = \\
&= a(t+n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} a(t+n-i) + (-1)^n a(t).
\end{aligned}$$

Indukční krok pro druhou formuli:

$$\begin{aligned}
a(t+n) = \Delta a(t+n-1) + a(t+n-1) = \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) = \\
= \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + a(t) = \\
= \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i+1} \Delta^{i+1} a(t) + a(t) = \\
= \Delta \left(\Delta^{n-1} a(t) + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i+1} \right) \Delta^i a(t) \right) + a(t) = \\
= \Delta^n a(t) + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i+1} \Delta^{i+1} a(t) + a(t) = \Delta^n a(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \Delta^i a(t) + a(t).
\end{aligned}$$

□

Poznámka 6. Tvrzení Věty 8 můžeme zapsat v operátorovém tvaru

$$\Delta^n = (\cdot^\sigma - \mathrm{id}_\mathcal{P})^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \cdot^{\sigma^{n-i}}, \qquad \cdot^{\sigma^n} = (\Delta + \mathrm{id}_\mathcal{P})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i.$$

Poznámka 7. Poněvadž složení lineárních zobrazení dává lineární zobrazení, je n-tá diference lineární zobrazení množiny posloupností $\mathcal{P}_\tau$ na sebe pro libovolné $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

1.3 Diferenční a sumační počet

Následující tři věty plynou přímo z Definic 3, 4 a 11.

Věta 8. *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a nechť celá čísla m, n splňují podmínky $m \in \mathrm{Dom}\, a$, $n > m$. Pak platí*

- *a je rostoucí na intervalu $[m, n]$ právě tehdy, když pro každý index $t \in [m, n)$ platí nerovnost $\Delta a(t) \geq 0$, tj.*
$$(\forall t) t \in [m, n) \;\Rightarrow\; \Delta a(t) \geq 0;$$
- *a je ryze rostoucí na intervalu $[m, n]$ právě tehdy, když*
$$(\forall t) t \in [m, n) \;\Rightarrow\; \Delta a(t) > 0;$$
- *a je klesající na intervalu $[m.n]$ právě tehdy, když*
$$(\forall t) t \in [m, n) \;\Rightarrow\; \Delta a(t) \leq 0;$$
- *a je ryze klesající na intervalu $[m, n]$ právě tehdy, když*
$$(\forall t) t \in [m, n) \;\Rightarrow\; \Delta a(t) < 0;$$

- *a je monotonní na intervalu $[m, n]$ právě tehdy, když posloupnost Δa na intervalu $[m, n)$ nemění znaménko, tj.*

$$(\forall t) t \in [m, n-1) \ \Rightarrow \ \Delta a(t) \Delta a(t+1) \geq 0;$$

- *a je ryze monotonní na intervalu $[m, n]$ právě tehdy, když mezi indexy $t \in [m, n)$ není uzel posloupnosti Δa, tj.*

$$(\forall t) t \in [m, n-1) \ \Rightarrow \ \Delta a(t) \Delta a(t+1) > 0.$$

Věta 9. *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a $t \in \operatorname{Dom} a$. Pak platí*

- *t je argumentem ostrého lokálního maxima právě tehdy, když $\Delta a(t) < 0$ a pokud t není počáteční index, pak $\Delta a(t-1) > 0$, tj.*

$$\Delta a(t) < 0 \ \wedge \ \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \ \Rightarrow \ \Delta a(t-1) > 0\big).$$

- *t je argumentem lokálního maxima právě tehdy, když*

$$\Delta a(t) \leq 0 \ \wedge \ \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \ \Rightarrow \ \Delta a(t-1) \geq 0\big).$$

- *t je argumentem ostrého lokálního minima právě tehdy, když*

$$\Delta a(t) > 0 \ \wedge \ \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \ \Rightarrow \ \Delta a(t-1) < 0\big).$$

- *t je argumentem lokálního minima právě tehdy, když*

$$\Delta a(t) \geq 0 \ \wedge \ \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \ \Rightarrow \ \Delta a(t-1) \leq 0\big).$$

Věta 10. *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost, index $t \in \operatorname{Dom} a$ není počáteční a $t-1$ je uzlem posloupnosti Δa. Pak index t je argumentem lokálního extrému. V případě $\Delta^2 a(t-1) \leq 0$ se jedná se o maximum, v případě $\Delta^2 a(t-1) \geq 0$ se jedná se o minimum. Pokud je přitom $\Delta a(t-1) \neq 0$, pak je tento extrém ostrý.*

Věta 11 (Rolleova)**.** *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a $t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a$ jsou takové indexy, že $t_1 < t_2$ a $a(t_1) = a(t_2)$. Pak existuje index $s \in [t_1, t_2 - 1]$, který je uzlem posloupnosti Δa.*

Důkaz: Kdyby žádný index z intervalu $[t_1, t_2 - 1]$ nebyl uzlem, posloupnost a by podle Věty 8 byla ryze monotonní na intervalu $[t_1, t_2 + 1]$ a proto by nemohlo platit $a(t_1) = a(t_2)$. □

Věta 12 (Lagrangeova o střední hodnotě)**.** *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a $t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a$ jsou takové indexy, že $t_1 < t_2 - 1$. Pak existuje index $s \in [t_1 + 1, t_2 - 1]$ takový, že platí aspoň jedna z dvojic nerovností*

$$\Delta a(s) \leq \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \Delta a(s-1), \qquad \Delta a(s-1) \leq \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \Delta a(s).$$

Důkaz: Položme

$$b(t) = a(t) - \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1}(t - t_1).$$

Pak $b(t_1) = a(t_1)$, $b(t_2) = a(t_2) - \big(a(t_2) - a(t_1)\big) = a(t_1)$, což znamená. že posloupnost b splňuje předpoklady Rolleovy věty. Existuje tedy $c \in [t_1, t_2 - 1]$ takový index, že $\Delta b(c) = 0$ nebo $\Delta b(c)\Delta b(c+1) < 0$. Položme $s = c + 1$. Pak je $s \in [t_1 + 1, t_1 - 1]$ a platí

$$\Delta b(s-1) = 0 \quad \text{nebo} \quad \Delta b(s-1)\Delta b(s) < 0.$$

Dále podle Věty 4 je

$$\Delta b(t) = \Delta a(t) - \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1}$$

pro každý index $t \in \operatorname{Dom} a$, takže

$$\Delta a(s-1) - \Delta b(s-1) = \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} = \Delta a(s) - \Delta b(s).$$

Pokud $\Delta b(s-1) = 0$, pak

$$\Delta a(s-1) = \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} \le \Delta a(s) \quad \text{nebo} \quad \Delta a(s) \le \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} = \Delta a(s-1).$$

Pokud $\Delta b(s-1)\Delta b(s) < 0$, pak v případě $\Delta b(s-1) > 0$, $\Delta b(s) < 0$ je

$$\Delta a(s) < \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} < \Delta a(s-1),$$

a v případě $\Delta b(s-1) < 0$, $\Delta b(s) > 0$ je

$$\Delta a(s-1) < \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} < \Delta a(s).$$

□

Věta 13 (de l'Hôpitalovo pravidlo, Stolzova-Cesàrova věta)**.** *Buďte $a, b \in \mathcal{P}$ posloupnosti a nechť je posloupnost b od jistého indexu ryze monotonní, tj.*

$$(\exists \tau \in \operatorname{Dom} b)(\forall t \in \operatorname{Dom} b)\ t \ge \tau \ \Rightarrow\ \operatorname{sgn} \Delta b(t) = \operatorname{sgn} \Delta b(\tau) \ne 0.$$

Jestliže $\left|\lim\limits_{t\to\infty} b(t)\right| = \infty$ a existuje limita $\lim \dfrac{\Delta a}{\Delta b}$, pak existuje také limita $\lim \dfrac{a}{b}$ a platí

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}. \tag{1.28}$$

Jestliže $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = 0 = \lim\limits_{t\to\infty} b(t)$ pak platí

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}. \tag{1.29}$$

Zejména pokud existuje limita $\lim \dfrac{\Delta a}{\Delta b}$, pak existuje také limita $\lim \dfrac{a}{b}$ a opět platí rovnost (1.28)*.*

Důkaz: Nechť pro určitost $\Delta b(t) < 0$ pro $t \geq \tau$. V případě ryze rostoucí posloupnosti b bychom postupovali analogicky.

Nechť $\left|\lim_{t\to\infty} b(t)\right| = \infty$. Poněvadž posloupnost b je klesající, musí být $\lim_{t\to\infty} b(t) = -\infty$ podle Věty 2 a tedy od jistého indexu ϱ jsou všechny členy posloupnosti b záporné

$$b(t) < 0 \text{ pro každý index } t \geq \varrho.$$

Nechť $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = c \in \mathbb{R}$. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje index σ takový, že

$$c - \varepsilon < \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} < c + \varepsilon$$

pro všechny indexy $t \geq \sigma$. Pro $t \geq \max\{\sigma, \tau\}$ tedy platí

$$(c-\varepsilon)\Delta b(t) > \Delta a(t) > (c+\varepsilon)\Delta b(t).$$

Vezmeme libovolné indexy $t_1 \geq \max\{\tau, \sigma, \varrho\}$, $t_2 > t_1$ a sečteme předchozí rovnosti od t_1 do $t_2 - 1$. Podle (1.24) dostaneme

$$(c-\varepsilon)\big(b(t_2) - b(t_1)\big) > a(t_2) - a(t_1) > (c+\varepsilon)\big(b(t_2) - b(t_1)\big).$$

Tyto nerovnosti upravíme na tvar

$$(c-\varepsilon)\left(1 - \frac{b(t_1)}{b(t_2)}\right) + \frac{a(t_1)}{b(t_2)} < \frac{a(t_2)}{b(t_2)} < (c+\varepsilon)\left(1 - \frac{b(t_1)}{b(t_2)}\right) + \frac{a(t_1)}{b(t_2)}.$$

Limitním přechodem $t_2 \to \infty$ nyní dostaneme nerovnosti

$$c - \varepsilon \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq c + \varepsilon.$$

Poněvadž kladné číslo ε bylo libovolné, platí

$$c \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq c,$$

což znamená, že ve všech nerovnostech nastane rovnost a tedy $\lim_{t\to\infty} \dfrac{a(t)}{b(t)} = c$.

Pokud $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = -\infty$, pak pro libovolné $h \in \mathbb{R}$ existuje index σ takový, že

$$\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} < h$$

pro všechny indexy $t \geq \sigma$. Nyní můžeme zopakovat předchozí úvahy s tím, že budeme používat pouze „pravou část“ nerovností, v nichž místo $c + \varepsilon$ budeme psát h. Dostaneme

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq h,$$

což vzhledem k tomu, že číslo h bylo libovolné, znamená, že $\lim_{t\to\infty} \dfrac{a(t)}{b(t)} = -\infty$.

Pokud $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = \infty$, provedeme důkaz analogicky.

Nechť nyní $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = 0 = \lim\limits_{t\to\infty} b(t)$. Poněvadž pro $t \geq \tau$ platí $\Delta b(t) < 0$, podle Věty 8 je posloupnost b na intervalu $[\tau, \infty)$ klesající a poněvadž $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = 0$, platí $b(t) > 0$ pro každý index $t \geq \tau$.

Prostřední nerovnost v (1.29) je triviální. Pokud $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = -\infty$, je triviální i první nerovnost. Nechť tedy

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = c \in \mathbb{R},$$

tj. existuje index σ takový, že pro libovolné kladné číslo ε a pro všechny indexy $t \geq \sigma$ platí

$$\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} \geq c - \varepsilon.$$

Pro všechny indexy $t \geq \max\{\tau, \sigma\}$ tedy máme nerovnost

$$\Delta a(t) \leq (c - \varepsilon)\Delta b(t).$$

Nechť t_1, t_2 jsou libovolné indexy takové, že $t_2 > t_1 \geq \max\{\tau, \sigma\}$. Sečtením předchozích nerovností od t_1 do t_2 dostaneme podle (1.24) nerovnost

$$a(t_2) - a(t_1) \leq (c - \varepsilon)\big(b(t_2) - b(t_1)\big)$$

ze které limitním přechodem $t_2 \to \infty$ plyne

$$a(t_1) \geq (c - \varepsilon)b(t_1).$$

Poněvadž index $t_1 \geq \max\{\tau, \sigma\}$ byl libovolný, pro každý index index $t \geq \max\{\tau, \sigma\}$ platí

$$\frac{a(t)}{b(t)} \geq c - \varepsilon,$$

což znamená, že $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{a(t)}{b(t)} \geq c + \varepsilon$. Poněvadž kladné číslo ε bylo libovolné, platí první nerovnost v (1.29).

Poslední nerovnost v (1.29) dokážeme analogicky. $\square$

Poznámka 8. Předpoklad o ryzí monotonnosti posloupnosti b je podstatný. Uvažujme například posloupnosti a, b definované na $\mathbb{Z}_1$ vztahy

$$a(t) = t, \quad b(t) = \left(1 + (-1)^t\right) t^2 + \left(1 - (-1)^t\right) t = \begin{cases} 2t^2, & t \text{ sudé}, \\ 2t, & t \text{ liché}. \end{cases}$$

Pak je $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = \infty$, $\Delta a(t) = (t+1) - t = 1$ a

$$\begin{aligned}\Delta b(t) = \left(1 + (-1)^{t+1}\right)(t+1)^2 + \left(1 - (-1)^{t+1}\right)(t+1) - \left(1 + (-1)^t\right) t^2 - \left(1 - (-1)^t\right) t = \\ = 2\left((-1)^{t+1} t^2 + t + 1\right),\end{aligned}$$

takže

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\big((-1)^{t+1}t^2 + t + 1\big)} = 0,$$

avšak

$$\frac{a(t)}{b(t)} = \frac{1}{\big(1 + (-1)^t\big)t + 1 - (-1)^t} = \begin{cases} \dfrac{1}{2t}, & t \text{ sudé}, \\ \frac{1}{2}, & t \text{ liché}, \end{cases}$$

což znamená, že

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} = 0 < \frac{1}{2} = \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)}$$

a limita podílu posloupností a, b neexistuje.

Pro případ limity typu $\frac{0}{0}$ uvažujme posloupnosti a, b definované na $\mathbb{Z}_1$ vztahy

$$a(t) = \frac{1}{t}, \qquad b(t) = \frac{(-1)^t}{t}.$$

Pak

$$\Delta a(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t} = \frac{t - (t+1)}{t(t+1)} = \frac{-1}{t(t+1)},$$

$$\Delta b(t) = (-1)^{t+1}\frac{1}{t+1} - (-1)^t\frac{1}{t} = (-1)^{t+1}\frac{t + (t+1)}{t(t+1)} = (-1)^{t+1}\frac{2t+1}{t(t+1)},$$

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} b(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{(-1)^t}{t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{(-1)^t}{2t+1} = 0$$

avšak limita posloupnosti $\dfrac{a(t)}{b(t)} = (-1)^t$ neexistuje.

Věta 14 (o střední hodnotě sumačního počtu)**.** *Buďte a, b posloupnosti a nechť existují celá čísla m, n taková, že $m < n$, $m \in \operatorname{Dom} a \cap \operatorname{Dom} b$ a pro každý index $t \in [m, n]$ je $b(t) \geq 0$. Pak ke každé dvojici indexů $t_0, t_1 \in [m, n]$ existuje číslo c takové, že*

$$\min\{a(t) : m \leq t \leq n\} \leq c \leq \max\{a(t) : m \leq t \leq n\} \quad a \quad \sum_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i) = c\sum_{i=t_0}^{t_1} b(i).$$

Důkaz: Označme $\alpha = \min\{a(t) : m \leq t \leq n\}$, $A = \max\{a(t) : m \leq t \leq n\}$.

Je-li $t_1 \geq t_0$, pak

$$\alpha\sum_{i=t_0}^{t_1} b(i) \leq \sum_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i) \leq A\sum_{i=t_0}^{t_1} b(i),$$

je-li $t_1 < t_0 - 1$, pak

$$\alpha\sum_{i=t_0}^{t_1} b(i) = -\alpha\sum_{i=t_1+1}^{t_0-1} b(i) \geq -\sum_{i=t_1+1}^{t_0-1} a(i)b(i) \geq -A\sum_{i=t_1+1}^{t_0-1} b(i) = A\sum_{i=t_0}^{t_1} b(i),$$

je-li $t_1 = t_0 - 1$, pak

$$0 = \sum_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i) = \sum_{i=t_0}^{t_1} b(i).$$

Odtud plyne, že v každém případě, kdy $\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} b(i) = 0$, je také $\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i) = 0$ a za číslo c lze vzít libovolné číslo z intervalu $[\alpha, A]$.

Je-li $\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i) \neq 0$, pak v případě $t_1 \geq t_0$ je

$$\alpha = \frac{\alpha \sum\limits_{i=t_0}^{t_1} b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} \leq \frac{\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} \leq \frac{A \sum\limits_{i=t_0}^{t_1} b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} = A,$$

a v případě $t_1 < t_0 - 1$ je také

$$\alpha = \frac{\alpha \sum\limits_{i=t_0}^{t_1} b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} = \frac{\alpha \sum\limits_{i=t_0}^{t_1} b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} \frac{\alpha \sum\limits_{i=t_1+1}^{t_0-1} b(i)}{\sum\limits_{j=t_1+1}^{t_0-1} b(j)} \leq \frac{\sum\limits_{i=t_1+1}^{t_0-1} a(i)b(i)}{\sum\limits_{j=t_1+1}^{t_0-1} b(j)} = \frac{\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} \leq A.$$

Stačí tedy položit

$$c = \frac{\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} = \sum_{i=t_0}^{t_1} a(i) \frac{b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)}.$$

□

1.3.1 Diference a sumy některých posloupností

- $\Delta\alpha^t = (\alpha - 1)\alpha^t, \quad \sum_{t_0} \alpha^t = \dfrac{\alpha^{t_0}\left(\alpha^{t-t_0} - 1\right)}{\alpha - 1}$ pro $\alpha \neq 1$;

  zejména $\Delta 2^t = 2^t, \quad \sum_0 2^t = 2^t - 1.$

  Důkaz: $\Delta\alpha^t = \alpha^{t+1} - \alpha^t = \alpha^t\,(\alpha - 1)$,
  $\sum_{t_0} \alpha^t = \dfrac{1}{\alpha - 1} \sum_{t_0} (\alpha - 1)\alpha^t = \dfrac{1}{\alpha - 1} \sum_{t_0} \Delta\alpha^t = \dfrac{1}{\alpha - 1} \alpha^t|_{t_0} = \dfrac{\alpha^t - \alpha^{t_0}}{\alpha - 1}.$ □

- $\Delta\kappa^t \cos t\varphi = \kappa^t(\kappa \cos\varphi - 1)\cos t\varphi - \kappa^{t+1} \sin t\varphi \sin\varphi,$

  $\Delta\kappa^t \sin t\varphi = \kappa^t(\kappa \cos\varphi - 1)\sin t\varphi + \kappa^{t+1} \cos t\varphi \cos\varphi,$

  $\sum_{t_0} \kappa^t \cos t\varphi = \dfrac{\kappa^{t+1}\cos(t-1)\varphi - \kappa^{t_0+1}\cos(t_0 - 1)\varphi - \kappa^t \cos t\varphi + \kappa^{t_0}\cos t_0\varphi}{\kappa^2 - 2\kappa\cos\varphi + 1},$

  $\sum_{t_0} \kappa^t \sin t\varphi = \dfrac{\kappa^{t+1}\sin(t-1)\varphi - \kappa^{t_0+1}\sin(t_0 - 1)\varphi - \kappa^t \sin t\varphi + \kappa^{t_0}\sin t_0\varphi}{\kappa^2 - 2\kappa\cos\varphi + 1},$

  Důkaz:
  $\Delta\kappa^t \cos t\varphi = \kappa^{t+1} \cos t + 1\varphi - \kappa^t \cos t\varphi = \kappa^{t+1}\left(\cos t\varphi \cos\varphi - \sin t\varphi \sin\varphi\right) - \kappa^t \cos t\varphi,$

$\Delta\kappa^t \sin t\varphi = \kappa^{t+1} \sin t+1\varphi - \kappa^t \sin t\varphi = \kappa^{t+1} (\sin t\varphi \cos\varphi + \cos t\varphi \sin\varphi) - \kappa^t \sin t\varphi,$

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_{t_0} \kappa^t(\cos t\varphi + \mathrm{i}\sin t\varphi) &= \sum\nolimits_{t_0} \left(\kappa \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^t = \left(\kappa \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^{t_0} \frac{\left(\kappa \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^{t-t_0} - 1}{\kappa \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 1} = \\
&= \left(\kappa \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^{t_0} \frac{\left(\left(\kappa \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^{t-t_0} - 1\right)\left(\kappa^{-\mathrm{i}\varphi} - 1\right)}{\left(\kappa \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 1\right)\left(\kappa^{-\mathrm{i}\varphi} - 1\right)} = \frac{\left(\left(\kappa \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^t - \left(\kappa \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^{t_0}\right)\left(\kappa^{-\mathrm{i}\varphi} - 1\right)}{\kappa^2 - \kappa \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} - \kappa \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + 1} = \\
&= \frac{\left(\kappa^t(\cos t\varphi + \mathrm{i}\sin t\varphi) - \kappa^{t_0}(\cos t_0\varphi + \mathrm{i}\sin t_0\varphi)\right)\left(\kappa(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi) - 1\right)}{\kappa^2 - \kappa\left((\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi) + (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\right) + 1} = \\
&= \frac{\left(\kappa^t \cos t\varphi - \kappa^{t_0}\cos t_0\varphi + \mathrm{i}(\kappa^t \sin t\varphi - \kappa^{t_0}\sin t_0\varphi)\right)\left(\kappa\cos\varphi - 1 - \mathrm{i}\kappa\sin\varphi\right)}{\kappa^2 - 2\kappa\cos\varphi + 1} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\kappa^t \cos t\varphi - \kappa^{t_0}\cos t_0\varphi)(\kappa\cos\varphi - 1) + (\kappa^t \sin t\varphi - \kappa^{t_0}\sin t_0\varphi)\kappa\sin\varphi}{\kappa^2 - 2\kappa\cos\varphi + 1} + \\
&\qquad + \mathrm{i}\,\frac{-(\kappa^t \sin t\varphi - \kappa^{t_0}\sin t_0\varphi)\kappa\sin\varphi + (\kappa^t \cos t\varphi - \kappa^{t_0}\cos t_0\varphi)(\kappa\cos\varphi - 1)}{\kappa^2 - 2\kappa\cos\varphi + 1},
\end{aligned}$$

a formule pro sumy jsou reálnou a imaginární částí tohoto výrazu. □

- $\Delta t = 1, \quad \sum_{t_0} 1 = t - t_0, \quad \sum_{t_0} t = \frac{1}{2}(t - 1 + t_0)(t - t_0);$

  zejména $\sum_1 t = 1 + 2 + 3 + \cdots + (t-1) = \frac{1}{2}t(t-1)$.

  Důkaz: $\Delta t = (t+1) - t = 1$.
  $\sum_{t_0} 1 = \sum_{t_0} \Delta t = t|_{t_0} = t - t_0$.
  V následujícím výpočtu využijeme sumaci „per partes“.
  $\sum_{t_0} t = \sum_{t_0} t\Delta t = t^2|_{t_0} - \sum_{t_0}(t+1)\Delta t = t^2 - t_0^2 - \sum_{t_0} t - \sum_{t_0} 1 = t^2 - t_0^2 - (t - t_0) - \sum_{t_0} t$
  a odtud plyne $2\sum_{t_0} t = t^2 - t_0^2 - (t - t_0) = (t - t_0)(t + t_0 - 1)$. □

- Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

  $\Delta t^n = \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n}{i} t^{n-i},$

  $\sum_{t_0} t^n = \dfrac{1}{n+1}\left[(t - t_0)\left((t-1)\sum\limits_{i=0}^{n-1} t^{n-1-i} t_0^i + t_0^n\right) - \sum\limits_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i+1}\sum_{t_0} t^{n-i}\right],$

  zejména $\sum_1 t^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + (t-1)^2 = \frac{1}{6}t(t-1)(2t-1)$.

Důkaz: $\Delta t^n = (t+1)^n - t = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^{n-i} - t^n = t^n + \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n}{i} t^{n-i} - t^n.$

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{t_0} t^n = \sum\nolimits_{t_0} t^n \Delta t = t^{n+1}|_{t_0} - \sum\nolimits_{t_0} (t+1)\Delta t^n = \\ = t^{n+1} - t_0^{n+1} - \sum\nolimits_{t_0} t\Delta t^n - \sum\nolimits_{t_0} \Delta t^n = \\ = t^{n+1} - t_0^{n+1} - t^n|_{t_0} - \sum\nolimits_{t_0} t \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} t^{n-i} = \\ = t^{n+1} - t_0^{n+1} - t^n - t_0^n - \sum\nolimits_{t_0} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} t^{n-i+1} = \\ = (t-t_0)\sum_{i=0}^{n} t^{n-i} t_0^i - (t-t_0)\sum_{i=0}^{n-1} t^{n-1-i} t_0^i - \sum\nolimits_{t_0} \left(nt^n + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} t^{n-i+1} \right) = \\ = (t-t_0)\left(\sum_{i=0}^{n-1} t^{n-i-1}(t-1)t_0^i + t_0^n \right) - \sum\nolimits_{t_0} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i+1} t^{n-i} - \sum\nolimits_{t_0} nt^n = \\ = (t-t_0)\left((t-1)\sum_{i=0}^{n-1} t^{n-i-1} t_0^i + t_0^n \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i+1} \sum\nolimits_{t_0} t^{n-i} - n\sum\nolimits_{t_0} t^n;\end{aligned}$$

z této rovnosti již plyne druhá dokazovaná formule.

$\sum_1 t^2 = \frac{1}{3}\left[(t-1)\big((t-1)(t+1)+1\big) - \binom{2}{2} \sum_{t_0} t \right] = \frac{1}{3}\left[(t-1)t^2 - \frac{1}{2}t(t-1) \right].$ □

- Buď $t \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \le t$. Definujme *faktoriálovou funkci* rovností

$$t^{(\nu)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)};$$

zejména pro $\nu \in \mathbb{Z}_t$ je $t^{(\nu)} = \dfrac{t!}{(t-\nu)!}$. Pak platí

$$\Delta t^{(\nu)} = \nu t^{(\nu-1)}, \qquad \sum\nolimits_{t_0} t^{(\nu)} = \frac{t^{(\nu+1)} - t_0^{(\nu+1)}}{\nu+1}.$$

Důkaz: $\Delta t^{(\nu)} = (t+1)^{(\nu)} - t^\nu = \dfrac{\Gamma(t+2)}{\Gamma(t-\nu+2)} - \dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)} =$

$$\begin{aligned}= \frac{(t+1)\Gamma(t+1)}{(t-\nu+1)\Gamma(t-\nu+1)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)} \frac{t+1-(t-\nu+1)}{t-\nu+1} = \\ = \frac{\nu\Gamma(t+1)}{(t-\nu+1)\Gamma(t-\nu+1)} = \nu\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+2)}.\end{aligned}$$

$\sum_{t_0} t^{(\nu)} = \dfrac{1}{\nu+1} \sum_{t_0} (\nu+1)t^{(\nu)} = \dfrac{1}{\nu+1} \sum_{t_0} \Delta t^{(\nu+1)} = \dfrac{1}{\nu+1} \sum_{t_0} t^{(\nu+1)}|_{t_0}.$ □

1.3.2 Přehled vzorců pro diferenci a sumaci

Tvrzení Vět 4, 6, 5, 7 a relace (1.19), (1.24) můžeme shrnout:

- $\Delta a = 0 \;\Leftrightarrow\; (\exists \gamma \in \mathbb{R}) a \equiv \gamma$
- $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$
- $\Delta(\alpha a) = \alpha \Delta a$
- $\Delta(ab) = b\Delta a + a^\sigma \Delta b = b^\sigma \Delta a + a\Delta b = \frac{1}{2}\big((b+b^\sigma)\Delta a + (a+a^\sigma)\Delta b\big)$
- $\Delta \dfrac{1}{b} = -\dfrac{\Delta b}{bb^\sigma}$
- $\Delta \dfrac{a}{b} = \dfrac{b\Delta a - a\Delta b}{bb^\sigma} = \dfrac{b^\sigma \Delta a - a^\sigma \Delta b}{bb^\sigma} = \dfrac{(b+b^\sigma)\Delta a - (a+a^\sigma)\Delta b}{2bb^\sigma}$
- $\sum_{t_0}(a+b) = \sum_{t_0} a + \sum_{t_0} b$
- $\sum_{t_0}(\alpha a) = \alpha \sum_{t_0} a$
- $\Delta \sum_{t_0} a = a$
- $\sum_{t_0} \Delta a = a|_{t_0}$
- $\sum_{t_0} a\Delta b = ab|_{t_0} - \sum_{t_0} b^\sigma \Delta a, \quad \sum_{t_0} a^\sigma \Delta b = ab|_{t_0} - \sum_{t_0} b\Delta a$

Uvedené vzorce platí pro posloupnosti $a, b \in \mathcal{P}_\tau$ se stejným definičním oborem, jejich index $t_0 \in \operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$ a číslo $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.4 Cvičení

1. Rozhodněte, zda je ohraničená posloupnost, jejíž obecný člen $a(t)$ je tvaru

   a) $1 - \left(\cos \dfrac{\pi}{t}\right)^t$, b) $\dfrac{t^t}{t!}$, c) $\sum\limits_{i=1}^{t} \dfrac{1}{t}$.

2. Rozhodněte, zda je na množině $\mathbb{Z}_1$ monotonní posloupnost, jejíž obecný člen $a(t)$ je tvaru

   a) $\dfrac{t^2+1}{t+1}$, b) $\dfrac{2^t}{t!}$, c) $t - \log t$.

3. Dokažte, že následující posloupnosti jsou konvergentní:

   a) $\dfrac{(t!)^2}{(2t)!}$, b) $\sum\limits_{i=0}^{t} \dfrac{1}{t+i}$, c) $\sum\limits_{i=0}^{t} \dfrac{1}{i!}$.

4. Vypočítejte limity posloupností

   a) $\dfrac{2t^2-t+3}{3t^2+t-5}$, b) $\dfrac{t^4+t-1}{t^3+t-1}$, c) $\dfrac{t^2-2t+3}{t^3-4t+5}$,

d) $\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{k} b_i t^i}{\sum\limits_{i=0}^{m} c_i t^i}$, $c_m \neq 0 \neq b_k$, e) $\sqrt[t]{3^{2t+1}}$, f) $\sqrt{t+1} - \sqrt{t}$.

g) $\dfrac{\sqrt[3]{t^2}}{t+1}$, h) $\dfrac{t-(-1)^t}{t}$, i) $\dfrac{3^t + (-2)^t}{3^{t+1} + (-2)^{t+1}}$,

j) $\dfrac{t!}{t^t}$, k) $\sqrt[t]{t!}$, l) $\dfrac{\alpha^t}{t!}$,

m) $\left|\dfrac{1}{t} - \dfrac{2}{t} + \dfrac{3}{t} - \cdots + \dfrac{(-1)^{t-1}t}{t}\right|$, n) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{t(t+1)}$,

o) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{8} + \cdots + \dfrac{2t-1}{2^t}$, p) $\dfrac{1}{\sqrt{t}} + \dfrac{1}{\sqrt{t+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{t+3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2t}}$,

q) tq^t, $|q| < 1$, r) $\dfrac{(t!)^2}{(2t)!}$, s) $\dfrac{1}{t^{p+1}} \sum\limits_{i=1}^{t} i^p$, $p \in \mathbb{N}$,

t) $\dfrac{1}{t^p} \sum\limits_{i=1}^{t} i^p - \dfrac{t}{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$, u) $\dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{11}{3} \cdot \dfrac{12}{5} \cdots \dfrac{t+9}{2t-1}$.

5. Najděte všechny hromadné body posloupnosti

a) $(-1)^{t+1}\left(2 + \dfrac{3}{t}\right)$, b) $1 + \frac{1}{t+1} \cos \dfrac{t\pi}{2}$, c) $\frac{1}{2}\big((a+b) + (-1)^t(a-b)\big)$,

d) $\left(\cos \dfrac{2\pi t}{3}\right)^t$, e) $\left(-1 - \dfrac{1}{t}\right)^t + \sin \dfrac{t\pi}{4}$, f) $\dfrac{1}{t} \sum\limits_{i=1}^{t} (-1)^{i-1} i$.

6. Najděte extrémní hodnotu posloupnosti na intervalu $[1, \infty)$

a) $a(t) = \dfrac{t^2}{2^t}$, b) $a(t) = t^2 - 9t - 10$, c) $a(t) = \prod\limits_{i=1}^{t} \dfrac{i+9}{2i-1}$.

Výsledky:

1. a) ano, $0 \leq a(t) \leq 2$, b) ne, $a(2t) > 2^t$, c) ne, $a(2^t) > 1 + \frac{1}{2}t$.
2. a) ryze rostoucí, b) klesající, c) ryze rostoucí,
3. klesající, zdola ohraničená nulou, b) klesající, zdola ohraničená nulou, c) rostoucí, shora ohraničená např. $1 + \frac{3}{4}$.
4. a) $\frac{2}{3}$, b) ∞, c) 0 d) $\begin{cases} 0, & k < m \\ b_k/c_m, & k = m, \\ \infty, & k > m,\ c_m b_k > 0, \\ \infty, & k > m,\ c_m b_k < 0, \end{cases}$ e) 9, f) 0, g) 0, h) 1, i) $\frac{1}{2}$, j) 0, k) ∞, l) 0,

   m) $\frac{1}{2}$, n) 1, o) 3, p) ∞, q) 0, r) 0, s) $\frac{1}{p+1}$, t) $\frac{1}{2}$, u) 0.

5. a) $-2, 2$, b) $0, 1, 2$, c) a, b, d) $0, 1$, e) $-\mathrm{e} - \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\mathrm{e} + \frac{1}{2}\sqrt{2}, \mathrm{e} - 1, \mathrm{e}, \mathrm{e} + 1$, f) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.
6. a) $a_{\max} = a(3) = \frac{9}{8}$, b) $a_{\min} = a(4) = a(5) = -30$, c) $a_{\max} = a(0) = a(10) = 512$.

Kapitola 2

Diferenční rovnice

V úvodu předchozí kapitoly jsme modelovali růst populace v omezeném prostředí. Dospěli jsme ke třem různým modelům (1.14), (1.16) a (1.17). Hodnoty $x(t)$ vyjadřují velikost populace v čase t. Všechny tři rovnice (1.14), (1.16), (1.17) modelují, adekvátně do jisté míry, stejný proces. Ovšem jejich tvar je na první pohled dosti odlišný. Pokusíme se tuto „vadu na kráse“ odstranit.

Pravou stranu rovnice (1.14) přepíšeme ve tvaru

$$rx(t) - \frac{r-1}{K}x(t)^2 = (r-1)x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) + x(t)$$

a člen $x(t)$ převedeme na levou stranu. Dostaneme

$$x(t+1) - x(t) = (r-1)x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right).$$

Na levé straně je diference posloupnosti x, rovnici proto můžeme přepsat ve tvaru

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right),$$

nebo stručně

$$\frac{\Delta x}{x} = (r-1)\left(1 - \frac{x}{K}\right). \tag{2.1}$$

Rovnici (1.16) postupně upravíme.

$$\begin{aligned}
Kx(t+1) + (r-1)x(t)x(t+1) &= rKx(t),\\
Kx(t+1) - Kx(t) &= rKx(t) - Kx(t) - (r-1)x(t)x(t+1),\\
K\big(x(t+1) - x(t)\big) &= (r-1)Kx(t) - (r-1)x(t)x(t+1),\\
\Delta x(t) &= (r-1)x(t)\left(1 - \frac{x(t+1)}{K}\right).
\end{aligned}$$

S pomocí operátoru posunu můžeme tuto rovnici zapsat ve stručnějším tvaru

$$\frac{\Delta x}{x} = (r-1)\left(1 - \frac{x^\sigma}{K}\right). \tag{2.2}$$

Rovnice (2.1) a (2.2) jsou „téměř stejné“, liší se pouze posunem posloupnosti na pravé straně; na levé straně mají relativní změnu velikosti populace.

Rovnici (1.17) také upravíme:

$$\ln\frac{x(t+1)}{x(t)} = \ln r\left(1-\frac{x(t)}{K}\right),$$
$$\ln x(t+1) - \ln x(t) = \ln r\left(1-\frac{x(t)}{K}\right),$$

takže pomocí operátoru diference dostaneme rovnici ve stručném tvaru

$$\Delta \ln x = \ln r\left(1-\frac{x}{K}\right). \tag{2.3}$$

Výrazy na pravých stranách rovnic (2.1) a (2.3) se liší pouze ve faktorech $r-1$ a $\ln r$. Ovšem pro „nepříliš velká“ r je podle Talorovy věty

$$\ln r = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(r-1)^n}{n} = r-1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(r-1)^n}{n},$$

takže hodnota $r-1$ je první aproximací hodnoty $\ln r$. Pravé strany rovnic (2.1) a (2.3) jsou opět „téměř stejné“. Na levé straně rovnice (2.3) je absolutní změna velikosti populace vyjádřená na logaritmické stupnici.

Levou stranu rovnice (2.3) také aproximujeme Taylorovým polynomem prvního stupně. Dostaneme

$$\ln x(t+1) - \ln x(t) = \ln\frac{x(t+1)}{x(t)} \approx \frac{x(t+1)}{x(t)} - 1 = \frac{x(t+1)-x(t)}{x(t)} = \frac{\Delta x(t)}{x(t)}.$$

Vidíme, že také levou stranu rovnice (2.1) lze považovat za první aproximaci levé strany rovnice (2.3).

Poznamenejme ještě, že dvojice rovnic (1.14) a (2.1), (1.16) a (2.2), (1.17) a (2.3) nejsou ekvivalentní. Ty původní (1.14), (1.16) a (1.17) připouštějí jako své řešení nulovou posloupnost, tvar upravených rovnic (2.1), (2.2) a (2.3) nulové řešení nepřipouští.

Provedené manipulace s rovnicemi (1.14), (1.16) a (1.17) ukazují hlubší souvislost těchto rovnic – modelů růstu populace s vnitrodruhovou konkurencí. Rovnice (1.14) je mezním případem rovnice (1.17), rovnice (1.16) ve tvaru (2.2) je drobnou modifikací rovnice (1.14) zapsané ve tvaru (2.1).

Parametr K interpretujeme jako úživnost prostředí, tj. jako velikost populace, která je se svým životním prostředím v dynamické rovnováze. Poměr x/K lze chápat jako míru porušení této rovnovážné velikosti, rozdíl $1 - x/K$ jako vzdálenost od rovnováhy. Všechny tři rovnice (2.1), (2.2) a (2.3) lze nyní přečíst jednotným způsobem: Změna velikosti populace je úměrná její vzdálenosti od rovnovážného stavu.

Ještě si všimněme jedné zajímavosti. Model (2.2), který má na pravé straně posunutou hledanou posloupnost, lze interpretovat tak, že současná změna stavu je způsobena stavem budoucím, tj. že populace anticipuje budoucnost. Ovšem ekvivalece rovnic (2.2) a (1.16) ukazuje, že ani přijetí rovnice (2.2) za správný model růstu populace nás ještě nenutí opustit Laplaceův determinismus.

Ukázali jsme, že jeden model nějakého procesu lze zapisovat různými způsoby. Tyto rozmanité možnosti zápisu jednoho modelu mohou nabízet jeho různé intepretace. Vhodný zápis různých modelů může naopak ukázat nějakou obecnou nebo společnou vlastnost modelované reality.

Jedna společná vlastnost tří uvedených modelů růstu populace byla však vidět již z jejich vyjádření (1.14), (1.16) a (1.17) — na pravé straně těchto rekurentních formulí se čas t vyskytuje pouze jako index hledané posloupnosti x. To znamená, že model růstu populace je v každém časovém okamžiku stejný. Tuto skutečnost lze interpretovat tak, že změny okolního světa nemají žádný vliv na modelovaný růst populace v omezeném prostředí; jinak řečeno, populaci s jejím prostředím si představujeme jako izolovanou od okolního světa. Populaci a její prostředí považujeme za uzavřený systém, který se vyvíjí podle svých vlastních (ΑΥΤΟΣ) zákonů (NOMOI). Proto rovnice (1.14), (1.16), (1.17) a také (2.1), (2.2), (2.3) nazýváme *autonomní.*

Obsahem této kapitoly budou nejprve různé způsoby zápisu rovnic, v nichž vystupuje neznámá posloupnost, její diference a/nebo posun. Tato diference nebo posun nemusí být nutně prvního řádu, jako v dosud uvedených příkladech. To umožní, mimo jiné, zformulovat alternativní model růstu populace, v němž je specifikován charakter vnitrodruhové konkurence.

Ve druhé sekci se nejprve podíváme na model růstu populace z jiného hlediska. Nebudeme se na populaci a její prostředí dívat jako na jeden uzavřený systém, ale populaci budeme chápat jako otevřený systém, na který působí okolní prostředí. Pokud i prostředí budeme považovat za systém, dojdeme k soustavě dvou rovnic. Dojdeme tak k soustavám (systémům[1]) více rovnic a ukážeme, že takové systémy můžeme chápat jako rovnice pro posloupnosti, jejíž členy jsou tvořeny více složkami, tj. jejichž členy nejsou čísla ale vektory.

V poslední sekci této kapitoly uvedeme možné zobecnění zaváděných rovnic a budeme ho ilustrovat na další možnosti, jak modelovat růst populace s vnitrodruhovou konkurencí.

2.1 Diferenční rovnice a počáteční úlohy

Definice 13. Nechť Φ je funkce $2k+2$ proměnných, která je nekonstantní v $k+2$-hé proměnné nebo ve druhé a v $2k+2$-hé proměnné[2]. *Diferenční rovnice k-tého řádu* je rovnice tvaru

$$\Phi\big(t, x(t), \Delta x(t), \Delta^2 x(t), \dots, \Delta^k x(t), x(t+1), x(t+2), \dots, x(t+k)\big) = 0.$$

Pokud je funkce Φ konstantní v první proměnné, nazývá se rovnice *autonomní.*

Speciální případy diferenčních rovnic:

Diferenční rovnice k-tého řádu prvního typu nerozřešená vzhledem k nejvyšší diferenci (*implicitní diferenční rovnice k-tého řádu*) je rovnice tvaru

$$F\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^k x\right) = 0, \tag{2.4}$$

kde F je reálná funkce $k+2$ proměnných, která není konstantní v poslední proměnné.

[1]Slovo „systém“ obecně označuje nějaký výsek reality, který je tvořen nějakými prvky, mezi kterými existují nějaké vazby. Proto můžeme i několik provázaných rovnic nazývat stejným slovem. Nebo jinak: slovo „soustava“ je ekvivalentem řeckého ΣΥΣΤΗΜΑ.

[2]Pokud je funkce $\Phi = \Phi(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^k x, x^\sigma, x^{\sigma^2}, \dots, x^{\sigma^k})$ diferencovatelná, můžeme předpoklad o nezávislosti na příslušných proměnných zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta^k x} \neq 0 \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\sigma^k}} \neq 0.$$

Diferenční rovnice k-tého řádu prvního typu rozřešená vzhledem k nejvyšší diferenci (*explicitní diferenční rovnice k-tého řádu*) je rovnice tvaru

$$\Delta^k x = f\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^{k-1} x\right), \tag{2.5}$$

kde f je reálná funkce $k+1$ proměnných.

Diferenční rovnice k-tého řádu druhého typu je rovnice tvaru

$$G\big(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+k)\big) = 0, \tag{2.6}$$

kde G je reálná funkce $k+2$ proměnných, která není konstantní ve druhé a v poslední proměnné.

Rekurentní formule k-tého řádu je rovnice tvaru

$$x(t+k) = g\big(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+k-1)\big), \tag{2.7}$$

kde g je reálná funkce $k+1$ proměnných, která není konstantní ve druhé proměnné.

Poznámka 9. S pomocí operátoru posunu můžeme diferenční rovnici k-tého řádu, resp, diferenční rovnici k-tého řádu druhého typu ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\Phi\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^k x, x^\sigma, \dots, x^{\sigma^k}\right) = 0, \text{ resp. } G\left(t, x, x^\sigma, \dots, x^{\sigma^k}\right) = 0.$$

Každou diferenční rovnici lze převést na diferenční rovnici prvního nebo druhého typu.

Každou implicitní diferenční rovnici prvního typu lze převést na diferenční rovnici druhého typu stejného řádu a naopak.

Každou explicitní diferenční rovnici prvního typu lze převést na rekurentní formuli stejného řádu a naopak.

Vzhledem k Tvrzení 8 v Kapitole 1 totiž můžeme položit

$$F\big(t, x(t), \Delta x(t), \dots, \Delta^k x(t)\big) = \\ = \Phi\left(t, x(t), \Delta x(t), \dots, \Delta^k x(t), \Delta x(t) + x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i x(t)\right),$$

$$G\big(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+k)\big) = \\ = \Phi\left(t, x(t), x(t+1) - x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(t+k-i), x(t+1), \dots, x(t+k)\right).$$

$$G\big(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+k)\big) = \\ = F\left(t, x(t), x(t+1) - x(t), x(t+2) - 2x(t+1) + x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(t+k-i)\right),$$

$$F\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^k x\right) = G\left(t, x(t), \Delta x(t) + x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i x(t)\right).$$

$$g\big(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+k-1)\big) =$$
$$= f\left(t, x(t), x(t+1)-x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \binom{k-1}{i} x(t+k-i+1)\right) -$$
$$- \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \binom{k}{i} x(t+k-i),$$

$$f\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^{k-1} x\right) =$$
$$= g\left(t, x(t), \Delta x(t) + x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \Delta^i x(t)\right) - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \Delta^i x(t).$$

Definice 14. Nechť $t_0 \in \mathbb{Z}$ a $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1} \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že

$$(t_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \in \operatorname{Dom} g.$$

Rovnosti

$$x(t_0) = \xi_0,\ x(t_0+1) = \xi_1,\ x(t_0+2) = \xi_2, \dots,\ x(t_0+k-1) = \xi_{k-1} \tag{2.8}$$

nazveme *počáteční podmínky pro rekurentní formuli* (2.7).

Pokud ekvivalentně předpokládáme, že

$$\left(t_0, \xi_0, \xi_1 - \xi_0, \dots, \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \binom{k-1}{i} \xi_{k-1}\right) \in \operatorname{Dom} f,$$

nazýváme rovnosti (2.8) *počáteční podmínky pro diferenční rovnici* (2.5). Rovnici (2.5) s počátečními podmínkami (2.8) nazýváme *počáteční úloha (problém) pro diferenční rovnici* (2.5).

Definice 15. Libovolná posloupnost $x \in \mathcal{P}$ taková, že pro každý index $t \in \operatorname{Dom} x$ splňuje některou z rovností (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) se nazývá *partikulární řešení příslušné diferenční rovnice.*

Množina všech posloupností, které jsou partikulárním řešením některé diferenční rovnice (2.4), (2.5), (2.6) nebo (2.7), se nazývá *obecné řešení příslušné diferenční rovnice.*

Partikulární řešení, které splňuje počáteční podmínku (2.8) se nazývá *řešení počáteční úlohy.*

Pokud lze obecné řešení zapsat ve tvaru $\{x(t) = u(t,c) : c \in A \subseteq \mathbb{R}\}$, budeme také o posloupnosti $u(\,\cdot\,, c)$ závislé na parametru c mluvit jako o obecném řešení příslušné rovnice.

Příklad. Uvažujme rekurentní formuli pro geometrickou posloupnost s kvocientem 2, tj.

$$x(t+1) = 2x(t)$$

s počáteční podmínkou $x(t_0) = \xi_0$. Tuto formuli můžeme ekvivalentně zapsat jako explicitní nebo implicitní diferenční rovnici prvního typu

$$\Delta x = x,\ \text{nebo}\ x - \Delta x = 0,$$

nebo jako diferenční rovnici druhého typu

$$x(t+1) - 2x(t) = 0.$$

Libovolná posloupnost definovaná vztahem $x(t) = a2^t$, kde a je nějaké reálné číslo, je partikulárním řešením rovnice.

Množina $\{x \in \mathcal{P} : x(t) = a2^t, a \in \mathbb{R}\}$ je obecným řešením rovnice. Obecné řešení lze také zapsat stručně (a méně přesně) jako $x(t) = a2^t$.

Posloupnost definovaná vztahem $x(t) = \xi_0 2^{t-t_0}$ je řešením počáteční úlohy. ■

Příklad. *Logistická rovnice se zpožděním*

Logistickou rovnici (1.14) vývoje velikosti populace jsme odvodili z předpokladu, že populace svou velikostí, tj. silou vnitrodruhové konkurence, bezprostředně zmenšuje svůj růstový koeficient, zmenšuje porodnost nebo zvětšuje úmrtnost. Vliv velikosti populace na její růst však nemusí být bezprostřední, může k němu docházet s jistým zpožděním.

Uvažujme např. populaci, v níž v jednom období dospělí jedinci produkují nějaká nedospělá stadia (např. plazi kladou vejce) a spotřebovávají zdroje prostředí. Úživnost prostředí nemá na nedospělé jedince (nakladená vejce) žádný vliv. Teprve až nedospělci dospějí (z vajec se vylíhnou noví jedinci), závisí jejich přežívání a/nebo plodnost na množství potravy, které jejich prostředí poskytuje. To znamená, že růstový koeficient závisí na velikosti populace v předchozí generaci. Tyto úvahy vedou k tomu, že výraz

$$r - \frac{r-1}{K}x(t)$$

z rovnice (1.14) nahradíme výrazem $r - \dfrac{r-1}{K}x(t-1)$ a dostaneme rovnici

$$x(t+1) = x(t)\left(r - \frac{r-1}{K}x(t-1)\right).$$

Budeme-li místo indexu t psát $t+1$, dostaneme diferenční rovnici druhého řádu ve tvaru

$$x(t+2) = x(t+1)\left(r - \frac{r-1}{K}x(t)\right). \tag{2.9}$$

Abychom mohli z této rekurentní formule počítat hodnoty posloupnosti x (velikost populace v jednotlivých časových okamžicích), musíme znát její hodnoty ve dvou po sobě následujících indexech. Potřebujeme tedy počáteční podmínky

$$x(0) = \xi_0,\ x(1) = \xi_1. \tag{2.10}$$

Z počátečních podmínek můžeme vypočítat hodnoty velikosti populace v libovolném čase $t > 0$. Takové simulace můžeme udělat pro různé hodnoty parametrů r a K. Pak uvidíme, že pro malou hodnotu r se velikost populace ustálí na hodnotě kapacity prostředí. Později budeme umět ukázat, že posloupnost x konverguje k hodnotě K monotonně pro $1 < r < \frac{5}{4}$, s tlumenými oscilacemi pro $\frac{5}{4} < r < \frac{3}{2}$. Pro větší hodnoty růstového koeficientu budou hodnoty $x(t)$ kolísat kolem hodnoty K. Rovnice (2.9) tedy podobně jako rovnice (1.14) může modelovat růst populace K-stratégů i r-stratégů.

Pokud by však počáteční hodnoty ξ_0 a ξ_1 byly takové, že

$$\frac{\xi_0}{\xi_1} > \frac{Kr}{r-1},$$

pak by $x(2) < 0$; model (2.9) růstu populace má stejný nedostatek, jako logistická rovnice (1.14). V případě rovnice se zpožděním je situace ještě horší – v důsledku kolísání velikosti pro velké hodnoty růstového koeficientu r může dojít k tomu, že

$$\frac{x(t-1)}{x(t)} > \frac{Kr}{r-1}$$

a simulovaná velikost populace klesne do záporných hodnot. ■

2.2 Systémy diferenčních rovnic

Definice 16. Nechť $f_1, f_2, \ldots, f_k$ a $g_1, g_2, \ldots, g_k$ jsou funkce $k+1$ proměnných se stejným definičním oborem. *Systém k explicitních diferenčních rovnic prvního řádu* je systém rovnic tvaru

$$\begin{aligned} \Delta x_1(t) &= f_1\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big), \\ \Delta x_2(t) &= f_2\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big), \\ &\vdots \\ \Delta x_k(t) &= f_k\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big), \end{aligned} \tag{2.11}$$

systém k rekurentních formulí prvního řádu je systém rovnic tvaru

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= g_1\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big), \\ x_2(t+1) &= g_2\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big), \\ &\vdots \\ x_k(t+1) &= g_k\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Poznámka 10. Systém explicitních diferenčních rovnic prvního řádu lze převést na systém rekurentních formulí prvního řádu a naopak. Stačí totiž položit

$$g_i\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big) = f_i\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big) + x_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Vektorovou posloupnost $\boldsymbol{x}$ a její hodnotu v indexu t definujeme vztahy

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

jako vektor (k-tici) posloupností. Označíme dále

$$\boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) = \boldsymbol{f}\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big) = \begin{pmatrix} f_1\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big) \\ f_2\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big) \\ \vdots \\ f_k\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \\ f_2\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \\ \vdots \\ f_k\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \end{pmatrix}$$

a podobně

$$\boldsymbol{g}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) = \begin{pmatrix} g_1\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \\ g_2\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \\ \vdots \\ g_k\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \end{pmatrix}.$$

Diferenci a posun vektorové posloupnosti $\boldsymbol{x}$ v indexu t definujeme vztahy

$$\Delta \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t+1) - \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \\ \vdots \\ \Delta x_k(t) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{x}^\sigma(t) = \boldsymbol{x}(t+1) = \begin{pmatrix} x_1^\sigma(t) \\ x_2^\sigma(t) \\ \vdots \\ x_k^\sigma(t) \end{pmatrix}.$$

Při tomto označení můžeme systém explicitních diferenčních rovnic zapsat jako rovnici vektorovou

$$\Delta \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)$$

a systém rekurentních formulí jako formuli vektorovou

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{g}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \quad \text{nebo} \quad \boldsymbol{x}^\sigma(t) = \boldsymbol{g}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big).$$

Počáteční podmínky pro systém (2.11) nebo (2.12) jsou tvaru

$$x_1(t_0) = \xi_1,\ x_2(t_0) = \xi_2,\ \ldots,\ x_k(t_0) = \xi_k \quad \text{nebo vektorově} \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi} \tag{2.13}$$

Rovnice (2.11), resp. (2.12) s počáteční podmínkou (2.13) se nazývá *počáteční úloha pro systém* (2.11), resp. (2.12).

Nechť posloupnost x je řešením počáteční úlohy (2.7), (2.8). Položme

$$x_i(t) = x(t+i-1), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Pak $x_i(t+1) = x(t+1+i-1) = x(t+i)$, pro $i = 1, 2, \ldots, k$, tedy

$$x_i(t+1) = x_{i+1}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

a

$$x_k(t+1) = x(t+k) = g\big(t, x(t), x(t+1), \ldots, x(t+k-1)\big) = g\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big).$$

Dále

$$x_i(t_0) = x(t_0+i-1) = \xi_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.14}$$

Posloupnost x je tedy první složkou řešení systému

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t) \\ x_2(t+1) &= \quad x_3(t) \\ &\ \vdots \\ x_{k-1}(t+1) &= \qquad\qquad x_k(t) \\ x_k(t+1) &= g\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big) \end{aligned} \tag{2.15}$$

s počáteční podmínkou (2.14). Naopak, je-li posloupnost x_1 první složkou řešení počáteční úlohy (2.15), (2.14), pak je také řešením úlohy (2.7), (2.8), neboť

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t), \\ x_1(t+2) &= x_2(t+1) = x_3(t), \\ x_1(t+3) &= x_2(t+2) = x_3(t+1) = x_4(t), \\ &\ \vdots \\ x_1(t+k-1) &= x_k(t), \\ x_1(t+k) &= x_k(t+1) = g\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{k-1}(t)\big) = \\ &= g\big(t, x_1(t), x_1(t+1), \ldots, x_1(t+k-1)\big). \end{aligned}$$

Systém rekurentních formulí (2.15) můžeme přepsat ve tvaru ekvivalentního systému explicitních diferenčních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= -x_1 + x_2 \\
\Delta x_2 &= \quad -x_2 + x_3 \\
&\vdots \\
\Delta x_{k-1} &= \qquad -x_{k-1} + x_k \\
\Delta x_k &= g(t, x_1, x_2, \dots, x_k) - x_k
\end{aligned}$$

Odvodili jsme tak

Tvrzení 9. Rekurentní formule, resp. explicitní diferenční rovnice, k-tého řádu je ekvivalentní se systémem k rekurentních formulí, resp. k explicitních rovnic, prvního řádu.

2.3 Operátorově-diferenční rovnice

Povšimněme si ještě jednou explicitní diferenční rovnice prvního řádu, resp. rekurentní formule prvního řádu, ve tvaru

$$\Delta x(t) = f(t, x), \quad \text{resp.} \quad x^\sigma(t) = g(t, x). \tag{2.16}$$

V obou případech je na pravé straně reálná funkce dvou reálných proměnných. Dalekosáhlé zobecnění těchto rovnic můžeme získat pouhou změnou interpretace těchto pravých stran. Symbol f, resp. g, nebudeme chápat jako funkci, tj. zobrazení $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ale jako operátor, tj. zobrazení $\mathbb{R} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, které reálnému číslu t a posloupnosti x přiřadí posloupnost.

Základní rozdíl operátorově-diferenčních rovnic oproti diferenčním rovnicím (2.16) je ten, že pro výpočet hodnoty $x(t+1)$ nestačí znát jen „bezprostředně předcházející" hodnotu $x(t)$, ale je nutné „nějak znát celou posloupnost" x.

Příklad. *Růst populace produkující toxické odpady*

Výraz

$$r - \frac{r-1}{K}x$$

vyskytující se na pravé straně rovnice (1.14), která modeluje vývoj populace, interpretujeme jako růstový koeficient, který je zmenšován působením populace o velikosti x. Budeme modelovat jednu z možností, jak k tomuto zmenšování dochází.

Předpokládejme, že zvětšení úmrtnosti, a tedy zmenšení růstového koeficientu, je způsobeno tím, že populace produkuje nějaké škodlivé odpady. Tyto odpady zamořují prostředí, ale postupně se v něm rozkládají. Označme b množství odpadů, které vyprodukuje jedinec (nebo přesněji populace jednotkové velikosti) za časovou jednotku. V časovém intervalu $[t, t+1)$, stručně řekneme v čase t, se tedy do prostředí dostanou odpady v množství $bx(t)$. Dále označme symbolem p podíl odpadu, který se rozloží za jednotku času; parametr p samozřejmě splňuje nerovnosti

$$0 < p < 1.$$

Z odpadu vyprodukovaného v čase t tedy v prostředí zůstane v čase $t+1$ množství

$$(1-p)bx(t)$$

odpadu. Nebo jinak, v čase t bude v prostředí zůstávat množství

$$(1-p)bx(t-1)$$

z odpadu vyprodukovaného v čase $t-1$. Populace kontaminovala prostředí po celou dobu své existence, proto celkové množství $B(t)$ odpadu v čase t je rovno

$$B(t) = bx(t) + (1-p)bx(t-1) + (1-p)\big((1-p)bx(t-2)\big) + \cdots = b\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j x(t-j).$$

Je přirozené předpokládat, že s rostoucím množstvím odpadu v prostředí se zmenšuje růstový koeficient populace; čím více je prostředí kontaminováno, tím větší je úmrtnost. Pro první model tohoto typu zvolíme nejjednodušší možnost — lineární závislost. Růstový koeficient populace závislý na celkovém množství B toxického odpadu vyjádříme jako

$$r - \alpha B,$$

kde α je vhodná kladná konstanta; α vyjadřuje citlivost populace na znečištění.

Provedenými úvahami jsme dospěli k modelu vývoje populace ve tvaru

$$x(t+1) = x(t)\left(r - \alpha b\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j x(t-j)\right) \tag{2.17}$$

Abychom podle tohoto modelu vypočítali velikost populace v následujícím časovém okamžiku $t+1$, potřebujeme znát velikost populace ve všech předchozích časech $t, t-1, t-2, \dots$. Množina počátečních podmínek

$$x(0) = \xi_0,\ x(-1) = \xi_{-1},\ x(-2) = \xi_{-2}, \dots \tag{2.18}$$

pro operátorově-diferenční rovnici (2.17) je tedy nekonečná.

Můžeme se ptát, zda i populace, jejíž velikost se vyvíjí podle modelu (2.17) může být v dynamické rovnováze se svým prostředím. Ptáme se tedy, zda existuje velikost populace, kterou označíme x^* tak, aby $x(t) = x^*$ pro každou hodnotu t, tj. zda existuje kladné řešení algebraické rovnice

$$x^* = x^*\left(r - \alpha b\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j x^*\right).$$

Poněvadž $|p| < 1$, můžeme geometrickou řadu na pravé straně této rovnice sečíst. Po snadné úpravě dostaneme

$$x^* = \frac{p(r-1)}{\alpha b}.$$

Toto číslo je kladné, pokud $r > 1$. Již víme, že populace s růstovým koeficientem $r > 1$, jejíž růst by nebyl omezován znečišťovaným prostředím, roste nade všechny meze. Produkce odpadu tedy může stabilizovat velikost populace.

Opět můžeme rovnovážnou velikost x^* označit symbolem K. Pak bude

$$\alpha b = \frac{p(r-1)}{K}$$

a rovnici (2.17) můžeme přepsat ve tvaru

$$x(t+1) = x(t)\left(r - \frac{p(r-1)}{K}\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j x(t-j)\right). \tag{2.19}$$

Růst populace je nyní charakterizován třemi parametry — vnitřním koeficientem růstu r, kapacitou prostředí K a rychlostí rozkladu odpadních produktů p. Povšimněme si, že v limitním případě $p \to 1$, tj. v případě, že všechny odpadní produkty se rozloží hned během jednotkového času, rovnice (2.19) přejde v rovnici (1.14).

Řešení úlohy (2.19), (2.18) nemůžeme bezprostředně simulovat na počítači, neznáme a nemůžeme zadat nekonečnou množinu počátečních hodnot. Budeme proto uvažovat jednodušší úlohu. Představme si, že v čase $t = 0$ do neobsazeného prostředí pronikla populace o velikosti ξ_0. Pak se počáteční podmínky (2.18) redukují na

$$x(0) = \xi_0, \quad x(t) = 0 \text{ pro } t < 0.$$

V tomto případě je také

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j x(t-j) &= \sum_{j=0}^{t}(1-p)^j x(t-j) = \\ &= x(t) + (1-p)x(t-1) + (1-p)^2 x(t-2) + \cdots + (1-p)^{t-1}x(1) + (1-p)^t x(0) = \\ &= \sum_{j=0}^{t}(1-p)^{t-j}x(j).\end{aligned}$$

Rovnici (2.19) proto můžeme přepsat ve tvaru

$$x(t+1) = x(t)\left(r - \frac{p(r-1)}{K}\sum_{j=0}^{t}(1-p)^{t-j} x(j)\right). \tag{2.20}$$

Ještě poznamenejme, že operátorově-diferenční rovnice tohoto tvaru se nazývá *diferenční rovnice s distribuovaným zpožděním* nebo *diferenční rovnice konvolučního typu.* ■

2.4 Cvičení

V úlohách 1–5 převeďte obecnou diferenční rovnici na explicitní rovnici prvního typu a na rekurentní formuli.

1. $3\big(x(t+1) - 2x(t)\big) + x(t)x(t+1) = 0$
2. $x(t+1)x(t) + x(t+1) - 2x(t) = t^2$
3. $\Delta x(t) = \big(2 - x(t)\big)x(t+1)$
4. $\Delta x(t) = \big(1 - 2x(t)\big)x(t+1)$
5. $\Delta^2 x(t) - 3\Delta x(t) = t$

6. Rekurentní formuli (2.9) přepište ve tvaru explicitní diferenční rovnice druhého řádu.

7. Odvoďte model vývoje velikosti populace za následujících předpokladů: Časová jednotka je zvolena tak, že v laboratorních podmínkách (v naprosto čistém prostředí) se velikost populace za tuto jednotku zdvojnásobí. V přirozeném a omezeném prostředí tato populace vytváří nějaké produkty svého metabolismu. Tyto látky jsou tak toxické, že v prostředí jimi nasyceném je populace za časovou jednotku zdecimována. Odpadní produkty metabolismu se však rozkládají tak rychle, že za zvolenou časovou jednotku z nich zbyde polovina.
   Určete kapacitu prostředí (velikost populace, která je s prostředím v dynamické rovnováze).

Výsledky:

1. $\Delta x(t) = \dfrac{3-x(t)}{3+x(t)}x(t)$, $x(t+1) = \dfrac{6x(t)}{3+x(t)}$
2. $\Delta x(t) = \dfrac{t^2+x(t)+x(t)^2}{1+x(t)}$, $x(t+1) = \dfrac{t^2+2x(t)}{1+x(t)}$
3. $\Delta x(t) = -\dfrac{x(t)^2}{x(t)+1}$, $x(t+1) = 1-\dfrac{1}{1+x(t)}$
4. $\Delta x(t) = 1-x(t)$, $x(t+1) = 1$
5. $\Delta^2 x(t) = 3\Delta x(t) + t$, $x(t+2) = 5x(t+1) - 4x(t) + t$
6. $\Delta^2 x = \left(r-2-\dfrac{r-1}{K}x\right)\Delta x + \left(r-1-\dfrac{r-1}{K}x\right)x$
7. $x(t+1) = 2x(t)f\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j x(t-j)\right)$, kde f je libovolná klesající funkce taková, že $f(0)=1$, $\lim\limits_{B\to\infty} f(B) = \frac{1}{20}$.
   Se svým prostředím je v dynamické rovnováze populace, jejíž velikost je $x^* = \frac{1}{2}y$, kde y je jediné kladné řešení rovnice $yf(y)=1$.
   Konkrétní možná volba: $f(y) = \dfrac{1}{20} + \dfrac{19}{19y+20}$, pak

$$x(t+1) = \frac{1}{10}x(t)\left(1+\frac{380}{20+19\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j x(t-j)}\right), \qquad x^* = 2{,}046$$

Kapitola 3

Lineární rovnice

V úvodu ke kapitole 1 jsme odvodili nejjednodušší možný model vývoje populace ve tvaru rekurentní formule prvního řádu (1.7). Je-li růstový koeficient $r > 1$, pak jejím řešením je ryze rostoucí neohraničená geometrická posloupnost, což nemá rozumnou ekologickou interpretaci v delším časovém období. Abychom tento nedostatek odstranili, zahrnuli jsme do úvahy skutečnost, že populace se vyvíjí v nějakém omezeném prostředí, které svým působením na velkou populaci zmenšuje její růstový koeficient. Tímto způsobem jsme získali několik variant logistické rovnice (1.14), (1.16), (1.17), nebo po úpravách v jednotnějších tvarech (2.1), (2.2), (2.3). Růst populace byl regulován omezenou úživností prostředí, kterou jsme v uvedených případech považovali za konstantní, v čase se neměnící charakteristiku.

Nerealistický neomezený růst populace předpovídaný modelem (1.7) však může být redukován i jiným způsobem. Nemusí jít o samoregulaci populace, ale o cílené zásahy do jejího růstu. Představme si například hospodářský les, ve kterém majitel chce mít srnce. Nemůže jich tam ale mít zdaleka tolik, kolik by odpovídalo úživnosti lesa; taková populace by les ničila. Proto při „přemnožení“ srnců provádí jejich odstřel. „Menežment odstřelu“ může mít nepřeberné množství podob. Ukážeme dvě možnosti, které pracovně nazveme prvního a druhého řádu; tato terminologie odráží fakt, že první možnost povede k popisu regulovaného růstu populace diferenční rovnicí prvního řádu, druhá k rovnici druhého řádu.

Model prvního řádu

Uvažme nejprve možnost, že majitel plánuje odstřel srnců na každou sezónu jinak; může se rozhodovat podle počtu lovuchtivých přátel, podle aktuální ceny srnčího masa a podobně. Tuto skutečnost můžeme vyjádřit tak, že úmrtnost populace d může být v každé sezóně jiná, její hodnota závisí na čase, $d = d(t)$. Růstový koeficient $r = 1 + b - d$ (kde b označuje porodnost) tedy také závisí na čase, $r = r(t)$. Touto úvahou dostáváme modifikaci modelu (1.7) růstu populace ve tvaru

$$r(t+1) = r(t)x(t). \tag{3.1}$$

Opět se jedná o rekurentní formuli prvního řádu. Známe-li růstový koeficient r v každém čase $t = 0, 1, 2, \ldots$ a počáteční velikost populace $x(0) = \xi_0$, můžeme postupně vypočítat velikost populace $x(t)$ v libovolném následujícím časovém okamžiku:

$$\begin{aligned}x(1) &= r(0)x(0) = r(0)\xi_0,\\ x(2) &= r(1)x(1) = r(1)r(0)\xi_0,\\ x(3) &= r(2)x(2) = r(2)r(1)r(0)\xi_0,\\ &\vdots\end{aligned}$$

atd. Obecně dostaneme velikost populace v čase t vyjádřenu vztahem

$$x(t) = \xi_0 \prod_{j=0}^{t-1} r(j).$$

O vlastnostech posloupnosti dané tímto obecným předpisem však nemůžeme bezprostředně mnoho říci.

Regulaci populace (střílení srnců) si můžeme představit i jinak. Majitel lesa má nějakou kýženou velikost populace η a „přespočetné“ srnce vystřílí, tj. v čase t (v t-té sezóně) zlikviduje populaci o velikosti $x(t) - \eta$. Pokud odstřel provádí na závěr sezóny a počet ulovených zvířat stanoví na základě velikosti populace zjištěné na začátku sezóny, bude velikost populace v následující sezóně dána rovností

$$x(t+1) = rx(t) - \big(x(t) - \eta\big),$$

nebo po snadné úpravě

$$x(t+1) = (r-1)x(t) + \eta. \tag{3.2}$$

Znovu se jedná o rekurentní formuli prvního řádu. Ze znalosti počáteční velikosti populace $x(0) = \xi_0$ můžeme nyní postupně vypočítat

$$\begin{aligned}x(1) &= (r-1)x(0) + \eta,\\ x(2) &= (r-1)x(1) + \eta = (r-1)\big((r-1)x(0) + \eta\big) + \eta = (r-1)^2\xi_0 + \big((r-1)+1\big)\eta,\\ x(3) &= (r-1)x(2) + \eta = (r-1)\Big((r-1)^2\xi_0 + \big((r-1)+1\big)\eta\Big) + \eta =\\ &= (r-1)^3\xi_0 + \big((r-1)^2 + (r-1) + 1\big)\eta,\\ &\vdots\end{aligned}$$

atd. Obecně dostaneme

$$x(t) = (r-1)^t\xi_0 + \eta\sum_{j=0}^{t-1}(r-1)^j.$$

Na pravé straně této rovnosti se objevuje součet prvních t členů geometrické posloupnosti s prvním členem 1 a kvocientem $r-1$. Pokud tedy $r \neq 2$, platí

$$\sum_{j=0}^{t-1}(r-1)^j = \frac{1-(r-1)^t}{1-(r-1)} = \frac{(r-1)^t - 1}{r-2}$$

a řešení diferenční rovnice (3.2) s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$ je rovno

$$x(t) = (r-1)^t\xi_0 + \frac{(r-1)^t - 1}{r-2}\eta = (r-1)^t\left(\xi_0 + \frac{\eta}{r-2}\right) - \frac{\eta}{r-2};$$

pokud $r = 2$, platí
$$\sum_{j=0}^{t-1}(r-1)^j = \sum_{j=0}^{t-1} 1 = t$$
a řešení diferenční rovnice (3.2) s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$ je rovno
$$x(t) = (r-1)^t\xi_0 + \eta t = \xi_0 + \eta t.$$
Vidíme tedy, že v případě $r \geq 2$ je posloupnost x ryze rostoucí a neohraničená, v případě $1 < r < 2$ je posloupnost x monotonní a platí
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{\eta}{2-r}.$$
Metoda „odstřelu přespočetných srnců" tedy nevede k žádoucímu cíli; buď není schopna populaci zregulovat (při velkém růstovém koeficientu) nebo ji zreguluje na hodnotu větší, než byla hodnota stanovená. Ovšem v případě růstového koeficientu $r \in (1, 2)$ lze metodu snadno modifikovat; za velikost „populace k odstřelu" v t-té sezóně lze stanovit hodnotu $x(t)-(2-r)\eta$ a celková velikost populace se při této volbě bude vyvíjet k potřebné hodnotě η; vývoj velikosti populace je popsán rovnicí
$$x(t+1) = (r-1)x(t) + (2-r)\eta.$$

Majitel lesa (honitby) může stanovit přesný počet ulovených srnců. Ve skutečnosti se ne každý střelec vždycky trefí nebo naopak v lovecké euforii postřílí srnců více, než měl přiděleno. V každé sezóně tedy bude odstřelen jiný počet srnců. Člen $(2-r)\eta$ na pravé straně předchozí rovnice tedy nahradíme nějakým výrazem závislým na čase, řekněme $b(t)$. Navíc v každé sezóně jinak prší a svítí slunce, takže je jiné množství potravy pro srnce, v různých sezónách mají srnci různou kondici. To znamená, že i růstový koeficient je v každé sezóně jiný, závisí na čase, $r = r(t)$. Tato úvaha vede k tomu, že předchozí rovnici nahradíme poněkud obecnější rovnicí
$$x(t+1) = \big(r(t)-1\big)x(t) + b(t). \tag{3.3}$$
Předchozí modely (3.1) a (3.2) lze považovat za speciální případy modelu (3.3).

V diferenční rovnici (rekurentní formuli) (3.3) je podstatné, že na pravé straně jsou hodnoty hledané posloupnosti v první mocnině, tj. funkce na pravé straně rovnice (3.3) je lineární funkcí proměnné $x(t)$. Z tohoto důvodu se diferenční rovnice tvaru (3.3) nebo tvaru s ním ekvivalentního nazývá lineární.

Model druhého řádu

Vraťme se k představě majitele lesa, který reguluje velikost populace srnců jejich odstřelem. Pžedstavme si, že kvótu ulovených zvířat v jedné sezóně stanoví podle přírůstku populace od sezóny předchozí, konkrétně jako přímo úměrnou tomuto přírůstku. V t-té sezóně se tedy lovem zlikviduje populace srnců o velikosti
$$\alpha\big(x(t) - x(t-1)\big),$$
kde α je nějaké kladné číslo. V následující, tj. $t+1$-ní sezóně bude mít populace velikost
$$x(t+1) = rx(t) + \alpha\big(x(t) - x(t-1)\big);$$

parametr r stále označuje přirozený růstový koeficient populace. Uvedená rovnost má platit pro libovolnou hodnotu t, můžeme v ní tedy psát $t+1$ místo t. Po snadné úpravě dostaneme

$$x(t+2) - (r+\alpha)x(t+1) - x(t) = 0. \tag{3.4}$$

To je diferenční rovnice druhého typu, kterou můžeme přepsat ve tvaru rovnice prvního typu

$$\Delta^2 x + (2 - r - \alpha)\Delta x - (r+\alpha)x = 0. \tag{3.5}$$

Hodnoty posloupnosti x jsou v rovnici (3.4) v první mocnině, diference této posloupnosti v rovnici (3.5) jsou také v první mocnině. Nebo jinak řečeno, na levé straně rovnice (3.4) je lineární kombinace tří po sobě jdoucích členů posloupnosti x, na levé straně rovnice (3.5) je lineární kombinace hodnoty posloupnosti x a její první a druhé diference. Toto pozorování nás opravňuje k tomu, abychom diferenční rovnice (3.4) a (3.5) opět nazvali lineární.

3.1 Lineární rovnice prvního řádu

Lineární diferenční rovnice je rovnice tvaru

$$\Delta x = a(t)x + b(t). \tag{3.6}$$

Tato rovnice se nazývá *homogenní*, pokud $b \equiv 0$, a *nehomogenní* v opačném případě. Lineární homogenní rovnice

$$\Delta x = a(t)x \tag{3.7}$$

se nazývá *přidružená homogenní rovnice k lineární rovnici* (3.6).

Rovnici (3.6) jako rekurentní formuli zapíšeme ve tvaru

$$x(t+1) = \big(1 + a(t)\big)x(t) + b(t). \tag{3.8}$$

3.1.1 Homogenní rovnice a exponenciální posloupnost

Známe-li hodnotu $x(t)$, můžeme z rekurentní formule (3.8) vždy vypočítat $x(t+1)$. Naopak, známe-li $x(t+1)$ a přitom je $a(t)+1 \neq 0$, můžeme z (3.8) vypočítat $x(t)$. Hodnoty řešení rovnice (3.8), a ekvivalentně rovnice (3.6), můžeme počítat „dozadu“ pouze tehdy, pokud $a(t) \neq -1$. Toto pozorování inspiruje zavedení následujícího pojmu.

Definice 17. Řekneme, že posloupnost $p \in \mathcal{P}$ je *regresivní,* pokud $p(t) \neq -1$ pro všechny indexy $t \in \operatorname{Dom} p$. Množinu regresivních posloupností označíme $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{R} = \{p \in \mathcal{P} : (\forall t \in \operatorname{Dom} p)\ 1 + p(t) \neq 0\}.$$

Podobně jako v případě obecných posloupností můžeme zdůraznit definiční obor posloupnosti dolním indexem, tj.

$$\mathcal{R}_{t_0} = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}_{t_0}, \text{ pro } t_0 \in \mathbb{Z}, \qquad \mathcal{R}_{-\infty} = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}_{-\infty}.$$

Na množině regresivních posloupností definujeme binární operaci $\oplus$ a unární operaci $\ominus$ vztahy

$$p \oplus q\,(t) = p(t) + q(t) + p(t)q(t), \qquad \ominus p(t) = \frac{-p(t)}{1+p(t)}.$$

Snadno ověříme, že množina regresivních posloupností s operací $\oplus$ tvoří komutativní grupu, nulová posloupnost $o \equiv 0$ je neutrálním prvkem této grupy a $\ominus p$ je opačným prvkem k prvku p.

Tvrzení 10. Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost. Pak pro každou hodnotu $x_0 \in \mathbb{R}$ existuje jediná posloupnost $x \in \mathcal{P}$ taková, že $\operatorname{Dom} x = \operatorname{Dom} p$, $x(t_0) = x_0$ a $\Delta x(t) = p(t)x(t)$.

Důkaz: Poněvadž $x(t+1) = \big(1+p(t)\big)x(t)$, je posloupnost x definována pro každé $t \geq t_0$. Dále pro každý index t takový, že $t-1 \in \operatorname{Dom} p$ platí $x(t) = \big(1+p(t-1)\big)x(t-1)$ a tedy

$$x(t-1) = \frac{x(t)}{1+p(t-1)},$$

což znamená, že posloupnost x je definována také pro $t \leq t_0$ takové, že $t \in \operatorname{Dom} p$. $\square$

Definice 18. Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost. *Exponenciální posloupnost příslušnou k posloupnosti p s počátkem $t_0 \in \operatorname{Dom} p$* definujeme jako jediné řešení diferenční rovnice

$$\Delta x = p(t)x \tag{3.9}$$

s počáteční podmínkou $x(t_0) = 1$. Její t-tý člen značíme $e_p(t, t_0)$.

Věta 15 (Vlastnosti exponenciální posloupnosti)**.** *Nechť $p, q \in \mathcal{R}$ takové, že* $\operatorname{Dom} p = \operatorname{Dom} q$, $t_0, t, s \in \operatorname{Dom} p$. *Pak platí*

1. $e_p(t, t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1 + p(i)\big)$,
2. $e_0(t, t_0) \equiv 1$, $e_1(t, t_0) = 2^{t-t_0}$,
3. $e_p(t, t_0)e_q(t, t_0) = e_{p\oplus q}(t, t_0)$,
4. $\big(e_p(t, t_0)\big)^{-1} = e_{\ominus p}(t, t_0)$,
5. $e_p(t, s)e_p(s, t_0) = e_p(t, t_0)$,
6. *Je-li $p(t) > -1$ pro všechny indexy $t \in \operatorname{Dom} p$, pak* $e_p(\,\cdot\,, t_0) = \mathrm{e}^{\sum_{t_0} \ln(1+p)}$.

Důkaz: Podle Tvrzení 7 platí $\prod_{i=t_0}^{t_0-1} \big(1 + p(i)\big) = 1$ a

$$\Delta \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1 + p(i)\big) = \prod_{i=t_0}^{t} \big(1 + p(i)\big) - \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1 + p(i)\big) = \big(1 + p(t) - 1\big) \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1 + p(i)\big) =$$
$$= p(t) \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1 + p(i)\big).$$

Odtud plyne platnost první části věty. Nyní

$$e_0(t, t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1} (1 + 0) = 1, \quad e_1(t, t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1} (1 + 1) = 2^{(t-1)-(t_0-1)} = 2^{t-t_0},$$

což je druhé tvrzení věty. Třetí a čtvrté plyne z následujících výpočtů

$$e_p(t,t_0)e_q(t,t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big)\prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+q(i)\big) = \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)+q(i)+p(i)q(i)\big) =$$
$$= e_{p+q+pq}(t,t_0) = e_{p\oplus q}(t,t_0),$$

$$e_p(t,t_0)e_{\ominus p}(t,t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big)\prod_{i=t_0}^{t-1}\left(1-\frac{p(i)}{1+p(i)}\right) =$$
$$= \prod_{i=t_0}^{t-1}\left(1+p(i)-\frac{p(i)}{1+p(i)}-\frac{p(i)^2}{1+p(i)}\right) = \prod_{i=t_0}^{t-1} 1 = 1.$$

Podle Tvrzení 7 platí

$$e_p(t,s)e_p(s,t_0) = \prod_{i=s}^{t-1}\big(1+p(i)\big)\prod_{i=t_0}^{s-1}\big(1+p(i)\big) = \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big)$$

a to je páté tvrzení věty. Rovnost v posledním tvrzení je ekvivalentní s rovnostmi

$$\ln e_p(t,t_0) = \sum_{t_0}^{t-1}\ln\big(1+p(i)\big) = \ln\prod_{t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big).$$

□

Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost. Řešení počáteční úlohy pro homogenní lineární rovnici

$$\Delta x = p(t)x, \qquad x(t_0) = x_0$$

je dáno rovností

$$x(t) = x_0 e_p(t,t_0) = x_0\prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big), \tag{3.10}$$

neboť

$$x(t_0) = x_0 e_p(t_0,t_0) = x_0 1 = x_0$$

a podle Vět 4 a 15 platí

$$\Delta x(t) = x_0\Delta e_p(t,t_0) = x_0 p(t)e_p(t,t_0) = p(t)\big(x_0 e_p(t,t_0)\big).$$

3.1.2 Nehomogenní rovnice a metoda variace konstanty

Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost a $b \in \mathrm{P}$ posloupnost se stejným definičním oborem. Uvažujme počáteční úlohu pro lineární nehomogenní rovnici ve tvaru

$$\Delta x = p(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{3.11}$$

Řešení této úlohy budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = c(t)e_p(t,t_0). \tag{3.12}$$

Jedná se o analogii řešení daného formulí (3.10) s tím rozdílem, že místo konstanty x_0 uvažujeme nestacionární posloupnost c.

Aby byla splněna počáteční podmínka v úloze (3.11), musí platit

$$x_0 = x(t_0) = c(t_0)e_p(t_0, t_0) = c(t_0),$$

tedy

$$c(t_0) = x_0. \tag{3.13}$$

Současně musí být splněna rovnice, tedy podle Věty 5 má být

$$\begin{aligned} p(t)x(t) + b(t) = \Delta x(t) = \Delta\big(ce_p(\,\cdot\,, t_0)\big)(t) = c(t)\Delta e_p(t, t_0) + e_p^\sigma(t, t_0)\Delta c(t) = \\ = c(t)p(t)e_p(t, t_0) + e_p(t+1, t_0)\Delta c(t) = p(t)x(t) + e_p(t+1, t_0)\Delta c(t). \end{aligned}$$

Z této rovnosti vyjádříme $b(t) = e_p(t+1, t_0)\Delta c(t)$. Pro posloupnost c tedy podle Věty 15.4 platí

$$\Delta c(t) = b(t)e_{\ominus p}(t+1, t_0).$$

Rovnají-li se dvě posloupnosti, musí se rovnat i jejich sumy od t_0, takže podle (1.25) dostaneme

$$c(t) - c(t_0) = \sum\nolimits_{t_0} b(t)e_{\ominus p}(t+1, t_0).$$

Z této rovnosti spolu s podmínkou (3.13) vyjádříme

$$c(t) = x_0 + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)e_{\ominus p}(i+1, t_0).$$

Dosazením této posloupnosti do rovnosti (3.12) dostaneme s využitím Věty 15 řešení úlohy (3.11),

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(x_0 + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)e_{\ominus p}(i+1, t_0)\right) e_p(t, t_0) = \\ &= x_0 e_p(t, t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)e_{\ominus p}(i+1, t_0)e_p(i+1, t_0)e_p(t, i+1) = \\ &= x_0 e_p(t, t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)e_p(t, i+1) = x_0 e_p(t, t_0) + \sum\nolimits_{t_0} be_p(\,\cdot\,, i+1)(t). \end{aligned}$$

Exponenciální posloupnost můžeme přepsat jako součin podle Věty 15.1. Řešení počáteční úlohy pro nehomogenní lineární rovnici s regresivní posloupností v lineárním členu, tj. řešení úlohy (3.11) tedy můžeme psát v jednom z tvarů

$$x(t) = x_0 e_p(t, t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)e_p(t, i+1) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1 + p(i)\big) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} \big(1 + p(j)\big).$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že řešení počáteční úlohy pro obecnou lineární diferenční rovnici (3.6) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ je stejného tvaru. Jediný rozdíl je v tom, že definiční obor řešení může být menší než definiční obor posloupnosti a.

Věta 16. *Nechť* $\operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$, $t_0 \in \operatorname{Dom} a$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Položme*

$$\tau = \sup\left\{t \in \operatorname{Dom} a : t \le t_0, a(t) = -1\right\}.$$

Řešení počáteční úlohy pro lineární diferenční rovnici,

$$\Delta x = a(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{3.14}$$

je posloupnost $x \in \mathcal{P}_\tau$ *definovaná vztahem*

$$x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} \bigl(1 + a(i)\bigr) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} \bigl(1 + a(j)\bigr).$$

Podívejme se ještě na druhý sčítanec ve výrazu pro řešení úlohy (3.14), tedy na posloupnost danou předpisem

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} \bigl(1 + a(j)\bigr).$$

Platí $\tilde{x}(t_0) = 0$ a

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{x}(t) = \Delta \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} \bigl(1 + a(j)\bigr) &= \sum_{i=t_0}^{t} b(i) \prod_{j=i+1}^{t} \bigl(1 + a(j)\bigr) - \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} \bigl(1 + a(j)\bigr) = \\
&= b(t) + \bigl(1 + a(t)\bigr) \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} \bigl(1 + a(j)\bigr) - \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} \bigl(1 + a(j)\bigr) = \\
&= b(t) + a(t) \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} \bigl(1 + a(j)\bigr) = b(t) + a(t)\tilde{x}(t).
\end{aligned}$$

To znamená, že posloupnost $\tilde{x}$ je řešením nehomogenní rovnice (3.6) s nulovou počáteční podmínkou. První sčítanec v řešení úlohy (3.14) je řešením přidružené homogenní rovnice (3.7). Dostáváme tak závěr:

Důsledek 1. *Řešení počáteční úlohy pro lineární diferenční rovnici* (3.14) *je součtem řešení počátečního problému pro přidruženou homogenní rovnici* (3.7) *a řešení nehomogenní rovnice s nulovou počáteční podmínkou.*

Ještě explicitně vypíšeme tvar řešení lineární rovnice (3.6) v některých speciálních případech.

Důsledek 2. *Řešení rovnice* (3.6) *v případech, kdy některá z posloupností a, b je stacionární:*

- $\Delta x = \alpha x + b(t)$, $x(t_0) = x_0$.
  Řešení: $x(t) = x_0(1+\alpha)^{t-t_0} + \sum\limits_{i=t_0}^{t-1} (1+\alpha)^{t-i-1} b(i)$.
- $\Delta x = a(t)x + \beta$, $x(t_0) = x_0$.
  Řešení: $x(t) = x_0 \prod\limits_{i=t_0}^{t-1} \bigl(1 + a(i)\bigr) + \beta \sum\limits_{i=t_0}^{t-1} \prod\limits_{j=i+1}^{t-1} \bigl(1 + a(j)\bigr)$.
- $\Delta x = \alpha x + \beta$, $x(t_0) = x_0$.
  Řešení: $x(t) = x_0(1+\alpha)^{t-t_0} + \beta \dfrac{(1+\alpha)^{t-t_0} - 1}{\alpha} = \left(x_0 + \dfrac{\beta}{\alpha}\right)(1+\alpha)^{t-t_0} - \dfrac{\beta}{\alpha}$.

$0 \le \alpha$	ryze monotonní, neohraničená	
$-1 < \alpha < 0$	ryze monotonní, konvergentní	$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \dfrac{-\beta}{\alpha}$
$\alpha = -1$	monotonní, konvergentní	
$-2 < \alpha < -1$	konvergentní	
$\alpha = -2$	ohraničená	$x(t_0 + 2k + 1) = -x_0 - \dfrac{2\beta}{\alpha}$, $x(t_0 + 2k) = x_0, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\alpha < -2$	neohraničená	$\liminf\limits_{t\to\infty} = -\infty, \ \limsup\limits_{t\to\infty} = \infty$

Tabulka 3.1: Vlastnosti řešení x počáteční úlohy (3.15) pro lineární rovnici s konstantními koeficienty v závislosti na hodnotách parametru α; pro počáteční hodnotu platí $\alpha x_0 \neq -\beta$.

3.1.3 Kvalitativní vlastnosti řešení lineární rovnice ve zvláštních případech

Rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujme počáteční úlohu

$$\Delta x = \alpha x + \beta, \quad x(0) = x_0 \tag{3.15}$$

s parametrem $\alpha \neq -1$.

Je-li $\alpha \neq 0$, pak má tato úloha řešení tvaru

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right)(1+\alpha)^t - \frac{\beta}{\alpha},$$

které je definováno pro každé $t \in \mathbb{Z}$. Jedná se tedy o geometrickou posloupnost s kvocientem $1 + \alpha$, od níž je odečtena konstanta β/α.

Je-li $\alpha = 0$, pak má úloha (3.15) řešení tvaru

$$x(t) = x_0 + \beta t,$$

jedná se tedy o aritmetickou posloupnost s diferencí β.

Počáteční úlohu (3.15) můžeme uvažovat také s dosud vyloučeným parametrem $\alpha = -1$. V takovém případě se úloha redukuje na tvar

$$x(t+1) = \beta, \quad x(0) = x_0,$$

takže $x(t) = \beta$ pro každé $t > 0$, řešení je od $t = 1$ konstantní.

Pokud počáteční hodnota x_0 vyhovuje relaci $\alpha x_0 \neq -\beta$, pak je řešení úlohy (3.15) nekonstantní.

Z uvedených vyjádření řešení je vidět, že monotonnost, ohraničenost a konvergence posloupnosti x závisí na hodnotě parametru α. Tyto vlastnosti jsou shrnuty v tabulce 3.1.

Rovnice s periodickými koeficienty

Řešení lineární homogenní rovnice s konstantním koeficientem

$$\Delta x = \alpha x$$

je geometrická posloupnost s kvocientem $1+\alpha$, tj. $x(t) = x_0(1+\alpha)^t$. Pokud koeficient rovnice není konstantní, ale nějak pravidelně kolísá kolem nějaké pevné hodnoty, lze očekávat, že řešení bude pravidelně kolísat kolem nějaké geometrické posloupnosti. Tuto myšlenku nyní vyjádříme přesněji.

Nechť ω je kladné celé číslo a $a \in \mathcal{R}_{-\infty}$ je ω-periodická regresivní posloupnost, tj. pro každé $t \in \mathbb{Z}$ platí $a(t+\omega) = a(t) \neq -1$. Uvažujme homogenní rovnici (3.7) a označme

$$\bar{a} = \left(\prod_{i=0}^{\omega-1} \big(1 + a(i)\big) \right)^{1/\omega} - 1, \tag{3.16}$$

tzn. že číslo $1 + \bar{a}$ je geometrickým průměrem hodnot posloupnosti $1 + a$ na intervalu délky periody. Podle výsledků uvedených v 3.1.1 můžeme řešení rovnice (3.7) s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$ psát ve tvaru

$$x(t) = x_0 e_a(t,0) = x_0 e_{\bar{a}}(t,0) e_{\ominus\bar{a}}(t,0) e_a(t,0) = x_0 e_{\bar{a}}(t,0) e_{a\ominus\bar{a}}(t,0).$$

Označme nyní

$$\begin{aligned}\varphi(t) = e_{a\ominus\bar{a}}(t,0) = \prod_{i=0}^{t-1} \left(1 + a(i) - \frac{\bar{a}}{1+\bar{a}} - \frac{\bar{a}a(i)}{1+\bar{a}} \right) = \\ = \prod_{i=0}^{t-1} \frac{1 + \bar{a} + a(i) + \bar{a}a(i) - \bar{a} - \bar{a}a(i)}{1+\bar{a}} = \frac{1}{(1+\bar{a})^t} \prod_{i=0}^{t-1} \big(1 + a(i)\big).\end{aligned}$$

Posloupnost φ je jednoznačným řešením počáteční úlohy

$$\Delta\varphi = (a \ominus \bar{a})\,\varphi, \quad \varphi(0) = 1,$$

neboli

$$\Delta\varphi(t) = \frac{a(t) - \bar{a}}{1+\bar{a}} \varphi(t), \quad \varphi(0) = 1. \tag{3.17}$$

Poněvadž posloupnost a je ω-periodická, platí

$$\begin{aligned}\varphi(t+\omega) = \frac{1}{(1+\bar{a})^{t+\omega}} \prod_{i=0}^{t+\omega-1} \big(1 + a(i)\big) = \\ = \left(\frac{1}{(1+\bar{a})^t} \prod_{i=0}^{t-1} \big(1 + a(i)\big) \right) \left(\frac{1}{(1+\bar{a})^\omega} \prod_{i=t}^{t+\omega-1} \big(1 + a(i)\big) \right) = \\ = \varphi(t) \frac{1}{(1+\bar{a})^\omega} \prod_{i=0}^{\omega-1} \big(1 + a(i)\big) = \varphi(t),\end{aligned}$$

takže posloupnost φ je také ω-periodická. Můžeme ji tedy také vyjádřit jako ω-periodickou posloupnost, pro jejíž počáteční hodnoty platí

$$\varphi(j) = \prod_{i=0}^{j-1} \big(1 + a(i)\big), \quad j = 0, 1, \ldots, \omega - 1.$$

Z provedených výpočtů plyne výsledek:

Věta 17. *Nechť a je regresivní ω-periodická posloupnost. Pak řešení lineární homogenní rovnice* (3.7) *je tvaru*

$$x(t) = x_0\,(1+\bar{a})^t\,\varphi(t),$$

kde $x_0 = x(0)$, hodnota $\bar{a}$ je dána výrazem (3.16) *a φ je ω-periodická posloupnost, která je řešením počáteční úlohy* (3.17)*.*

Řešení homogenní lineární rovnice s periodickým koeficientem je tedy součinem geometrické posloupnosti a ω-periodické posloupnosti. Toto vyjádření lze považovat za rozklad řešení na trend a sezónní složku v multiplikativním tvaru.

Poněvadž ω-periodická posloupnost je ohraničená, dostáváme

Důsledek 3. *Řešení x homogenní lineární rovnice* (3.7) *s periodickým koeficientem a je ohraničená právě tehdy, když $-2 \le \bar{a} \le 0$; $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ právě tehdy, když $-2 < \bar{a} < 0$.*

Rovnici (3.16) můžeme přepsat do tvaru rekurentní formule (3.8). Při označení $q = 1 + a$ můžeme pro tuto rekurentní formuli napsat počáteční úlohu

$$x(t+1) = q(t)x(t), \quad x(0) = x_0. \tag{3.18}$$

Přepsáním věty 17 a jejího prvního důsledku dostaneme

Důsledek 4. *Nechť q je ω-periodická posloupnost taková, že $q(t) \neq 0$ pro všechna $t \in \mathbb{Z}$. Pak řešení úlohy* (3.18) *je tvaru*

$$x(t) = x_0(\bar{q})^t \prod_{i=0}^{\tau-1} \frac{q(i)}{\bar{q}} = x_0(\bar{q})^{t-\tau} \prod_{i=0}^{\tau-1} q(i),$$

kde

$$\bar{q} = \sqrt[\omega]{\prod_{i=0}^{\omega-1} q(i)}\,, \qquad \tau = t - \omega\left[\frac{t}{\omega}\right],$$

tj. $\bar{q}$ je geometrický průměr hodnot posloupnosti q na intervalu délky periody a τ je zbytek po dělení čísla t číslem ω.

Důsledek 5. *Posloupnost x daná rekurentní formulí v úloze* (3.18) *s periodickou posloupností q je ohraničená právě tehdy, když $-1 \le \bar{q} \le 1$; $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ právě tehdy, když $-1 < \bar{q} < 1$.*

3.2 Lineární rovnice k-tého řádu

Jedná se o rovnici

$$\Delta^k x + a_{k-1}(t)\Delta^{k-1}x + a_{k-2}(t)\Delta^{k-2}(t)x + \cdots + a_1(t)\Delta x + a_0(t) = b(t). \tag{3.19}$$

O posloupnostech $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, b předpokládáme, že mají stejný definiční obor, označíme ho D, a pro každé t z tohoto definičního oboru platí

$$a_{k-1}(t) - a_{k-2}(t) + a_{k-3}(t) - \cdots + (-1)^{k-1}a_0(t) \neq 1. \tag{3.20}$$

V případě $b \equiv 0$ se rovnice (3.19) nazývá *homogenní,* v opačném případě *nehomogenní.*

Je-li $t_0 \in D$, jsou počáteční podmínky pro rovnici (3.19) tvaru

$$x(t_0) = \xi_0,\ x(t_0+1) = \xi_1,\ \dots,\ x(t_0+k-1) = \xi_{k-1}. \tag{3.21}$$

Rovnici (3.19) přepíšeme na rovnici druhého typu. Podle Tvrzení 7 platí

$$\Delta^k x(t) = x(t+k) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} x(t+k-j) = x(t+k) + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x(t+j),$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} a_j(t)\Delta^j x(t) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t) \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} x(t+j-i) = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1} a_j(t)(-1)^i \binom{j}{i} x(t+j-i) =$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1-i} a_{j+i}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} x(t+j) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1-i} a_{i+j}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} x(t+j),$$

takže levá strana rovnice (3.19) je tvaru

$$x(t+k) + \sum_{j=0}^{k-1} \left[(-1)^{k-j} \binom{k}{j} + \sum_{i=0}^{k-1-j} a_{i+j}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} \right] x(t+j).$$

Označíme

$$c_j(t) = (-1)^{k-j} \binom{k}{j} + \sum_{i=0}^{k-1-j} a_{i+j}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} \qquad \text{pro } j = 0,1,2,\dots,k-1$$

a dostaneme rovnici druhého typu ekvivalentní s rovnicí (3.19) ve tvaru

$$x(t+k)+c_{k-1}(t)x(t+k-1)+c_{k-2}(t)x(t+k-2)+\cdots+c_1(t)x(t+1)+c_0(t)x(t) = b(t); \tag{3.22}$$

podmínka (3.20) zaručí, že $c_0(t) \neq 0$ pro všechna $t \in D$, takže se skutečně jedná o rovnici k-tého řádu. Z tvaru rovnice (3.22) vidíme, že počáteční úloha (3.22), (3.21), nebo ekvivalentně úloha (3.19), (3.21), má jediné řešení, které je definováno na množině D.

3.2.1 Fundamentální systém řešení homogenní rovnice

Lineární homogenní diferenční rovnice k-tého řádu

$$x(t+k) + c_{k-1}(t)x(t+k-1) + c_{k-2}(t)x(t+k-2) + \cdots + c_1(t)x(t+1) + c_0(t)x(t) = 0 \tag{3.23}$$

splňuje *princip superpozice:* jsou-li posloupnosti x_1 a x_2 řešení rovnice (3.36) a p a q jsou libovolné reálné konstanty, pak také posloupnost $x = px_1 + qx_2$ je řešením rovnice (3.36), tj. libovolná lineární kombinace řešení této rovnice je jejím řešením. Navíc nulová posloupnost $x \equiv 0$ je řešením rovnice (3.36). To znamená, že množina všech řešení lineární homogenní diferenční rovnice tvoří vektorový prostor.

Pro $i \in \{0,1,2,\dots,k-1\}$ označme y_i posloupnost, která je řešením homogenní rovnice (3.23) s počátečními podmínkami

$$x(t_0+j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \qquad j = 0,1,2,\dots,k-1.$$

Pak je zřejmé, že posloupnosti $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ jsou lineárně nezávislé. To znamená, že dimenze vektorového prostoru řešení je alespoň k.

Nechť y je libovolné řešení homogenní rovnice (3.23). Označme

$$\eta_0 = y(t_0),\ \eta_1 = y(t_0+1),\ \dots,\ \eta_{k-1} = y(t_0+k-1).$$

Lineární kombinace posloupností $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ s koeficienty $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}$, tj. posloupnost

$$\eta_0 y_0 + \eta_1 y_1 + \dots + \eta_{k-1} y_{k-1} \tag{3.24}$$

je podle principu superpozice řešením rovnice (3.23) a splňuje stejné počáteční podmínky, jako posloupnost y. Z jednoznačnosti řešení počáteční úlohy plyne, že posloupnost y a lineární kombinace (3.24) jsou shodné. Odtud dále plyne, že prostor řešení lineární homogenní rovnice (3.23) má dimenzi k a posloupnosti y_i, $i = 0, 1, 2, \dots, k$ tvoří bázi tohoto prostoru.

Z provedených úvah plyne, že platí

Věta 18. *Množina všech řešení lineární homogenní diferenční rovnice k-tého řádu* (3.23) *tvoří vektorový prostor dimenze k.*

Definice 19. Báze vektorového prostoru všech řešení lineární homogenní rovnice (3.23) se nazývá *fundamentální systém řešení.*

Posloupnosti $z_1, z_2, \dots, z_k$ tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice (3.23) právě tehdy, když libovolné řešení x této rovnice lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci, tj. právě tehdy, když existují jednoznačně určené konstanty $A_1, A_2, \dots, A_k$ takové, že

$$x(t) = A_1 z_1(t) + A_2 z_2(t) + \dots + A_k z_k(t) \tag{3.25}$$

pro libovolné t z definičního oboru D. Předchozí rovnost je ekvivalentní s rovnostmi

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 z_1(t) & + & A_2 z_2(t) & + \cdots + & A_k z_k(t) & = \xi_0 \\ A_1 z_1(t+1) & + & A_2 z_2(t+1) & + \cdots + & A_k z_k(t+1) & = \xi_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_1 z_1(t+k-1) & + & A_2 z_2(t+k-1) & + \cdots + & A_k z_k(t+k-1) & = \xi_{k-1} \end{array} \tag{3.26}$$

a jednoznačná existence konstant $A_1, A_2, \dots, A_k$ je ekvivalentní s jednoznačnou řešitelností (3.26) chápané jako systém (algebraických) rovnic pro neznámé $A_1, A_2, \dots, A_k$. Determinant této soustavy je Casoratián posloupností $z_1, z_2, \dots, z_k$ v indexu t,

$$C(t; z_1, z_2, \dots, z_k) = \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \dots & z_k(t) \\ z_1(t+1) & z_2(t+1) & \dots & z_k(t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1(t+k-1) & z_2(t+k-1) & \dots & z_k(t+k-1) \end{vmatrix}.$$

Dostáváme tak závěr:

Věta 19. *Posloupnosti $z_1, z_2, \dots, z_k$ tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice* (3.23) *právě tehdy, když každá z nich je řešením rovnice* (3.23) *a pro každé t z definičního oboru D platí*

$$C(t; z_1, z_2, \dots, z_k) \neq 0,$$

kde $C(t; z_1, z_2, \dots, z_k)$ je Casoratián posloupností $z_1, z_2, \dots, z_k$.

3.2.2 Nehomogenní rovnice a metoda variace konstant

Pokud jsou posloupnosti $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ v rovnicích (3.22) a (3.23) stejné, řekneme, že homogenní lineární diferenční rovnice (3.23) je *přidružená k nehomogenní rovnici* (3.22).

Je-li posloupnost y řešením nehomogenní rovnice (3.22) a posloupnost z je řešením přidružené homogenní rovnice (3.23), pak jejich součet $x = z + y$ je opět řešením nehomogenní rovnice (3.22), neboť

$$x(t+k) + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)x(t+i) = z(t+k) + y(t+k) + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)\big(z(t+i) + y(t+i)\big) =$$
$$= \left(z(t+k) + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)z(t+i)\right) + \left(y(t+k) + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)y(t+i)\right) = 0 + b(t) = b(t).$$

Platí tedy

Věta 20. *Nechť $z_1, z_2, \dots, z_k$ tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice* (3.23) *přidružené k nehomogenní rovnici* (3.22). *Pak každé řešení nehomogenní rovnice* (3.22) *je tvaru*

$$x(t) = B_1z_1(t) + B_2z_2(t) + \cdots + B_kz_k(t) + y(t),$$

kde y je nějaké řešení nehomogenní rovnice a $B_1, B_2, \dots, B_k$ jsou konstanty.

Nechť posloupnosti $z_1, z_2, \dots, z_k$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice (3.23) přidružené k nehomogenní rovnici (3.23). Pak je

$$z_i(t+k) = -\sum_{j=0}^{k-1} c_j(t)z_i(t+j) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, k. \tag{3.27}$$

Řešení nehomogenní rovnice (3.23) budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t)z_i(t), \tag{3.28}$$

kde $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou zatím neurčené posloupnosti. Hledáme ho tedy jako analogii řešení homogenní rovnice (3.25); místo konstant $A_1, A_2, \dots, A_k$ však píšeme posloupnosti — varírujeme konstanty. Z tohoto důvodu se tato metoda řešení nehomogenní rovnice nazývá *metoda variace konstant.*

Nyní můžeme vyjádřit

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t+1)z_i(t+1) = \sum_{i=1}^{k} \left[\big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+1) + u_i(t)z_i(t+1)\right].$$

Budeme požadovat, aby posloupnosti $u_1, u_2, \dots, u_k$ splňovaly rovnici

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+1) = 0.$$

Pak $x(t+1) = \sum\limits_{i=1}^{k} u_i(t)z_i(t+1)$, takže

$$x(t+2) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t+1)z_i(t+2) = \sum_{i=1}^{k} \left[\big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+2) + u_i(t)z_i(t+2)\right].$$

Dále budeme požadovat, aby posloupnosti $u_1, u_2, \dots, u_k$ splňovaly rovnice

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+2) = 0,$$

takže $x(t+2) = \sum\limits_{i=1}^{k} u_i(t)z_i(t+2)$. Takto budeme pokračovat až k požadavku

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+k-1) = 0$$

a vyjádření $x(t+k-1) = \sum\limits_{i=1}^{k} u_i(t)z_i(t+k-1)$.

Celkem tedy požadujeme

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \tag{3.29}$$

a dostáváme

$$x(t+j) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t)z_i(t+j), \quad j = 1, 2, \dots, k-1. \tag{3.30}$$

V poslední z rovností (3.30), tj. v té, v níž $j = k-1$, budeme psát $t+1$ místo t a upravíme ji s použitím (3.27). Dostaneme

$$\begin{aligned} x(t+k) &= \sum_{i=1}^{k} u_i(t+1)z_i(t+k) = \sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+k) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t)z_i(t+k) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+k) - \sum_{i=1}^{k} u_i(t) \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t)z_i(t+j). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Současně posloupnost x má být řešením rovnice (3.22), takže s využitím vztahů (3.30) dostaneme

$$\begin{aligned} x(t+k) &= b(t) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t)x(t+j) = b(t) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t) \sum_{i=1}^{k} u_i(t)z_i(t+j) = \\ &= b(t) - \sum_{i=1}^{k} u_i(t) \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t)z_i(t+j). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Porovnáním (3.31) a (3.32) vidíme, že

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big) z_i(t+k) = b(t). \tag{3.33}$$

Diference posloupností $u_1, u_2, \ldots, u_k$ tedy splňují systém rovnic (3.29), (3.33). Přepíšeme ho do tvaru

$$\begin{array}{rcrcccrcl}
z_1(t+1)\,\Delta u_1(t) & + & z_2(t+1)\,\Delta u_2(t) & + & \cdots & + & z_k(t+1)\,\Delta u_k(t) & = & 0\\
z_1(t+2)\,\Delta u_1(t) & + & z_2(t+2)\,\Delta u_2(t) & + & \cdots & + & z_k(t+2)\,\Delta u_k(t) & = & 0\\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\
z_1(t+k-1)\,\Delta u_1(t) & + & z_2(t+k-1)\,\Delta u_2(t) & + & \cdots & + & z_k(t+k-1)\,\Delta u_k(t) & = & 0\\
z_1(t+k)\,\Delta u_1(t) & + & z_2(t+k)\,\Delta u_2(t) & + & \cdots & + & z_k(t+k)\,\Delta u_k(t) & = & b(t).
\end{array}$$

Determinant této soustavy je Casoratiánem fundamentálního systému řešení homogenní rovnice (3.23) v indexu $t+1$. Je tedy nenulový a soustava je jednoznačně řešitelná. Označíme

$$w(t) = \begin{vmatrix}
z_1(t) & z_2(t) & \ldots & z_k(t)\\
z_1(t+1) & z_2(t+1) & \ldots & z_k(t+1)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
z_1(t+k-1) & z_2(t+k-1) & \ldots & z_k(t+k-1)
\end{vmatrix},$$

$$m_i(t) =$$
$$= \begin{vmatrix}
z_1(t) & z_2(t) & \ldots & z_{i-1}(t) & z_{i+1}(t) & \ldots & z_k(t)\\
z_1(t+1) & z_2(t+1) & \ldots & z_{i-1}(t+1) & z_{i+1}(t+1) & \ldots & z_k(t+1)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
z_1(t+k-2) & z_2(t+k-2) & \ldots & z_{i-1}(t+k-2) & z_{i+1}(t+k-2) & \ldots & z_k(t+k-2)
\end{vmatrix};$$

$w(t)$ je Casoratián fundamentálního řešení homogenní rovnice (3.23). Diference posloupností $u_1, u_2, \ldots u_k$ nyní můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\Delta u_i(t) = \frac{(-1)^{k+i} b(t) m_i(t+1)}{w(t+1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Odtud a z rovnosti (1.24) dostaneme

$$u_i(t) = u_i(t_0) + (-1)^{k+i} \sum_{j=t_0}^{t-1} \frac{b(j) m_i(j+1)}{w(j+1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Při označení $B_i = u_i(t_0)$ můžeme řešení rovnice (3.22) podle vztahu (3.28) psát ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} B_i z_i(t) + (-1)^k \sum_{j=t_0}^{t-1} \frac{b(j)}{w(j+1)} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i m_i(j+1) z_i(t).$$

3.2.3 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Jedná se o rovnici

$$\Delta^k x + \alpha_{k-1}\Delta^{k-1}x + \alpha_{k-2}\Delta^{k-2}x + \cdots + \alpha_1\Delta x + \alpha_0 = 0, \tag{3.34}$$

kde reálné koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ splňují rovnost

$$\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2} + \alpha_{k-3} - \cdots + (-1)^{k-1}\alpha_0 \neq 1 \tag{3.35}$$

analogickou k rovnosti (3.20). Rovnice (3.34) má pro libovolné počáteční podmínky tvaru (3.21) jediné řešení, které je definováno pro každé $t \in \mathbb{Z}$.

Stejně jako v případě obecné lineární rovnice k-tého řádu můžeme rovnici (3.34) přepsat na rovnici druhého typu

$$x(t+k) + \gamma_{k-1}x(t+k-1) + \gamma_{k-2}x(t+k-2) + \cdots + \gamma_1 x(t+1) + \gamma_0 x(t) = 0, \tag{3.36}$$

kde jsme označili

$$\gamma_j = (-1)^{k-j}\binom{k}{j} + \sum_{i=0}^{k-1-j}\alpha_{i+j}(-1)^i\binom{j+i}{i} \quad \text{pro } j = 0, 1, 2, \ldots, k-1.$$

S pomocí operátoru posunu $^\sigma$ můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$x^{\sigma^k}(t) + \gamma_{k-1}x^{\sigma^{k-1}}x(t) + \gamma_{k-2}x^{\sigma^{k-2}}x(t) + \cdots + \gamma_1 x^\sigma(t) + \gamma_0 x(t) = 0.$$

Položíme-li $\gamma_k = 1$, můžeme operátorovou rovnici zapsat ještě stručněji

$$\left(\sum_{i=0}^{k}\gamma_i \cdot^{\sigma^i}\right) x \equiv 0. \tag{3.37}$$

Abychom našli řešení rovnice (3.36), provedeme následující heuristickou úvahu. Lineární homogenní diferenční rovnice prvního řádu druhého typu s konstantními koeficienty je tvaru

$$x(t+1) + \gamma x(t) = 0$$

a podle výsledků odstavce 3.1.2 má řešení

$$x(t) = x_0(-\gamma)^{t-t_0} = \left(x_0(-\gamma)^{-t_0}\right)(-\gamma)^t = const \cdot (-\gamma)^t.$$

Jako analogii tohoto výsledku budeme hledat řešení rovnice (3.36) ve tvaru $x(t) = \lambda^t$, kde λ je zatím neurčená nenulová konstanta. Dosadíme tuto posloupnost do rovnice (3.36)

$$\lambda^{t+k} + \gamma_{k-1}\lambda^{t+k-1} + \gamma_{k-2}\lambda^{t+k-2} + \cdots + \gamma_1\lambda^{t+1} + \gamma_0\lambda^t = 0$$

a po vynásobení výrazem λ^{-t} dostaneme *charakteristickou rovnici*

$$\lambda^k + \gamma_{k-1}\lambda^{k-1} + \gamma_{k-2}\lambda^{k-2} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0 = 0. \tag{3.38}$$

Řešení této algebraické rovnice se nazývají *charakteristické kořeny.* Povšimněme si, že žádný kořen rovnice (3.38) není nulový, neboť $\gamma_0 \neq 0$.

Příklad: Rovnice druhého řádu.

Uvažujme lineární homogenní diferenční rovnici

$$x(t+2) + bx(t+1) + cx(t) = 0 \tag{3.39}$$

s počátečními podmínkami

$$x(t_0) = \xi_0, \quad x(t_0+1) = \xi_1. \tag{3.40}$$

Aby rovnice (3.39) byla skutečně druhého řádu musí být $c \neq 0$. O počátečních hodnotách ξ_0 a ξ_1 budeme předpokládat, že aspoň jedna z nich je nenulová. V opačném případě by totiž počáteční úloha (3.39), (3.40) měla jedině triviální řešení $x \equiv 0$ při libovolných hodnotách svých parametrů b, c.

Charakteristickou rovnicí je kvadratická rovnice pro neznámou λ

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{3.41}$$

Mohou nastat tři případy.

• **(i)** $b^2 > 4c$. Charakteristická rovnice (3.41) má dva reálné různé kořeny λ_1, λ_2. Označení zvolíme tak, aby $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$, charakteristický kořen λ_1 nazveme *dominatní.* Diferenční rovnice (3.39) má řešení

$$x(t) = A\lambda_1^t + B\lambda_2^t, \tag{3.42}$$

neboť

$$\begin{aligned} x(t+2) + bx(t+1) + cx(t) &= \\ &= A\lambda_1^{t+2} + B\lambda_2^{t+2} + b\left(A\lambda_1^{t+1} + B\lambda_2^{t+1}\right) + c\left(A\lambda_1^t + B\lambda_2^t\right) = \\ &= A\lambda_1^t\left(\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c\right) + B\lambda_2^t\left(\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c\right) = 0 \end{aligned}$$

Konstanty A a B volíme tak, aby byly splňeny počáteční podmínky (3.40), tedy jako řešení soustavy lineárních (algebraických) rovnic

$$\begin{aligned} A\lambda_1^{t_0} + B\lambda_2^{t_0} &= \xi_0 \\ A\lambda_1^{t_0+1} + B\lambda_2^{t_0+1} &= \xi_1. \end{aligned}$$

Determinant této soustavy je

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^{t_0} & \lambda_2^{t_0} \\ \lambda_1^{t_0+1} & \lambda_2^{t_0+1} \end{vmatrix} = (\lambda_1\lambda_2)^{t_0}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0,$$

což znamená, že soustava je jednoznačně řešitelná a že posloupnosti definované vztahy

$$x_1(t) = \lambda_1^t, \quad x_2(t) = \lambda_2^t$$

tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice (3.39).

Posloupnost definovaná vztahem (3.42), kde konstanty A, B jsou dány vztahy

$$A = \frac{\xi_1 - \xi_0\lambda_2}{\lambda_1^{t_0}(\lambda_1 - \lambda_2)}, \qquad B = \frac{\xi_1 - \xi_0\lambda_1}{\lambda_2^{t_0}(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

je řešením počáteční úlohy (3.39), (3.40). Explicitněji můžeme řešení úlohy (3.39), (3.40) vyjádřit formulí
$$x(t)=\frac{\xi_1-\xi_0\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^{t-t_0}-\frac{\xi_1-\xi_0\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2^{t-t_0}.$$

Pokud jsou počáteční podmínky takové, že $\xi_1-\xi_0\lambda_2\neq 0$, můžeme řešení úlohy (3.39), (3.40) přepsat do tvaru

$$x(t)=\frac{\xi_1-\xi_0\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^{t-t_0}\left(1-\frac{\xi_1-\xi_0\lambda_1}{\xi_1-\xi_0\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{t-t_0}\right).$$

Nechť nejprve $|\lambda_1|>|\lambda_2|$. Pak
$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{t-t_0}=0.$$

Odtud je vidět, že v případě $\xi_1-\xi_0\lambda_2\neq 0$ „se pro velká t řešení úlohy (3.39), (3.40) chová jako geometrická posloupnost s kvocientem λ_1“. Chování řešení je tedy pro velká t určeno dominantním charakteristickým kořenem λ_1. Proto vyšetříme jeho znaménko a velikost v závislosti na parametrech b a c.

$b>0$: $\lambda_1=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}<0$ a $|\lambda_1|<1$ právě tehdy, když $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}>-1$, tj. $2-b>\sqrt{b^2-4c}$. Je-li $b\geq 2$, pak nelze tuto nerovnost splnit; je-li $b<2$ pak je tato nerovnost ekvivalentní s nerovností $4-4b+b^2>b^2-4c$, tj. $c>b-1$.

$b<0$: $\lambda_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}>0$. Analogicky jako v předchozím případě zjistíme, že $\lambda_1<1$ právě tehdy, když $b>-2$ a $c>-b-1$.

$b=0$: $\lambda_1=\sqrt{-c}=-\lambda_2$, takže neplatí $|\lambda_1|>|\lambda_2|$.

Celkem dostáváme, že $|\lambda_1|<1$ právě tehdy, když $|b|<2$ a $c>|b|-1$. Ještě poznamenejme, že charakteristické kořeny mají stejné znaménko, pokud $c>0$, a mají různá znaménka, pokud $c<0$.

Pokud $|\lambda_1|=|\lambda_2|$, pak $\lambda_2=-\lambda_1$, neboť charakteristické kořeny jsou různé. Tato situace nastává právě tehdy, když $b=0$, $c<0$; pro charakteristický kořen platí $\lambda_1=\sqrt{-c}$. Řešení úlohy (3.39), (3.40) je v tomto případě tvaru

$$\begin{aligned}x(t)=\frac{\xi_1+\xi_0\sqrt{-c}}{2\sqrt{-c}}\left(\sqrt{-c}\right)^{t-t_0}-\frac{\xi_1-\xi_0\sqrt{-c}}{2\sqrt{-c}}\left(-\sqrt{-c}\right)^{t-t_0}=\\ =\left(\sqrt{-c}\right)^{t-t_0}\left(\frac{1+(-1)^{t-t_0}}{2}\xi_0+\frac{1-(-1)^{t-t_0}}{2\sqrt{-c}}\xi_1\right)\end{aligned}$$

a řešení úlohy (3.39), (3.40) je součinem geometrické posloupnosti s kvocientem $\sqrt{-c}$ a posloupnosti ohraničené, v níž se pravidelně střídají hodnoty ξ_0 a $\dfrac{1}{\sqrt{-c}}\xi_1$.

• **(ii)** $b^2=4c$. Vzhledem k podmínce (3.20) v tomto případě musí být $b\neq 0$. Charakteristická rovnice (3.41) má dvojnásobný kořen $\lambda=-\frac{1}{2}b$ a diferenční rovnice (3.39) má řešení

$$x(t)=\left(-\frac{b}{2}\right)^t(A+Bt), \tag{3.43}$$

neboť

$$\begin{aligned}
&x(t+2)+bx(t+1)+cx(t)= \\
&\quad=\left(-\frac{b}{2}\right)^{t+2}(A+B(t+2))+b\left(-\frac{b}{2}\right)^{t+1}(A+B(t+1))+\frac{b^2}{4}\left(-\frac{b}{2}\right)^{t}(A+Bt)= \\
&\qquad\qquad=\left(-\frac{b}{2}\right)^{t}\left(\frac{b^2}{4}(A+2B+Bt)-\frac{b^2}{2}(A+B+Bt)+\frac{b^2}{4}(A+Bt)\right)=0.
\end{aligned}$$

Konstanty A a B volíme tak, aby byly splněny počáteční podmínky (3.40), tedy jako řešení soustavy lineárních (algebraických) rovnic

$$\begin{aligned}
A\lambda^{t_0} + Bt_0\lambda^{t_0} &= \xi_0 \\
A\lambda^{t_0+1} + B(t_0+1)\lambda^{t_0+1} &= \xi_1.
\end{aligned}$$

Determinant této soustavy je

$$\begin{vmatrix} \lambda^{t_0} & t_0\lambda^{t_0} \\ \lambda^{t_0+1} & (t_0+1)\lambda^{t_0+1} \end{vmatrix} = \lambda^{2t_0}\begin{vmatrix} 1 & t_0 \\ \lambda & (t_0+1)\lambda \end{vmatrix} = \lambda^{2t_0+1} = \left(-\frac{b}{2}\right)^{2t_0+1} \neq 0,$$

což znamená, že soustava je jednoznačně řešitelná a že posloupnosti definované vztahy

$$x_1(t)=\lambda^t, \quad x_2(t)=t\lambda^t$$

tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice (3.39).

Posloupnost definovaná vztahem (3.43), kde konstanty A, B jsou dány vztahy

$$A=\left(-\frac{b}{2}\right)^{-t_0}\left((t_0+1)\xi_0+\frac{2t_0}{b}\xi_1\right), \qquad B=-\left(-\frac{b}{2}\right)^{-t_0}\left(\xi_0+\frac{2}{b}\xi_1\right)$$

je řešením počáteční úlohy (3.39), (3.40). Explicitněji můžeme řešení úlohy (3.39), (3.40) v tomto případě vyjádřit formulí

$$x(t)=\left(-\frac{b}{2}\right)^{t-t_0}\left((t_0-t+1)\xi_0+\frac{2(t_0-t)}{b}\xi_1\right).$$

Řešení diferenční rovnice je v tomto případě součinem geometrické posloupnosti s kvocientem $-\dfrac{b}{2}$ a aritmetické posloupnosti s diferencí $-\left(\xi_0+\dfrac{2}{b}\xi_1\right)$.

• **(iii)** $b^2<4c$. V tomto případě je $c>0$. Charakteristická rovnice (3.41) má v tomto případě komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_{1,2}=-\frac{b}{2}\pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}=\sqrt{c}\left(-\frac{b}{2\sqrt{c}}\pm \mathrm{i}\sqrt{1-\frac{b^2}{4c}}\right)=\sqrt{c}\,(\cos\varphi\pm \mathrm{i}\sin\varphi),$$

kde $\varphi=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{4c-b^2}}{b}\right)$. Je tedy

$$\cos\varphi=-\frac{b}{2\sqrt{c}}, \qquad \sin\varphi=\sqrt{1-\frac{b^2}{4c}},$$

$$\cos 2\varphi = \frac{b^2}{4c} - \frac{4c-b^2}{4c} = \frac{b^2-2c}{2c}, \qquad \sin 2\varphi = 2\left(-\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)\sqrt{1-\frac{b^2}{4c}} = -\frac{b}{\sqrt{c}}\sqrt{1-\frac{b^2}{4c}},$$

$$\sqrt{c}\cos 2\varphi + b\cos\varphi + \sqrt{c} = \frac{b^2-2c}{2\sqrt{c}} - \frac{b^2}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c} = 0,$$

$$\sqrt{c}\sin 2\varphi + b\sin\varphi = -b\sqrt{1-\frac{b^2}{4c}} + b\sqrt{1-\frac{b^2}{4c}} = 0.$$

Nyní můžeme vyjádřit řešení diferenční rovnice (3.39) jako posloupnost

$$x(t) = \sqrt{c}^{\,t}(A\cos t\varphi + B\sin t\varphi), \tag{3.44}$$

neboť

$$\begin{aligned}
&x(t+2) + bx(t+1) + cx(t) = \\
&\quad = \sqrt{c}^{\,t+2}\big(A\cos(t+2)\varphi + B\sin(t+2)\varphi\big) + b\sqrt{c}^{\,t+1}\big(A\cos(t+1)\varphi + B\sin(t+1)\varphi\big) + \\
&\qquad\qquad + \sqrt{c}^{\,t+1}c(A\cos t\varphi + B\sin t\varphi) = \\
&= \sqrt{c}^{\,t+1}\Big(A\big(\sqrt{c}\,\cos(t+2)\varphi + b\cos(t+1)\varphi + \sqrt{c}\,\cos t\varphi\big) + \\
&\qquad\qquad + B\big(\sqrt{c}\,\sin(t+2)\varphi + b\sin(t+1)\varphi + \sqrt{c}\,\sin t\varphi\big)\Big) = \\
&= \sqrt{c}^{\,t+1}\big(A(\sqrt{c}\,(\cos t\varphi\cos 2\varphi - \sin t\varphi\sin 2\varphi) + b\cos t\varphi\cos\varphi - b\sin t\varphi\sin\varphi + \sqrt{c}\,\cos t\varphi) + \\
&\qquad\qquad + B(\sqrt{c}\,(\sin t\varphi\cos 2\varphi + \cos t\varphi\sin 2\varphi) + b(\sin t\varphi\sin\varphi + \sin t\varphi)\big) = \\
&= \sqrt{c}^{\,t+1}\Big(A\big(\cos t\varphi(\sqrt{c}\,\cos 2\varphi + b\cos\varphi + \sqrt{c}\,) - \sin t\varphi(\sqrt{c}\,\sin 2\varphi + b\sin\varphi)\big) + \\
&\qquad\qquad + B\big(\sin t\varphi(\sqrt{c}\,\cos 2\varphi + b\cos\varphi + \sqrt{c}\,) + cost\varphi(\sqrt{c}\,\sin 2\varphi + b\sin\varphi)\big)\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Konstanty A a B volíme tak, aby byly splňeny počáteční podmínky (3.40), tedy jako řešení soustavy lineárních (algebraických) rovnic

$$\begin{aligned}
A\sqrt{c}^{\,t_0}\cos t_0\varphi \quad &+ B\sqrt{c}^{\,t_0}\sin t_0\varphi &&= \xi_0 \\
A\sqrt{c}^{\,t_0+1}\cos(t_0+1)\varphi &+ B\sqrt{c}^{\,t_0+1}\sin(t_0+1)\varphi &&= \xi_1.
\end{aligned}$$

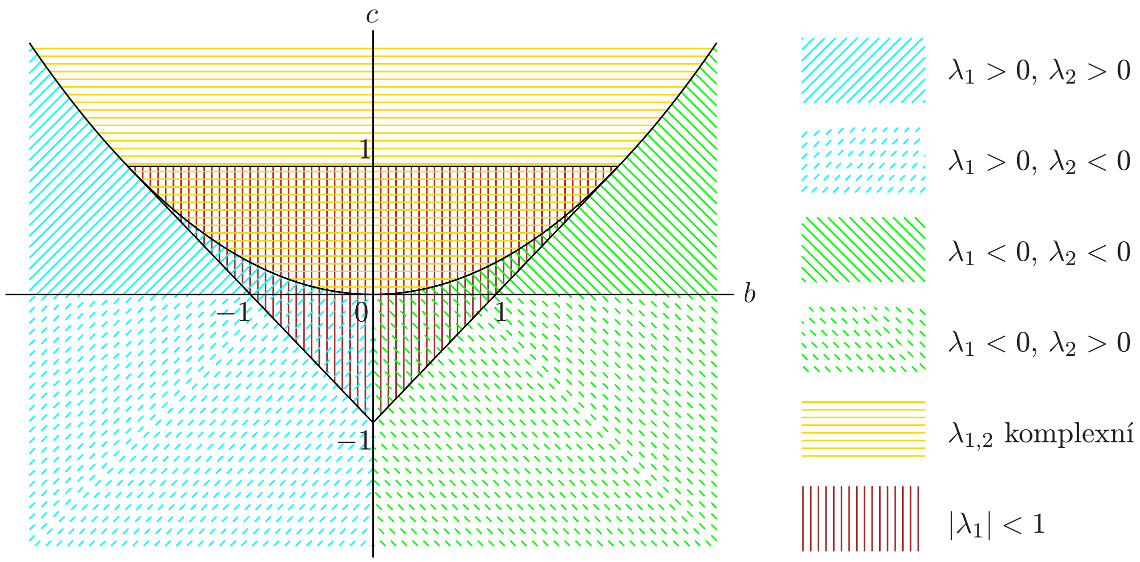
Determinant této soustavy je

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \sqrt{c}^{\,t_0}\cos t_0\varphi & \sqrt{c}^{\,t_0}\sin t_0\varphi \\ \sqrt{c}^{\,t_0+1}\cos(t_0+1)\varphi & \sqrt{c}^{\,t_0+1}\sin(t_0+1)\varphi \end{vmatrix} = \\
&\qquad = c^{t_0}\sqrt{c}\,\big(\cos t_0\varphi\sin(t_0+1)\varphi - \sin t_0\varphi\cos(t_0+1)\varphi\big) = \\
&= c^{t_0}\sqrt{c}\,\big(\cos t_0\varphi(\sin t_0\varphi\cos\varphi + \cos t_0\varphi\sin\varphi) - \sin t_0\varphi(\cos t_0\varphi(\cos t_0\varphi\cos\varphi - \sin t_0\varphi\sin\varphi) = \\
&\qquad\qquad = c^{t_0}\sqrt{c}\,\sin\varphi = c^{t_0}\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2} \neq 0,
\end{aligned}$$

což znamená, že soustava je jednoznačně řešitelná a že posloupnosti definované vztahy

$$x_1(t) = \sqrt{c}^{\,t}\cos t\varphi, \quad x_2(t) = \sqrt{c}^{\,t}\sin t\varphi$$

tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice (3.39).



Obrázek 3.1: Závislost charakteristických kořenů $\lambda_{1,2}$ lineární diferenční rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty $x(t+2) + bx(t+1) + cx(t) = 0$ na koeficientech b, c.

Posloupnost definovaná formulí (3.44), kde konstanty A, B jsou dány vztahy

$$A = \frac{2\sqrt{c}^{\,-t_0}}{\sqrt{4c-b^2}}\big(\sqrt{c}\,\xi_0 \sin(t_0+1)\varphi - \xi_1 \sin t_0\varphi\big), \quad B = \frac{2\sqrt{c}^{\,-t_0}}{\sqrt{4c-b^2}}\big(\xi_1 \cos t_0\varphi - \sqrt{c}\,\xi_0 \cos(t_0+1)\varphi\big)$$

je řešením počáteční úlohy (3.39), (3.40). Explicitněji můžeme řešení úlohy (3.39), (3.40) v tomto případě vyjádřit formulí

$$x(t) = \sqrt{c}^{\,t-t_0}\left(\xi_0 \cos(t-t_0)\varphi + \frac{2\xi_1 + b\xi_0}{\sqrt{4c-b^2}} \sin(t-t_0)\varphi\right).$$

Řešení diferenční rovnice je tedy součinem geometrické posloupnosti s kvocientem $\sqrt{c}$ a posloupnosti ohraničené.

Odtud plyne, že pro $c < 1$ je

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Poněvadž podle předpokladu je alespoň jedna z počátečních hodnot ξ_0, ξ_1 nenulová, tak pro $c > 1$ je

$$-\infty = \liminf_{t\to\infty} x(t) < \limsup_{t\to\infty} x(t) = \infty.$$

Pro $c = 1$ platí

$$-|\xi_0| - \frac{|2\xi_1 + b\xi_0|}{\sqrt{4-b^2}} \le \liminf_{t\to\infty} x(t) < \limsup_{t\to\infty} x(t) \le |\xi_0| + \frac{|2\xi_1 + b\xi_0|}{\sqrt{4-b^2}}.$$

Výsledky analýzy charakteristické rovnice (3.41) lineární homogenní diferenční rovnice druhého řádu (3.39) jsou zobrazeny na obrázku 3.1.

Ještě poznamenejme, že pokud by $c = 0$, rovnice (3.39) by se redukovala na lineární diferenční rovnici prvního řádu, která má řešení

$$x(t) = x(t_0)(-b)^{t-t_0}.$$

Úloha (3.39), (3.40) by pak měla řešení jedině v případě $\xi_1 = -b\xi_0$. ■

Věta 21. *Nechť λ_p je r-násobný kořen charakteristické rovnice* (3.38). *Pak každá z posloupností definovaných vztahem*

$$x(t) = t^q \lambda_p^t, \qquad q = 0, 1, 2, \ldots, r-1$$

je řešením lineární homogenní diferenční rovnice (3.36).

Důkaz: Položíme $\gamma_k = 1$ a polynom na levé straně rovnice (3.38) označíme $P(\lambda)$, tj.

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \lambda^i.$$

Nejprve dokážeme pomocné tvrzení: Ke každému přirozenému číslu s a každému přirozenému číslu $j \in \{0, 1, 2, \ldots, s\}$ existuje polynom $p_{s,j}$ stupně nejvýše s ve dvou proměnných t, λ takový, že

$$\sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^s \lambda^i = \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda).$$

Tvrzení dokážeme úplnou indukcí vzhledem k proměnné s. Pro $s = 0$ je

$$\sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^0 \lambda^i = \sum_{i=0}^{k} \gamma_i \lambda^i = P(\lambda) = 1P^{(0)}(\lambda),$$

tedy $p_{0,0} \equiv 1$.

Indukční krok je obsažen ve výpočtu:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^{s+1} \lambda^i &= \sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^s (t+i) \lambda^i = t \sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^s \lambda^i + \lambda \sum_{i=1}^{k} \gamma_i (t+i)^s i \lambda^{i-1} = \\
&= t \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \sum_{i=1}^{k} \gamma_i (t+i)^s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \lambda^i = \\
&= t \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \sum_{i=1}^{k} \gamma_i (t+i)^s \lambda^i = \\
&= t \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(\sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^s \lambda^i - \gamma_0 t^s \right) = \\
&= t \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(\sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) - \gamma_0 t^s \right) = \\
&= t \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \sum_{j=0}^{s} \left(\frac{\partial p_{s,j}(t,\lambda)}{\partial \lambda} P^{(j)}(\lambda) + p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j+1)}(\lambda) \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{s} \left(t p_{s,j}(t,\lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,j}(t,\lambda)}{\partial \lambda} \right) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \sum_{j=1}^{s+1} p_{s,j-1}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \left(tp_{s,0}(t,\lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,0}(t,\lambda)}{\partial \lambda} \right) P(\lambda) + \\
+ \sum_{j=1}^{s} \left(tp_{s,j}(t,\lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,j}(t,\lambda)}{\partial \lambda} + \lambda p_{s,j-1}(t,\lambda) \right) P^{(j)}(\lambda) + \\
+ \lambda p_{s,s}(t,\lambda) P^{(s+1)}(\lambda).
\end{aligned}
$$

Stačí tedy položit

$$
\begin{aligned}
p_{s+1,0}(t,\lambda) &= tp_{s,0}(t,\lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,0}(t,\lambda)}{\partial \lambda}, \\
p_{s+1,j}(t,\lambda) &= tp_{s,j}(t,\lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,j}(t,\lambda)}{\partial \lambda} + \lambda p_{s,j-1}(t,\lambda) \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, s, \\
p_{s+1,s+1}(t,\lambda) &= \lambda p_{s,s}(t,\lambda)
\end{aligned}
$$

a pomocné tvrzení je dokázáno.

Nechť nyní λ_p je r-násobný kořen charakteristické rovnice. Pak je také kořenem derivací polynomu P až do řádu $r-1$, tj.

$$P^{(j)}(\lambda_p) = 0 \quad \text{pro } j = 0, 1, 2, \ldots, r-1.$$

Nyní pro $x(t) = t^q \lambda_p^t$, $q \in \{0, 1, 2, \ldots, r-1\}$, podle pomocného tvrzení platí

$$\sum_{i=0}^{k} \gamma_i x(t+i) = \sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^q \lambda_p^{t+i} = \lambda^t \sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^q \lambda_p^i = \lambda^t \sum_{j=0}^{q} p_{q,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) = 0. \qquad \square$$

Důsledek 6. *Nechť* $\lambda_c = a(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ *je* r*-násobný komplexní kořen charakteristické rovnice* (3.38)*. Pak každá z posloupností definovaných některým ze vztahů*

$$x_1(t) = t^q a^t \cos t\varphi, \quad x_2(t) = t^q a^t \sin t\varphi, \qquad q = 0, 1, 2, \ldots, r-1$$

je řešením lineární homogenní diferenční rovnice (3.36)*.*

Důkaz: Poněvadž polynom na levé straně rovnice (3.38) má reálné koeficienty, je také komplexně sdružené číslo $\overline{\lambda}_c = a(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)$ kořenem charakteristické rovnice (3.38) a má stejnou násobnost r. Podle Věty 21 (v níž jsme nepředpokládali, že by kořen charakteristické rovnice byl reálný), je každá z posloupností definovaných vztahem

$$\tilde{x}_1(t) = t^q a^t(\cos t\varphi + \mathrm{i}\sin t\varphi), \quad \tilde{x}_2(t) = t^q a^t(\cos t\varphi - \mathrm{i}\sin t\varphi), \qquad q = 0, 1, 2, \ldots, r-1$$

řešením rovnice (3.36). Podle principu superpozice jsou také posloupnosti

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\big(\tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t)\big), \quad x_2(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_2(t)\big)$$

řešením této rovnice. $\square$

Důsledek 7. *Každému reálnému r-násobnému charakteristickému kořenu λ odpovídá r řešení lineární homogenní rovnice* (3.36)

$$\lambda^t,\ t\lambda^t,\ t^2\lambda^t, \dots,\ t^{r-1}\lambda^t$$

a každému komplexnímu r-násobnému charakteristickému kořenu $a(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ odpovídá $2r$ řešení lineární homogenní rovnice (3.36)

$$a^t\cos t\varphi,\ ta^t\cos t\varphi,\ t^2a^t\cos t\varphi, \dots,\ t^{r-1}a^t\cos t\varphi,$$

$$a^t\sin t\varphi,\ ta^t\sin t\varphi,\ t^2a^t\sin t\varphi, \dots,\ t^{r-1}a^t\sin t\varphi.$$

Důsledek 8. *Nechť*

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k_1}$$

jsou všechny jednoduché reálné různé charakteristické kořeny,

$$\lambda_{k_1+1}, \lambda_{k_1+2}, \dots, \lambda_{k_2}$$

jsou všechny reálné různé charakteristické kořeny, které mají násobnosti $r_{k_1+1}, r_{k_1+2}, \dots, r_{k_2}$ (v tomto pořadí) a

$$a_{k_2+1}(\cos\varphi_{k_2+1} + \mathrm{i}\sin\varphi_{k_2+1}), a_{k_2+2}(\cos\varphi_{k_2+2} + \mathrm{i}\sin\varphi_{k_2+2}), \dots, a_{k_3}(\cos\varphi_{k_3} + \mathrm{i}\sin\varphi_{k_3})$$

jsou všechny komplexní charakteristické kořeny takové, že žádné dva z nich nejsou komplexně sdružené a mají násobnosti $r_{k_2+1}, r_{k_2+2}, \dots, r_{k_3}$ (v tomto pořadí). Přitom samozřejmě platí

$$k_1 + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} r_i + 2\sum_{i=k_2+1}^{k_3} r_i = k.$$

Pak posloupnost definovaná vztahem

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k_1} A_i\lambda_i^t + \sum_{i=k_1+1}^{k_2}\sum_{j=0}^{r_i-1} B_{ij}t^j\lambda_i^t + \sum_{i=k_2+1}^{k_3}\sum_{j=0}^{r_i-1} C_{ij}t^ja_i^t\cos t\varphi_i + \sum_{i=k_2+1}^{k_3}\sum_{j=0}^{r_i-1} D_{ij}t^ja_i^t\sin t\varphi_i, \tag{3.45}$$

kde $A_i, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}$ jsou konstanty, je řešením lineární homogenní rovnice (3.36).

Nechť existuje charakteristický kořen, jehož modul (absolutní hodnota) je větší, než moduly všech ostatních charakteristických kořenů. Takový charakteristický kořen musí být reálný a jednoduchý, můžeme ho tedy označit λ_1. Platí

$$|\lambda_1| > |\lambda_i| \text{ pro } i = 2, 3, \dots, k_2, \qquad |\lambda_1| > a_i \text{ pro } i = k_2+1, k_2+2, \dots, k_3.$$

Charakteristický kořen λ_1 s těmito vlastnostmi nazveme *ryze dominantní.* Nyní pro řešení $x(t)$ rovnice (3.36) definované vztahem (3.45) za předpokladu $A_1 \neq 0$ platí

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x(t)}{A_1\lambda_1^t} = \lim_{t\to\infty}\Bigg(1 + \sum_{i=2}^{k_1}\frac{A_i}{A_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^t + \sum_{i=k_1+1}^{k_2}\sum_{j=0}^{r_i-1}\frac{B_{ij}}{A_1}t^j\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^t +$$
$$+ \sum_{i=k_2+1}^{k_3}\sum_{j=0}^{r_i-1}\frac{C_{ij}}{A_1}t^j\left(\frac{a_i}{\lambda_1}\right)^t\cos t\varphi_i + \sum_{i=k_2+1}^{k_3}\sum_{j=0}^{r_i-1}\frac{D_{ij}}{A_1}t^j\left(\frac{a_i}{\lambda_1}\right)^t\sin t\varphi_i\Bigg) = 1.$$

Dostáváme tak

Důsledek 9. *Pokud existuje ryze dominantní charakteristický kořen* λ_1 *a konstanta* A_1 *v řešení* (3.45) *rovnice* (3.36) *je nenulová, pak toto řešení je asymptoticky ekvivalentní s geometrickou posloupností s kvocientem* λ_1.

Řekneme, že charakteristický kořen je *dominantní,* pokud jeho modul není menší než modul jakéhokoliv charakteristického kořene, tj. dominantní charakteristický kořen má maximální modul. Označme tento maximální modul symbolem Λ.

Nechť jsou charakteristické kořeny označeny jako v Důsledku 8 a navíc platí

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq \cdots \geq |\lambda_{k_1}|,$$

$$|\lambda_{k_1+1}| \geq |\lambda_{k_1+2}| \geq \cdots \geq |\lambda_{k_2}|, \quad a_{k_2+1} \geq a_{k_2+2} \geq \cdots \geq a_{k_3}.$$

Položme

$$l_1 = \begin{cases} 2, & \Lambda = |\lambda_2|, \\ 1, & \Lambda = |\lambda_1| > |\lambda_2|, \\ 0, & \Lambda > |\lambda_1|, \end{cases} \quad l_2 = \begin{cases} \max\big\{i \in \{k_2+1, k_2+2, \ldots, k_3\} : a_i = \Lambda\big\}, & \Lambda = a_{k_2+1}, \\ k_2, & \Lambda > a_{k_2+1}. \end{cases}$$

Nechť dominantní charakteristické kořeny jsou jednoduché, tj. $|\lambda_{k_1+1}| < \Lambda$ a pokud $l_2 > k_2$ tak $\max\big\{r_i : i \in \{k_2+1, k_2+2, \ldots, l_2\}\big\} = 1$. Označme

$$y(t) = \sum_{i=1}^{l_1} A_i (\operatorname{sgn} \lambda_i)^t + \sum_{i=k_2+1}^{l_2} (C_{i0} \cos t\varphi_i + D_{i0} \sin t\varphi_i).$$

Pak

$$\frac{x(t)}{\Lambda^t} - y(t) = \sum_{i=l_1+1}^{k_1} A_i \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^t + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \sum_{j=0}^{r_i-1} B_{ij} t^j \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^t +$$
$$+ \sum_{i=l_2+1}^{k_3} \sum_{j=0}^{r_i-1} C_{ij} t^j \left(\frac{a_i}{\Lambda}\right)^t \cos t\varphi_i + \sum_{i=l_2+1}^{k_3} \sum_{j=0}^{r_i-1} D_{ij} t^j \left(\frac{a_i}{\Lambda}\right)^t \sin t\varphi_i.$$

Limita pro $t \to \infty$ posloupnosti na pravé straně této rovnosti je rovna 0. To — zhruba řečeno — znamená, že „pro dostatečně velké t se řešení rovnice (3.36) chová jako posloupnost y“.

Poněvadž pro libovolné t platí nerovnosti

$$-\infty < -\sum_{i=1}^{l_1} |A_i| - \sum_{i=k_2+1}^{l_2} \big(|C_{i0}| + |D_{i0}|\big) \leq y(t) \leq \infty < -\sum_{i=1}^{l_1} |A_i| + \sum_{i=k_2+1}^{l_2} \big(|C_{i0}| + |D_{i0}|\big) < \infty,$$

je

$$-\infty < m = \liminf_{t\to\infty} y(t) \leq \limsup_{t\to\infty} = M < \infty,$$

pro řešení $x(t)$ rovnice (3.36) definované rovností (3.45) platí

$$m\Lambda^t \leq x(t) \leq M\Lambda^t.$$

3.2.4 Rovnice s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

Uvažujme nehomogenní lineární diferenční rovnici k-tého řádu druhého typu

$$x(t+k) + \gamma_{k-1}x(t+k-1) + \cdots + \gamma_1 x(t+1) + \gamma_0 = b(t) \tag{3.46}$$

a k ní přidruženou lineární homogenní rovnici (3.36). Označme polynomiální operátor posunu z levé strany operátorové rovnice (3.37) symbolem P^Σ; homogenní rovnici (3.36) tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$P^\Sigma x(t) \equiv 0 \quad \text{nebo} \quad P^\Sigma x = 0,$$

a nehomogenní rovnici ve tvaru

$$P^\Sigma x(t) = b(t) \quad \text{nebo} \quad P^\Sigma x = b.$$

Definice 20. Nechť $p \in \mathcal{P}$ je posloupnost, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$ jsou konstanty takové, že $\beta_0 \neq 0 \neq \beta_l$, a nechť R^Σ je polynomiální operátor posunu, $R^\Sigma = \sum_{i=0}^{l} \beta_i \cdot^{\sigma^i}$. Řekneme, že operátor R^Σ je *anihilátor* posloupnosti p, pokud

$$R^\Sigma p \equiv 0.$$

Podle této terminologie je P^Σ anihilátorem každého řešení homogenní rovnice (3.36).

Nechť existuje anihilátor $Q^\Sigma = \sum_{i=0}^{l} \beta_i \cdot^{\sigma^i}$ posloupnosti b, která je na pravé straně nehomogenní rovnice (3.46). To znamená, že b je řešením nějaké lineární homogenní rovnice s konstatntními koeficienty, takže podle Důsledku 7 je posloupnost b lineární kombinací výrazů κ^t, $t^m\kappa^t$, $\cos t\psi$, $\sin t\psi$, $t^n \cos t\psi$, $t^n \sin t\psi$. Nechť dále y je řešením nehomogenní rovnice (3.46). Pak platí

$$Q^\Sigma P^\Sigma y \equiv 0. \tag{3.47}$$

To znamená, že řešení nehomogenní lineární rovnice k-tého řádu je současně řešením lineární rovnice $(k+l)$-tého řádu.

Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, $p \leq k$, jsou charakteristické kořeny homogenní rovnice

$$P^\Sigma x \equiv 0$$

a $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$, $q \leq l$, jsou charakteristické kořeny homogenní rovnice

$$Q^\Sigma x \equiv 0.$$

Nyní rozlišíme dva případy.

Případ 1: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} \cap \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q\} = \emptyset$. V tomto případě můžeme psát řešení nehomogenní rovnice podle tabulky 3.2. Takové obecně zapsané řešení dosadíme do rovnice (3.46) a vypočítáme konstanty C_j, D_j.

Případ 2: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} \cap \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q\} \neq \emptyset$. V tomto případě nejprve najdeme obecné řešení homogenní rovnice (3.47) a vynecháme v něm všechny členy, které se vyskytují v obecném řešení přidružené homogenní rovnice (3.36). Tím dostaneme řešení nehomogenní rovnice (3.46) s neurčitými koeficienty, které určíme dosazením do původní rovnice (3.46).

$b(t)$	tvar řešení
a^t	$C_1 a^t$
t^m	$C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_m t^m$
$t^m a^t$	$a^t \left(C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_m t^m\right)$
$\sin \psi t,\ \cos \psi t$	$C_1 \sin \psi t + C_2 \cos \psi t$
$a^t \sin \psi t,\ a^t \cos \psi t$	$a^t \left(C_1 \sin \psi t + C_2 \cos \psi t\right)$
$a^t t^m \sin \psi t,\ a^t t^m \cos \psi t$	$a^t [(C_0 + C_1 t + \cdots + C_m t^m) \sin \psi t +$ $+ (D_0 + D_1 t + \cdots + D_m t^m) \cos \psi t]$

Tabulka 3.2: Tvary řešení nehomogenní rovnice (3.46) pro různé pravé strany b.

3.3 Systémy lineárních rovnic prvního řádu

Nechť všechny posloupnosti a_{ij}, b_i, $i, j = 1, 2, \ldots, k$ mají stejný definiční obor. *Systém k lineárních diferenčních rovnic (k-rozměrný lineární systém) prvního řádu* je soustava rovnic tvaru

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1k} x_k + b_1, \\ \Delta x_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2k} x_k + b_2, \\ &\vdots \\ \Delta x_k &= a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \cdots + a_{kk} x_k + b_k. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Pokud jsou všechny posloupnosti b_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ nulové, systém se nazývá *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní.*

Zavedeme vektorové posloupnosti $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ a maticovou posloupnost A,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_k(t) \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1k}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2k}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}(t) & a_{k2}(t) & \ldots & a_{kk}(t) \end{pmatrix}$$

Systém rovnice (3.48) můžeme nyní stručně zapsat jako jednu vektorovou rovnici ve tvaru

$$\Delta \boldsymbol{x} = \mathsf{A}(t) \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b(t)}. \tag{3.49}$$

Tuto explicitní diferenční rovnici (systém explicitních diferenčních rovnic) prvního typu můžeme zapsat ve tvaru vektorové rekurentní formule (systému rekurentních formulí)

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{x}(t) + \mathsf{A}(t) \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t),$$

nebo

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(t)\big) \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t). \tag{3.50}$$

Vektorová rovnice (3.49) je k-rozměrnou analogií lineární diferenční rovnice prvního řádu (3.6), vektorová rekurentní formule (3.50) je k-rozměrnou analogií rekurentní formule (3.8). Toto pozorování ukazuje, že teorie systémů lineárních diferenčních rovnic je zobecněním teorie lineárních diferenčních rovnic; nebo naopak, teorie lineárních rovnic je speciálním případem teorie lineárních systémů pro $k = 1$.

Definice 21. Řekneme, že maticová posloupnost A je *regresivní,* pokud pro všechny indexy t z jejího definičního oboru platí, že matice $\mathsf{I} + \mathsf{A}(t)$ je regulární.

Označíme $\mathsf{Q}(t) = \mathsf{I} + \mathsf{A}(t)$ a soustavu rekurentních formulí (3.50) přepíšeme ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Q}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t). \tag{3.51}$$

Nechť t_0 je libovolný index z definičního oboru $\operatorname{Dom}\mathsf{A}$ maticové posloupnosti A takový, že také $t_0 - 1 \in \operatorname{Dom}\mathsf{A}$. Je-li maticová posloupnost A regresivní, pak je matice $\mathsf{Q}(t_0)$ regulární a můžeme jednoznačně vypočítat

$$\boldsymbol{x}(t_0 - 1) = \mathsf{Q}(t_0 - 1)^{-1}\big(\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{b}(t_0 - 1)\big).$$

Tím jsme ukázali, že platí následující

Věta 22. *Je-li maticová posloupnost* A *regresivní, pak pro každý vektor* $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^k$ *má rovnice* (3.49) *s počáteční podmínkou* $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}$ *jediné řešení, které je definováno na společném definičním oboru maticové posloupnosti* A *a vektorové posloupnosti* $\boldsymbol{b}$*.*

3.3.1 Homogenní systém a fundamentální matice

Uvažujme homogenní systém

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{Q}(t)\boldsymbol{x}(t). \tag{3.52}$$

Posloupnost nulových vektorů $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{o}$ je řešením této rovnice, neboť $\mathsf{Q}(t)\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$.

Dále platí *princip superpozice*: lineární kombinace řešení rovnice (3.52) je také jejím řešením. Pro libovolná dvě řešení $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ systému (3.52) a libovolné konstanty α, β totiž platí

$$\begin{aligned}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y})(t+1) &= \alpha\boldsymbol{x}(t+1) + \beta\boldsymbol{y}(t+1) = \alpha\mathsf{Q}(t)\boldsymbol{x}(t) + \beta\mathsf{Q}(t)\boldsymbol{y}(t) = \\ &= \mathsf{Q}(t)(\alpha\boldsymbol{x})(t) + \mathsf{Q}(t)(\beta\boldsymbol{y})(t) = \mathsf{Q}(t)(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y})(t).\end{aligned}$$

Množina všech řešení rovnice (3.52) tedy tvoří vektorový prostor. Určíme jeho dimenzi v případě, že matice $\mathsf{Q}(t)$ je regulární pro každý index t z definičního oboru, tj. v případě, že každá počáteční úloha pro rovnici (3.52) je jednoznačně řešitelná.

V k-rozměrném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^k$ existuje jeho báze $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e_k}$, tvořená lineárně nezávislými vektory. Označme $\boldsymbol{z_i}$ řešení rovnice (3.52) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{z_i}(t_0) = \boldsymbol{e_i}$. Pak jsou posloupnosti $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \ldots, \boldsymbol{z_k}$ lineárně nezávislé, neboť vektory $\boldsymbol{z_1}(t_0), \boldsymbol{z_2}(t_0), \ldots, \boldsymbol{z_k}(t_0)$ jsou lineárně nezávislé. To znamená, že dimenze prostoru řešení rovnice (3.52) je alespoň k.

Je-li $\boldsymbol{x}$ libovolné řešení rovnice (3.52), pak vektor $\boldsymbol{x}(t_0) \in \mathbb{R}^k$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů, tj. existují konstanty $c_1, c_2, \ldots, c_k$ takové, že

$$\boldsymbol{x}(t_0) = c_1\boldsymbol{e_1} + c_2\boldsymbol{e_2} + \cdots + c_k\boldsymbol{e_k} = c_1\boldsymbol{z_1}(t_0) + c_2\boldsymbol{z_2}(t_0) + \cdots + c_k\boldsymbol{z_k}(t_0).$$

Z principu superpozice plyne, že také vektorová posloupnost

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1\boldsymbol{z_1}(t) + c_2\boldsymbol{z_2}(t) + \cdots + c_k\boldsymbol{z_k}(t)$$

je řešením rovnice (3.52), které splňuje stejnou počáteční podmínku, jako řešení $\boldsymbol{x}$. Z jednoznačnosti řešení nyní nyní plyne, že $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ a tedy že řešení $\boldsymbol{x}$ je lineární kombinací posloupností $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \ldots, \boldsymbol{z_k}$. To znamená, že tyto posloupnosti tvoří bázi prostoru řešení rovnice (3.52).

Dostáváme tak závěr:

Věta 23. *Nechť matice* $\mathsf{Q}(t)$ *je regulární pro každý index* t *z definičního oboru. Pak množina všech řešení lineárního homogenního* k*-rozměrného systému* (3.52) *tvoří vektorový prostor dimenze* k*.*

Definice 22. Báze prostoru řešení lineárního homogenního systému (3.52) se nazývá *fundamentální systém řešení.*

Bázi vektorového prostoru $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_k}$ můžeme vybrat tak, že j-tý vektor $\boldsymbol{e_j}$ má všechny složky nulové s výjimkou j-té; vektory $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_k}$ tvoří „standardní nula-jedničkovou bázi“.

Vektorové posloupnosti $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \dots, \boldsymbol{z_k}$ tvořící fundamentální systém řešení můžeme uspořádat do maticové posloupnosti

$$\mathsf{Z}(t) = \big(\boldsymbol{z_1}(t), \boldsymbol{z_2}(t), \dots, \boldsymbol{z_k}(t)\big);$$

sloupce matice $\mathsf{Z}(t)$ jsou vektory $\boldsymbol{z_1}(t), \boldsymbol{z_2}(t), \dots, \boldsymbol{z_k}(t)$. Poněvadž každá z těchto posloupností splňuje počáteční úlohu

$$\boldsymbol{z_i}(t+1) = \mathsf{Q}(t)\boldsymbol{z_i}(t), \quad \boldsymbol{z_i}(t_0) = \boldsymbol{e_i},$$

splňuje maticová posloupnost Z relace

$$\mathsf{Z}(t+1) = \mathsf{Q}(t)\mathsf{Z}(t), \quad \mathsf{Z}(t_0) = \mathsf{I}. \tag{3.53}$$

Definice 23. Řešení Z počáteční úlohy (3.53) se nazývá *fundamentální matice systému* (3.52).

Matice $\mathsf{Z}(t_0)$ jakožto matice jednotková je regulární. Je-li matice $\mathsf{Q}(t)$ regulární pro každý index t, pak jsou také matice

$$\begin{aligned}&\mathsf{Z}(t_0+1) = \mathsf{Q}(t_0)\mathsf{Z}(t_0) = \mathsf{Q}(t_0)\\ &\qquad\qquad \text{a} \quad \mathsf{Z}(t_0-1) = \mathsf{Q}(t_0-1)^{-1}\mathsf{Z}(t_0) = \mathsf{Q}(t_0-1)^{-1} \text{ (pokud } t_0-1 \in \operatorname{Dom}\mathsf{Q})\end{aligned}$$

regulární, matice

$$\mathsf{Z}(t_0+2) = \mathsf{Q}(t_0+1)\mathsf{Q}(t_0) \quad \text{a} \quad \mathsf{Z}(t_0-2) = \mathsf{Q}(t_0-2)^{-1}\mathsf{Q}(t_0-1)^{-1}$$

jsou také regulární, atd. To znamená, že fundamentální matice systému (3.52) je regulární v každém indexu t_0. Fundamentální matici systému (3.52) můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathsf{Z}(t) = \begin{cases} \mathsf{Q}(t-1)\mathsf{Q}(t-2)\cdots\mathsf{Q}(t_0), & t > t_0,\\ \mathsf{I}, & t = t_0,\\ \mathsf{Q}(t)^{-1}\mathsf{Q}(t+1)^{-1}\cdots\mathsf{Q}(t_0-2)^{-1}\mathsf{Q}(t_0-1)^{-1}, & t < t_0\end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \mathsf{Q}(t-1)\mathsf{Q}(t-2)\cdots\mathsf{Q}(t_0), & t > t_0,\\ \mathsf{I}, & t = t_0,\\ \big(\mathsf{Q}(t_0-1)\mathsf{Q}(t_0-2)\cdots\mathsf{Q}(t)\big)^{-1}, & t < t_0.\end{cases}$$

Pravou stranu této rovnosti označíme $\prod\limits_{i=t_0}^{t-1} \mathsf{Q}(i)$. Tímto způsobem také zavádíme konvenci o pořadí násobení matic za symbolem pro součin – s rostoucím indexem i násobíme již vytvořený součin matic zleva maticí s indexem i.

Každé řešení rovnice (3.52) je lineární kombinací posloupností z fundamentálního systému $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \dots, \boldsymbol{z_k}$. To znamená, že ke každému řešení rovnice (3.52) existují konstanty

$c_1, c_2, \dots, c_k$, že

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{z_1}(t) + c_2\boldsymbol{z_2}(t) + \cdots + c_k\boldsymbol{z_k}(t) = \big(\boldsymbol{z_1}(t), \boldsymbol{z_2}(t), \dots, \boldsymbol{z_k}(t)\big)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \mathsf{Z}(t)\boldsymbol{c}.$$

Platí tedy

Věta 24. *Nechť matice* $\mathsf{Q}(t)$ *je regulární pro každý index* $t \in \operatorname{Dom}\mathsf{Q}$. *Každé řešení rovnice* (3.52) *je tvaru* $\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Z}(t)\boldsymbol{c}$, *kde* $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k$ *je nějaký konstantní vektor a* Z *je fundamentální matice systému* (3.52), *tedy řešení počáteční úlohy* (3.53).

Partikulární řešení počáteční úlohy pro rovnici (3.52) *je*

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Z}(t)\boldsymbol{x}(t_0).$$

Příklad. Uvažujme jednorozměrný lineární systém, tedy skalární rovnici

$$x(t+1) = q(t)x(t). \tag{3.54}$$

Počáteční úloha (3.53) bude v tomto případě také úlohou pro (skalární) posloupnost z,

$$z(t+1) = q(t)z(t), \quad z(t_0) = 1,$$

neboli

$$\Delta z = \big(q(t) - 1\big)z, \quad z(t_0) = 1.$$

Fundamentální maticí systému (3.54) tedy bude exponenciální posloupnost $e_{q-1}(t, t_0)$ (viz definici 18). Podle věty 15 je

$$z(t) = \prod_{i=t_0}^{t-1} q(i).$$

■

Analogicky jako v případě (skalární) lineární rovnice (sr. Definice 18) můžeme definovat maticovou exponenciální posloupnost:

Definice 24. Nechť maticová posloupnost A je regresivní. *Maticovou exponenciální posloupnost příslušnou k posloupnosti* A *s počátkem* $t_0 \in \operatorname{Dom}\mathsf{A}$ definujeme jako jediné řešení počáteční úlohy pro lineární systém

$$\Delta\mathsf{Z} = \mathsf{A}(t)\mathsf{Z}, \quad \mathsf{Z}(t_0) = \mathsf{I}. \tag{3.55}$$

Její t-tý člen označíme $e_{\mathsf{A}}(t, t_0)$.

Poněvadž $\mathsf{Q}(t) = \mathsf{I} + \mathsf{A}(t)$, jsou úlohy (3.55) a (3.53) ekvivalentní. To znamená, že fundamentální matice

$$\mathsf{Z}(t) = \mathrm{e}_{\mathsf{A}}(t, t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(i)\big)$$

a řešení počáteční úlohy pro rovnici (3.52) můžeme také zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = e_{\mathsf{A}}(t, t_0)\boldsymbol{x}(t_0).$$

Podobně jako v 3.1.1 zavedeme na množině regresivních maticových posloupností operace $\oplus$ a $\ominus$ vztahy

$$\mathsf{A} \ominus \mathsf{B}(t) = \mathsf{A}(t) + \mathsf{B}(t) + \mathsf{A}(t)\mathsf{B}(t), \quad \ominus\mathsf{A}(t) = -\mathsf{A}(t)\big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(t)\big)^{-1}.$$

Množina regresivních posloupností s těmito operacemi opět tvoří grupu, která však již není komutativní.

Pro maticovou exponenciální posloupnost platí

1. $e_{\mathsf{O}}(t, t_0) = \mathsf{I}$, $e_{\mathsf{A}}(t, t) = \mathsf{I}$,
2. $e_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{B}}(t, t_0) = e_{\mathsf{A}}(t, t_0)e_{\mathsf{B}}(t, t_0)$,
3. $e_{\ominus\mathsf{A}}(t, t_0) = \big(e_{\mathsf{A}}(t, t_0)\big)^{-1}$,
4. $e_{\mathsf{A}}(t, s)e_{\mathsf{A}}(s, t_0) = e_{\mathsf{A}}(t, t_0)$.

3.3.2 Nehomogenní systém a metoda variace konstant

Rovnice (3.52) se nazývá *přidružená homogenní rovnice k nehomogenní rovnici* (3.51).

Budeme předpokládat, že matice Q je regulární v každém indexu ze svého definičního oboru. Nechť Z je fundamentální matice přidružené homogenní rovnice. Řešení nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Z}(t)\boldsymbol{c}(t); \tag{3.56}$$

řešení tedy předpokládáme v analogickém tvaru, jako má řešení přidružené homogenní rovnice podle věty 24 s tím rozdílem, že vektor $\boldsymbol{c}$ není konstantní – konstanty varírujeme. Poněvadž vektor $\boldsymbol{x}$ má být řešením rovnice (3.51), musí platit

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{Q}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t) = \mathsf{Q}(t)\mathsf{Z}(t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

a současně podle (3.56)

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{Z}(t+1)\boldsymbol{c}(t+1) = \mathsf{Q}(t)\mathsf{Z}(t)\boldsymbol{c}(t+1),$$

neboť matice Z je řešením úlohy (3.53). Odtud dostáváme

$$\mathsf{Q}(t)\mathsf{Z}(t)\boldsymbol{c}(t+1) = \mathsf{Q}(t)\mathsf{Z}(t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{b}(t),$$

neboli

$$\mathsf{Q}(t)\mathsf{Z}(t)\big(\boldsymbol{c}(t+1) - \boldsymbol{c}(t)\big) = \boldsymbol{b}(t).$$

Vektorová posloupnost $\boldsymbol{c}$ tedy splňuje rovnici

$$\boldsymbol{c}(t+1) - \boldsymbol{c}(t) = \Delta\boldsymbol{c}(t) = \mathsf{Z}(t)^{-1}\mathsf{Q}(t)^{-1}\boldsymbol{b}(t),$$

takže podle (1.25) platí

$$\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{c}(t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} \mathsf{Z}(i)^{-1}\mathsf{Q}(i)^{-1}\boldsymbol{b}(i);$$

přitom $\boldsymbol{c}(t_0)$ je nějaký konstantní vektor.

Řešení nehomogenní rovnice (3.51) je tedy tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Z}(t)\boldsymbol{c}(t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} \mathsf{Z}(t)\mathsf{Z}(i)^{-1}\mathsf{Q}(i)^{-1}\boldsymbol{b}(i). \tag{3.57}$$

První sčítanec na pravé straně této rovnosti je podle věty 24 obecným řešením přidružené homogenní rovnice (3.52). Označme druhý sčítanec symbolem $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$. Pak platí

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0) = \boldsymbol{o},$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{x}}(t+1) &= \sum_{i=t_0}^{t} \mathsf{Z}(t+1)\mathsf{Z}(i)^{-1}\mathsf{Q}(i)^{-1}\boldsymbol{b}(i) = \sum_{i=t_0}^{t} \mathsf{Q}(t)\mathsf{Z}(t)\mathsf{Z}(i)^{-1}\mathsf{Q}(i)^{-1}\boldsymbol{b}(i) = \\ &= \sum_{i=t_0}^{t-1} \mathsf{Q}(t)\mathsf{Z}(t)\mathsf{Z}(i)^{-1}\mathsf{Q}(i)^{-1}\boldsymbol{b}(i) + \mathsf{Q}(t)\mathsf{Z}(t)\mathsf{Z}(t)^{-1}\mathsf{Q}(t)^{-1}\boldsymbol{b}(t) = \mathsf{Q}(t)\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{b}(t).\end{aligned}$$

To znamená, že vektorová posloupnost $\tilde{\boldsymbol{x}}$ je řešením rovnice (3.51) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{o}$.

Ještě si povšimněme, že pro posloupnost $\boldsymbol{x}$ danou rovností (3.57) platí

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \mathsf{Z}(t_0)\boldsymbol{c}(t_0) + \sum_{i=t_0}^{t_0-1} \mathsf{Z}(t)\mathsf{Z}(i)^{-1}\mathsf{Q}(i)^{-1}\boldsymbol{b}(i) = \mathsf{I}\boldsymbol{c}(t_0) + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{c}(t_0).$$

Tímto způsobem jsme odvodili:

Věta 25. *Nechť matice* $\mathsf{Q}(t)$ *je regulární pro každé* t *ze svého definičního oboru. Obecné řešení rovnice* (3.51) *je součtem obecného řešení přidružené homogenní rovnice* (3.52) *a partikulárního řešení rovnice* (3.51)*. Toto řešení lze vyjádřit ve tvaru*

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Z}(t)\boldsymbol{x}(t_0) + \sum_{i=t_0}^{t_-1} \mathsf{Z}(t)\mathsf{Z}(i)^{-1}\mathsf{Q}(i)^{-1}\boldsymbol{b}(i),$$

kde Z *je fundamentální matice přidružené homogenní rovnice* (3.52).

S využitím maticové exponenciální funkce můžeme nyní řešení lineárního systému (3.49) s regresivní maticovou posloupností A zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = e_{\mathsf{A}}(t, t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} e_{\mathsf{A}}(t, i+1)\boldsymbol{b}(i).$$

Příklad. Uvažujme jednorozměrný lineární nehomogenní systém, tedy skalární rovnici

$$x(t+1) = q(t)x(t) + b(t).$$

Podle věty 25 a výsledku příkladu uvedeného za větou 24 je obecným řešením této rovnice posloupnost

$$x(t) = \prod_{i=t_0}^{t-1} q(i) + \sum_{i=t_0}^{t-1} \prod_{j=t_0}^{t-1} q(j) \left(\prod_{j=t_0}^{i-1} q(j) \right)^{-1} \frac{1}{q(i)} b(i) = \prod_{i=t_0}^{t-1} q(i) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} q(j),$$

což je v souladu s větou 16. ■

3.3.3 Systém s konstantní maticí

Uvažujme homogenní lineární systém s konstantní maticí Q, tj. systém tvaru

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{Q}\boldsymbol{x}(t). \tag{3.58}$$

Je-li matice Q regulární, pak má tato rovnice pro libovolnou počáteční hodnotu $\boldsymbol{x}(t_0)$ podle Věty 22 jediné řešení definované na celé množině $\mathbb{Z}$. Toto řešení je tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Q}^{t-t_0}\boldsymbol{x}(t_0). \tag{3.59}$$

Vskutku, $\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{Q}^{t+1-t_0}\boldsymbol{x}(t_0) = \mathsf{Q}\left(\mathsf{Q}^{t-t_0}\boldsymbol{x}(t_0)\right) = \mathsf{Q}\boldsymbol{x}(t)$. Odtud plyne, že fundamentální matice systému (3.58) je

$$\mathsf{Z}(t) = \mathsf{Q}^{t-t_0}\mathsf{I} = \mathsf{Q}^{t-t_0}.$$

Abychom získali nějaký použitelnější tvar řešení systému (3.58), potřebujeme vyjádřit mocniny matice Q.

Matici Q vyjádříme ve tvaru

$$\mathsf{Q} = \mathsf{P}\mathsf{J}\mathsf{P}^{-1},$$

kde P je regulární čtvercová matice dimense k a J je Jordanův kanonický tvar matice, tj. J je blokově diagonální matice

$$\mathsf{J} = \begin{pmatrix} \mathsf{J_1} & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{J_2} & \dots & \mathsf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{J_m} \end{pmatrix},$$

blok $\mathsf{J_i}$ je čtvercová matice dimense k_i; přitom $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = k$. Jednotlivé bloky jsou tvaru

$$\mathsf{J_i} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \mathsf{J_i} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

kde λ je vlastní číslo matice Q. Je-li blok $\mathsf{J_i}$ diagonální, tj. je prvního z uvedených tvarů, řekneme, že vlastní číslo λ je *jednoduchého typu*.

Pro libovolné přirozené číslo n platí

$$\mathsf{J}^n = \begin{pmatrix} \mathsf{J_1}^n & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{J_2}^n & \dots & \mathsf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{J_m}^n \end{pmatrix}.$$

Je-li blok $\mathsf{J_i}$ diagonální, pak

$$\mathsf{J_i}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{pmatrix},$$

má-li blok $\mathsf{J_i}$ nad diagonálou jedničky, pak

$$\mathsf{J_i}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-1} & \dots & \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k_i+2)}{(k_i-1)!}\lambda^{n-k_i+1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dots & \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k_i+3)}{(k_i-2)!}\lambda^{n-k_i+2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & \dots & \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k_i+4)}{(k_i-3)!}\lambda^{n-k_i+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Pro libovolné $t > t_0$ je

$$\mathsf{Q}^{t-t_0} = \mathsf{Q}\mathsf{Q}\cdots\mathsf{Q} = \mathsf{P}\mathsf{J}\mathsf{P}^{-1}\mathsf{P}\mathsf{J}\mathsf{P}^{-1}\cdots\mathsf{P}\mathsf{J}\mathsf{P}^{-1} = \mathsf{P}\mathsf{J}^{t-t_0}\mathsf{P}^{-1}.$$

Odtud a z (3.59) plyne, že řešení rovnice (3.58) je

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{P}\mathsf{J}^{t-t_0}\mathsf{P}^{-1}\boldsymbol{x}(t_0). \tag{3.60}$$

Složky matice $\mathsf{P}\mathsf{J}^{t-t_0}\mathsf{P}^{-1}$ jsou přitom vlastní čísla matice Q v nejvýše $(t-t_0)$-té mocnině, případně vynásobená nějakým polynomem v proměnné t. Odtud můžeme (mimo jiné) odvodit závěr:

Tvrzení 11. Mají-li všechna vlastní čísla regulární matice Q modul (absolutní hodnotu) menší než 1, pak pro každé řešení $\boldsymbol{x}$ systému (3.58) platí

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{o}.$$

3.3.4 Ekvivalence lineární rovnice k-tého řádu a systému lineárních rovnic prvního řádu

Podle Tvrzení 9 je lineární diferenční rovnice k-tého řádu (3.22) ekvivalentní se systémem k lineárních diferenčních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_2(t), \\ x_2(t) &= x_3(t), \\ &\vdots \\ x_{k-1}(t) &= x_k(t), \\ x_k(t) &= -c_0(t)\,x_1(t) - c_1(t)\,x_2(t) - \cdots - c_{k-1}(t)\,x_k(t) + b(t). \end{aligned}$$

Tento systém můžeme opět zapsat ve vektorovém tvaru (3.51), kde maticová posloupnost Q a vektorová posloupnost $\boldsymbol{b}$ jsou dány vztahy

$$\mathsf{Q}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -c_0(t) & -c_1(t) & -c_2(t) & \dots & -c_{k-1}(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

V případě lineárního systému platí i opačné tvrzení – systém k lineárních rovnic prvního řádu je ekvivalentní s lineární rovnicí k-tého řádu. Ukážeme, jak přepsat systém na rovnici pro $k = 2$.

Příklad: Systém dvou lineárních rovnic.
Uvažujme systém rovnic

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + b_1(t), \\ x_2(t+1) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + b_2(t). \end{aligned} \tag{3.61}$$

Budeme předpokládat, že první rovnice je skutečně rovnice pro dvě posloupnosti, tj. že posloupnost a_{12} je v každém indexu nenulová. Za tohoto předpokladu můžeme provést následující výpočet.

V první rovnici tohoto systému budeme psát index $t+1$ místo indexu t, potom za $x_2(t+1)$ dosadíme pravou stranu druhé rovnice a poté dosadíme posloupnost $x_2(t)$ vyjádřenou z první. Dostaneme tak

$$\begin{aligned} x_1(t+2) &= a_{11}(t+1)x_1(t+1) + a_{12}(t+1)x_2(t+1) + b_1(t+1) = \\ &= a_{11}(t+1)x_1(t+1) + a_{12}(t+1)\big(a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + b_2(t)\big) + b_1(t+1) = \\ &= a_{11}(t+1)x_1(t+1) + a_{12}(t+1)a_{21}(t)x_1(t) + \\ &\quad + a_{12}(t+1)a_{22}(t)\frac{x_1(t+1) - a_{11}(t)x_1(t) - b_1(t)}{a_{12}(t)} + a_{12}(t+1)b_2(t) + b_1(t+1) = \\ &= \left(a_{11}(t+1) + \frac{a_{12}(t+1)}{a_{12}(t)}a_{22}(t)\right)x_1(t+1) + \\ &\quad + \frac{a_{12}(t+1)}{a_{12}(t)}\big(a_{12}(t)a_{21}(t) - a_{11}(t)a_{22}(t)\big)x_1(t) + \\ &\quad + b_1(t+1) - \frac{a_{12}(t+1)}{a_{12}(t)}a_{22}(t)b_1(t) + a_{12}(t+1)b_2(t). \end{aligned}$$

To znamená, že první složka řešení systému (3.61) splňuje lineární diferenční rovnici druhého řádu. Analogicky dostaneme, že i druhá složka řešení systému (3.61) splňuje lineární diferenční rovnici druhého řádu

$$\begin{aligned} x_2(t+2) &= \left(\frac{a_{21}(t+1)}{a_{21}(t)}a_{11}(t) + a_{22}(t+1)\right)x_2(t+1) + \\ &\quad + \frac{a_{21}(t+1)}{a_{21}(t)}\big(a_{21}(t)a_{12}(t) - a_{11}(t)a_{22}(t)\big)x_2(t) + \\ &\quad + b_2(t+1) - \frac{a_{21}(t+1)}{a_{21}(t)}a_{11}b_2(t) + a_{21}(t+1)b_1(t) \end{aligned}$$

za předpokladu, že posloupnost a_{21} je v každém indexu nenulová.

Všimněme si ještě lineární diferenční rovnice druhého řádu

$$x(t+2) + c_1x(t+1) + c_0x(t) = b(t). \tag{3.62}$$

Položíme-li $x_1(t) = x(t)$ a $x_2(t) = x(t+1)$, můžeme tuto rovnici přepsat jako systém lineárních diferenčních rovnic

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t), \\ x_2(t+1) &= -c_0x_1(t) - c_1x_2(t) + b(t). \end{aligned}$$

Toto pozorování ukazuje, že struktura na množině řešení systému (3.61) a struktura na množině řešení rovnice (3.61) je stejná. Zejména tedy množina řešení lineárního homogenního systému dvou rovnic

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t),\\ x_2(t+1) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) \end{aligned}$$

takového, že $a_{12}(t) \neq 0 \neq a_{21}(t)$ pro všechny indexy $t \in \operatorname{Dom} a_{12} = \operatorname{Dom} a_{21}$, tvoří vektorový prostor dimenze 2.

Uvažujme nyní speciální případ systému (3.61), a to homogenní systém s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \alpha_{11}x_1(t) + \alpha_{12}x_2(t),\\ x_2(t+1) &= \alpha_{21}x_1(t) + \alpha_{22}x_2(t), \end{aligned} \tag{3.63}$$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t),$$

kde

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Podle předchozích výpočtů obě složky tohoto systému splňují tutéž lineární diferenční rovnici prvního řádu

$$x_{1,2}(t+1) = (\alpha_{11} + \alpha_{22})\, x_{1,2}(t+1) - (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{22})\, x_{1,2}(t),$$

kterou můžeme stručněji zapsat ve tvaru

$$x_{1,2}(t+1) - (\operatorname{tr}\mathsf{A})\, x_{1,2}(t+1) + (\det\mathsf{A})\, x_{1,2}(t) = 0.$$

Z řešení příkladu na str. 64–69 nyní zejména plyne:

(i) Je-li $|\operatorname{tr}\mathsf{A}| - 1 < \det\mathsf{A} < 1$, pak pro každé řešení systému (3.63) platí

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} x_2(t) = 0$$

(oba charakteristické kořeny jsou v absolutní hodnotě menší než 1).

(ii) Je-li $|\operatorname{tr}\mathsf{A}| - 1 > \det\mathsf{A}$ nebo $\det\mathsf{A} > 1$, pak existuje řešení systému (3.63) takové, že

$$\lim_{t\to\infty} |x_1(t)| = \infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{t\to\infty} |x_2(t)| = \infty$$

(dominantní charakteristický kořen je v absolutní hodnotě větší než 1).

(iii) Je-li $\operatorname{tr}\mathsf{A} > 0$ a $1 < \det\mathsf{A} < \frac{1}{4}(\operatorname{tr}\mathsf{A})^2$, pak obě složky libovolného řešení systému (3.63) jsou ryze monotonní (oba charakteristické kořeny jsou reálné a kladné).

■

Kapitola 4

Některé explicitně řešitelné rovnice

Máme-li zadánu počáteční úlohu pro lineární rovnici, můžeme napsat explicitní vyjádření obecného členu posloupnosti, která tuto úlohu řeší. Problém lze tedy považovat za vyřešený.

Ovšem reálné procesy nejsou vždy modelovány lineárními rovnicemi. Tři modely růstu populace v omezeném prostředí (1.14), (1.16) nebo (1.17) sestavené v Kapitole 1 jsou zapsány nelineárními rovnicemi. Explicitní vyjádření obecného členu řešení těchto rovnic může poskytnout úplnější a spolehlivější informaci o řešení, než výpočet konečně mnoha členů rekurentně; ten může být při snaze vypočítat řešení do co možná nejvzdálenější budoucnosti znehodnocen numerickými chybami (čísla jsou v počítači uložena jen s omezeným počtem platných míst, jsou tedy zatížena nějakou chybou a při velkém objemu výpočtů se tyto malé chyby mohou akumulovat a vytvořit chybu velkou).

Pokusme se tedy najít explicitní řešení Bevertonovy-Holtovy rovnice (1.16). Budeme hledat řešení nenulové, tj. chceme modelovat nevyhynulou populaci. V tom případě můžeme napsat rovnost převrácených hodnot obou stran rovnice (1.16)

$$\frac{1}{x(t+1)} = \frac{1}{r}\frac{1}{x(t)} + \frac{r-1}{rK}.$$

Nyní pro zjednodušení označíme y posloupnost převrácených hodnot posloupnosti x. Podle předchozí rovnosti vidíme, že posloupnost y splňuje rekurentní formuli

$$y(t+1) = \frac{1}{r}y(t) + \frac{r-1}{rK}.$$

To je lineární rekurentní formule prvního řádu s konstantními koeficienty. Proto podle Důsledku 2 Věty 16 můžeme obecný člen posloupnosti z vyjádřit ve tvaru

$$y(t) = y(t_0)\left(\frac{1}{r}\right)^{t-t_0} + \frac{r-1}{rK}\frac{r^{-(t-t_0)}-1}{1-r}r = \frac{Ky(t_0)+r^{t-t_0}-1}{Kr^{t-t_0}},$$

přitom $y(t_0) = 1/x(t_0)$. Můžeme tedy napsat obecný člen řešení Bevertonovy-Holtovy rovnice s počáteční hodnotou $x(t_0) = x_0$ jako převrácenou hodnotu posloupnosti y, tj.

$$x(t) = \frac{Kr^{t-t_0}x_0}{K + \left(r^{t-t_0}-1\right)x_0} = \frac{Kx_0}{x_0 + (K-x_0)r^{-(t-t_0)}}. \tag{4.1}$$

Snadno ověříme, že touto formulí je skutečně zadáno řešení počáteční úlohy pro Bevertonovu-Holtovu rovnici s počáteční hodnotou $x(t_0) = x_0$. Navíc takto zadaná posloupnost je v případě

$x_0 = 0$ konstantní nulová, $x \equiv 0$; vyjadřuje tedy také řešení úlohy s počáteční hodnotou $x(t_0) = 0$.

Nyní můžeme snadno vyšetřit kvalitativní vlastnosti řešení Bevertonovy-Holtovy rovnice:

- Pro $r = 1$ nebo $x_0 = 0$ je řešení $x \equiv x_0$.
- Pokud $r > 1$, pak $\lim\limits_{t\to\infty} r^{-(t-t_0)} = 0$, takže pro každou počáteční podmínku $x_0 \neq 0$ řešení x splňuje
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)r^{-(t-t_0)}} = K.$$
- Pokud $r \in (0,1)$, pak $\lim\limits_{t\to\infty} r^{-(t-t_0)} = \infty$, takže pro každou počáteční podmínku $x_0 \in \mathbb{R}$ platí
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)r^{-(t-t_0)}} = 0.$$

Tyto výsledky dobře odpovídají ekologické intuici: pokud je vnitřní koeficient růstu větší než 1, tj. pokud v neomezeném prostředí má populace porodnost větší než úmrtnost, pak se její velikost ustálí na kapacitě prostředí; pokud je úmrtnost větší než porodnost, populace vymře.

Postup hledání řešení Bevertonovy-Holtovy rovnice můžeme zobecnit: Z tvaru diferenční rovnice uhodneme funkci f tak, aby substituce $y(t) = f\big(x(t)\big)$ převedla danou nelineární diferenční rovnici na rovnici lineární. Problém tohoto postupu je v onom „hádání funkce f z tvaru rovnice“.

Můžeme ovšem postupovat i naopak. Napíšeme lineární rovnici, zvolíme nelineární prostou funkci g a do lineární rovnice dosadíme za $x(t)$ výraz $g\big(x(t)\big)$. Při označení $z(t) = g\big(x(t)\big)$ tak dostaneme diferenční rovnici pro neznámou posloupnost y, která je řešitelná substitucí $x(t) = g^{-1}\big(z(t)\big)$.

Zavedení substituce v diferenční rovnici může být užitečné i v případě, že nevede bezprostředně k jejímu vyřešení. Může ale např. zredukovat počet parametrů a tím rovnici zjednodušit.

Uvažujme logistickou rovnici (1.14) a označme

$$y(t) = \frac{r-1}{rK}x(t); \tag{4.2}$$

v případě modelu růstu populace se jedná o změnu měřítka velikosti populace. Při tomto označení je

$$\begin{aligned} y(t+1) = \frac{r-1}{rK}x(t+1) = \frac{r-1}{rK}x(t)\left(r - \frac{r-1}{K}x(t)\right) = r\frac{r-1}{rK}x(t)\left(1 - \frac{r-1}{rK}x(t)\right) = \\ = ry(t)\big(1-y(t)\big), \end{aligned}$$

substituce tedy převádí logistickou rovnici (1.14) na rovnici s jediným parametrem r ve tvaru

$$y(t+1) = ry(t)\big(1-y(t)\big). \tag{4.3}$$

Při interpretaci logistické rovnice jako modelu populačního růstu substituce také vyjadřuje „přirozené“ měřítko velikosti populace — kapacitu prostředí „diskontovanou“ vnitřním koeficientem růstu. (Ověřte, že stejná substituce převádí i rovnici Bevertonovu-Holtovu na rovnici s jedním parametrem; v případě modelů růstu populace (1.14) a (1.16) tedy máme stejná „přirozená“ měřítka velikosti.)

V prvních třech částech této kapitoly uvedeme některé typy nelineárních diferenčních rovnic, u nichž je známa substituce převádějící je na rovnice lineární. V poslední části ukážeme speciální rovnice, které byly získány volbou goniometrických nebo hyperbolických funkcí na místě transformující funkce g. Řešení těchto rovnic bude užitečné pro nalezení explicitního řešení logistické rovnice (4.3) pro několik speciálních hodnot parametru r.

4.1 Riccatiho a Bernoulliova rovnice

Riccatiho diferenční rovnice je tvaru

$$p(t)x(t+1)x(t) + x(t+1) - \big(1+q(t)\big)x(t) = r(t), \tag{4.4}$$

kde p je nenulová regresivní posloupnost. Rovnici můžeme přepsat ve tvaru rekurentní formule

$$x(t+1) = \frac{\big(1+q(t)\big)x(t) + r(t)}{1+p(t)x(t)} \tag{4.5}$$

nebo explicitní diferenční rovnice prvního typu

$$\Delta x = \frac{-p(t)x^2 + q(t)x + r(t)}{1+p(t)x}.$$

S využitím operátorů posunu a diference můžeme rovnici (4.4) přepsat do tvaru

$$pxx^\sigma + x + \Delta x - (1+q)x = r$$

a z něho vyjádřit diferenci hledané posloupnosti

$$\Delta x = -pxx^\sigma + qx + r.$$

Tato rovnice je diskrétní analogií Riccatiho diferenciální rovnice $x' = -px^2 + qx + r$.

Riccatiho diferenční rovnici řešíme pomocí substituce

$$x(t) = \frac{1}{p(t)}\frac{\Delta y(t)}{y(t)} = \frac{y(t+1)-y(t)}{p(t)y(t)}. \tag{4.6}$$

Dosadíme do rekurentní formule (4.5) a postupně upravujeme:

$$\begin{aligned}
\frac{y(t+2)-y(t+1)}{p(t+1)y(t+1)} &= \frac{\big(1+q(t)\big)\dfrac{y(t+1)-y(t)}{p(t)y(t)} + r(t)}{1+\dfrac{y(t+1)-y(t)}{y(t)}} \\
\frac{y(t+2)-y(t+1)}{p(t+1)y(t+1)} &= \frac{\big(1+q(t)\big)\big(y(t+1)-y(t)\big) + r(t)p(t)y(t)}{p(t)y(t+1)} \\
y(t+2)-y(t+1) &= \frac{p(t+1)}{p(t)}\big(1+q(t)\big)y(t+1) - \frac{p(t+1)}{p(t)}\left(1+q(t)-r(t)p(t)\right)y(t).
\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že posloupnost y je řešením lineární homogenní diferenční rovnice druhého řádu

$$y(t+2)-\left(1+\frac{p(t+1)}{p(t)}(1+q(t))\right)y(t+1)+\left(\frac{p(t+1)}{p(t)}(1+q(t))-r(t)p(t+1)\right)y(t)=0,$$

kterou můžeme také zapsat stručněji pomocí operátorů posunu a diference

$$\Delta^2 y+\left(1-\frac{p^\sigma}{p}(1+q)\right)\Delta y-p^\sigma r y=0.$$

Tvrzení 12. Riccatiho diferenční rovnice (4.4) pro neznámou posloupnost x se substitucí (4.6) transformuje na lineární homogenní rovnici druhého řádu pro neznámou posloupnost y.

Příklad:

$$x(t+1)=\frac{2x(t)x(t)+3}{3x(t)+2},\quad x(0)=x_0$$

Zavedeme substituci

$$x(t)=\frac{\Delta y(t)}{\frac{3}{2}y(t)}=\frac{2}{3}\frac{y(t+1)}{y(t)}-\frac{2}{3},$$

dosadíme do dané rovnice a postupně ji upravíme

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\frac{y(t+2)}{y(t+1)}-\frac{2}{3} &= \frac{\frac{4}{3}\frac{y(t+1)}{y(t)}-\frac{4}{3}+3}{2\frac{y(t+1)}{y(t)}-2+2},\\ 4\frac{y(t+2)-y(t+1)}{y(t+1)} &= \frac{4y(t+1)+5y(t)}{y(t+1)}.\end{aligned}$$

Daná rovnice se tedy transformuje na lineární homogenní rovnici druhého řádu

$$4y(t+2)-8y(t+1)-5y(t)=0.$$

Její charakteristická rovnice $4\lambda^2-8\lambda-5=0$ má dva reálné různé kořeny

$$\lambda_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+80}}{8}=\begin{cases}\frac{5}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Obecné řešení lineární diferenční rovnice tedy je $y(t)=A\left(\frac{5}{2}\right)^t+B\left(-\frac{1}{2}\right)^t$.

Označme $y_0=y(0)$. Pro počáteční hodnoty dále platí $x_0=\frac{2}{3}\frac{y(1)}{y(0)}-\frac{2}{3}$, a z toho vypočítáme $y(1)=\frac{1}{2}(3x_0+2)y_0$.

Z těchto podmínek dostaneme systém (algebraických) rovnic pro konstanty A, B,

$$y_0=y(0)=A+B,\quad \frac{3x_0+2}{2}y_0=y(1)=\frac{5}{2}A-\frac{1}{2}B,$$

tj.

$$\begin{aligned}A+B&=y_0\\ 5A-B&=(3x_0+2)y_0.\end{aligned}$$

Z něho vypočítáme $A = \frac{1}{2}y_0(1+x_0)$, $B = \frac{1}{2}y_0(1-x_0)$. Řešení úlohy pro lineární rovnici je

$$y(t) = \frac{y_0}{2^{t+1}}\left((1+x_0)5^t + (1-x_0)(-1)^t\right).$$

Zpětnou substitucí tedy dostaneme řešení zadané úlohy ve tvaru

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{3}\left(\frac{y(t+1)}{y(t)} - 1\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{(1+x_0)5^{t+1} + (1-x_0)(-1)^{t+1}}{(1+x_0)5^t + (1-x_0)(-1)^t} - 1\right) = \\ &= \frac{(1+x_0)5^t - (1-x_0)(-1)^t}{(1+x_0)5^t + (1-x_0)(-1)^t} = \frac{1+x_0}{1+x_0+(1-x_0)\left(-\frac{1}{5}\right)^t} - \frac{1-x_0}{1-x_0+(1+x_0)(-5)^t}. \end{aligned}$$

■

Pokud $r \equiv 0$, tj. na pravé straně rovnice (4.4) je nula, můžeme použít jednodušší substituci. V tomto případě položíme

$$x(t) = \frac{1}{z(t)}, \tag{4.7}$$

dosadíme do rovnice (4.4) a vynásobíme výrazem $z(t)z(t+1)$. Dostaneme

$$p(t) + z(t) - \big(1+q(t)\big)z(t+1) = 0.$$

Je-li přitom posloupnost q regresivní, upravíme tuto rovnici na tvar lineární diferenční rovnice prvního řádu

$$z(t+1) = \frac{1}{1+q(t)}z(t) + \frac{p(t)}{1+q(t)} \quad \text{nebo} \quad \Delta z = -\frac{q(t)}{1+q(t)} + \frac{p(t)}{1+q(t)}.$$

Tato rovnice má podle věty 16 řešení

$$\begin{aligned} z(t) = z_0 \prod_{i=t_0}^{t-1}\frac{1}{1+q(i)} + \sum_{i=t_0}^{t-1}\frac{p(i)}{1+q(i)}\prod_{j=i+1}^{t-1}\frac{1}{1+q(j)} &= \\ = \left(z_0 + \sum_{i=t_0}^{t-1}p(i)\prod_{j=t_0}^{i-1}\big(1+q(j)\big)\right)\prod_{i=t_0}^{t-1}\frac{1}{1+q(i)}&, \end{aligned}$$

kde $z_0 = z(t_0) = x(t_0)^{-1}$. Platí tedy:

Tvrzení 13. Je-li $r \equiv 0$, pak má Riccatiho rovnice řešení

$$x(t) = \frac{x_0 \prod\limits_{i=t_0}^{t-1}\big(1+q(i)\big)}{1 + x_0\sum\limits_{i=t_0}^{t-1}p(i)\prod\limits_{j=t_0}^{i-1}\big(1+q(j)\big)}.$$

Rovnice (4.4) s $r \equiv 0$ a s regresivní posloupností q se v literatuře objevuje v rozmanitých tvarem. Ukážeme některé z nich. Rovnici v takovém případě můžeme přepsat na tvar

$$\frac{p(t)}{1+q(t)} + \frac{1}{1+q(t)}\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(t+1)} = 0$$

a při označení

$$a(t) = \frac{1}{1+q(t)}, \quad b(t) = \frac{p(t)}{1+q(t)}$$

dostaneme

$$\frac{1}{x(t+1)} - \frac{1}{x(t)} = \big(a(t)-1\big)\frac{1}{x(t)} + b(t),$$

neboli

$$\Delta \frac{1}{x} = \big(a(t)-1\big)\frac{1}{x} + b(t) \tag{4.8}$$

případně

$$\Delta x^{1-2} = \big(a(t)-1\big)x^{1-2} + b(t). \tag{4.9}$$

S pomocí operátoru posunu můžeme rovnici (4.8) přepsat ve tvaru

$$\frac{1}{x^\sigma} - \frac{1}{x} = (a-1)\frac{1}{x} + b.$$

Vynásobením výrazem xx^σ dostaneme rovnici ve tvaru

$$x - x^\sigma = (a-1)x^\sigma + bxx^\sigma.$$

Z ní můžeme vyjádřit

$$\Delta x = (1-a-bx)x^\sigma = (1-a)\left(1 - \frac{b}{1-a}x\right)x^\sigma$$

nebo

$$x^\sigma = \frac{x}{a+bx}. \tag{4.10}$$

Poslední rovnici vynásobíme jmenovatelem pravé strany a upravíme na tvar

$$x^\sigma = \frac{x}{a}\left(1 - bx^\sigma\right),$$

ze kterého dostaneme jiné vyjádření diference hledané posloupnosti

$$\Delta x = x\left(\frac{1}{a} - 1 - \frac{b}{a}x^\sigma\right) = \frac{1-a}{a}x\left(1 - \frac{b}{1-a}x^\sigma\right).$$

Bernoulliova diferenční rovnice je tvaru

$$\Delta x^{1-\alpha} = \big(a(t)-1\big)x^{1-\alpha} + b(t), \tag{4.11}$$

kde $\alpha \neq 1$ je nějaké reálné číslo. Bernoulliovu diferenční rovnici můžeme také vyjádřit ve tvaru rekurentní formule

$$x(t+1) = \left(a(t)x(t)^{1-\alpha} + b(t)\right)^{1/(1-\alpha)}.$$

Porovnáním s rovnicí (4.9) vidíme, že Riccatiho rovnice (4.4) s $r \equiv 0$ je speciálním případem Bernoulliovy rovnice (4.11) s parametrem $\alpha = 2$.

Tvar Bernoulliovy rovnice bezprostředně ukazuje, že substituce

$$x(t)^{1-\alpha} = z(t), \quad \text{tj.} \quad x(t) = z(t)^{1/(1-\alpha)} \tag{4.12}$$

transformuje Bernoulliovu diferenční rovnici (4.11) na lineární nehomogenní rovnici prvního řádu

$$\Delta z = \big(a(t)-1\big)z + b(t), \quad \text{tj.} \quad z(t+1) = a(t)z(t) + b(t). \tag{4.13}$$

Tvrzení 14. Bernoulliova diferenční rovnice (4.11) pro neznámou posloupnost x se substitucí (4.12) transformuje na lineární nehomogenní rovnici prvního řádu (4.13) pro neznámou posloupnost z.

Příklad: Bevertonovu-Holtovu rovnici (1.16) můžeme přepsat ve tvaru

$$x(t+1) = x(t)\frac{r}{1+\frac{r-1}{K}x(t)}.$$

Jedná se tedy o rovnici (4.10), tj. rovnici, která je současně Riccatiho i Bernoulliova. Můžeme ji tedy vyřešit substitucí (4.7). Tato substituce byla v úvodu k této kapitole nalezena intuitivnějším způsobem. ■

4.2 Homogenní rovnice

Homogenní diferenční rovnice prvního řádu je rovnice tvaru

$$f\left(t, \frac{x(t+1)}{x(t)}\right) = 0, \tag{4.14}$$

kde f je funkce, která není konstantní ve druhé proměnné. Povšimněme si, že lineární homogenní rovnici $x(t+1) = q(t)x(t)$ můžeme přepsat jako

$$\frac{x(t+1)}{x(t)} - q(t) = 0,$$

takže je skutečně speciálním případem rovnice (4.14); slovo „homogenní“ je použito oprávněně.

Substituce

$$y(t) = \frac{x(t+1)}{x(t)} \tag{4.15}$$

převede rovnici (4.14) na rovnici

$$f\big(t, y(t)\big) = 0,$$

ze které vyjádříme $y(t) = g(t)$ a řešení dané rovnice (4.14) hledáme jako řešení lineární homogenní rovnice $x(t+1) = g(t)x(t)$.

Pokud hledáme kladná řešení rovnice (4.14), můžeme použít substituce

$$z(t) = \ln x(t),$$

která převádí danou rovnici na implicitní diferenční rovnici

$$f\big(t, \Delta z(t)\big) = 0.$$

Homogenní diferenční rovnice k-tého řádu je rovnice tvaru

$$F\left(t, \frac{x(t+k)}{x(t+k-1)}, \frac{x(t+k-1)}{x(t+k-2)}, \ldots, \frac{x(t+1)}{x(t)}\right) = 0,$$

kde F je funkce, která není konstantní ve druhé a poslední proměnné. Tuto rovnici převede substituce (4.15) na diferenční rovnici $(k-1)$-ního řádu druhého typu

$$F\big(t, y(t+k-1), y(t+k-2), \dots, y(t)\big) = 0.$$

Příklad:

$$x(t+1) = \frac{x(t-1)x(t)}{x(t-1)+x(t)}$$

Rovnici vynásobíme jmenovatelem zlomku na pravé straně a vydělíme výrazem $x(t)x(t-1)$. Dostaneme

$$\left(1 + \frac{x(t)}{x(t-1)}\right)\frac{x(t+1)}{x(t)} = 1.$$

Substituce (4.15) převede tuto rovnici na tvar

$$\big(1 + y(t-1)\big)y(t) = 1,$$

který je ekvivalentní s $\big(1 + y(t)\big)y(t+1) = 1$, neboli

$$y(t+1)y(t) + y(t+1) = 1.$$

To je Riccatiho rovnice. Proto zavedeme novou posloupnost z substitucí

$$y(t) = \frac{z(t+1) - z(t)}{z(t)}.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$\frac{z(t+2) - z(t+1)}{z(t+1)}\left(\frac{z(t+1) - z(t)}{z(t)} + 1\right) = 1,$$

$$z(t+2) - z(t+1) - z(t) = 0,$$

což je lineární homogenní rovnice druhého řádu. ■

4.2.1 Implicitní rovnice $x(t+1)^2 + a(t)x(t+1)x(t) + b(t)x(t)^2 = 0$

Tato rovnice má očividně řešení $x \equiv 0$. Budeme hledat také řešení nenulová. Rovnici vydělíme výrazem $x(t)^2$ a tím ji převedeme na tvar rovnice homogenní

$$\left(\frac{x(t+1)}{x(t)}\right)^2 + a(t)\frac{x(t+1)}{x(t)} + b(t) = 0.$$

Pokud posloupnosti a, b splňují relaci $a(t)^2 \geq 4b(t)$ pro všechny indexy, položíme

$$p(t) = \frac{1}{2}\left(-a(t) + \sqrt{a(t)^2 - 4b(t)}\right) \quad \text{a} \quad q(t) = \frac{1}{2}\left(-a(t) - \sqrt{a(t)^2 - 4b(t)}\right).$$

a pravou stranu rovnice přepíšeme jako součin dvou výrazů

$$\left(\frac{x(t+1)}{x(t)} - p(t)\right)\left(\frac{x(t+1)}{x(t)} - q(t)\right) = 0.$$

Odtud vidíme, že řešení každé z lineárních homogenních diferenčních rovnic prvního řádu

$$x_1(t+1) = p(t)x_1(t) \quad \text{a} \quad x_2(t+1) = q(t)x_2(t)$$

je také řešením původní rovnice. Tato řešení jsou

$$x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} p(i) \quad \text{a} \quad x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} q(i).$$

Povšimněme si, že nulové řešení je v tomto vyjádření zahrnuto pro $x_0 = 0$. Pokud $a^2 = 4b$, pak $p = q = -\frac{1}{2}a$ a obě řešení splývají, $x(t) = x_0(-\frac{1}{2})^{t-t_0} \prod\limits_{i=t_0}^{t-1} a(i)$.

Tvrzení 15. Počáteční úloha pro implicitní rovnici tvaru

$$x(t+1)^2 + a(t)x(t+1)x(t) + b(t)x(t)^2 = 0, \qquad x(t_0) = x_0$$

má pro $x_0 \neq 0$ a $a^2 \neq 4b$ dvě řešení. V opačném případě je jednoznačně řešitelná.

Příklad:

$$x(t+1)^2 - 3x(t)x(t+1) + 2x(t)^2 = 0$$

Rovnici postupně upravíme:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x(t+1)}{x(t)}\right)^2 - 3\frac{x(t+1)}{x(t)} + 2 &= 0, \\ \left(\frac{x(t+1)}{x(t)} - 2\right)\left(\frac{x(t+1)}{x(t)} - 1\right) &= 0. \end{aligned}$$

Dostáváme tak dvě homogenní lineární rovnice $x(t+1) = 2x(t)$ a $x(t+1) = x(t)$. Daná rovnice má tedy dvě řešení, konkrétně

$$x(t) = x_0 2^{t-t_0} \quad \text{a} \quad x(t) = x_0,$$

kde $x_0 = x(t_0)$. Tato řešení splývají pro $x_0 = 0$. ■

4.3 Logaritmicky lineární rovnice

Jedná se o rovnici

$$x(t+k)^{r_k(t)} x(t+k-1)^{r_{k-1}(t)} \cdots x(t+1)^{r_1(t)} x(t)^{r_0(t)} = b(t);$$

přitom $r_0, r_1, \ldots, r_k$ jsou posloupnosti takové, že $r_0(t) \neq 0 \neq r_k(t)$ pro všechna t z definičního oboru. Substitucí

$$x(t) = \mathrm{e}^{z(t)} \tag{4.16}$$

tj. $z(t) = \ln x(t)$ převedeme uvažovanou rovnici na tvar

$$\mathrm{e}^{r_k(t)z(t+k) + r_{k-1}(t)z(t+k-1) + \cdots + r_1(t)z(t+1) + r_0(t)z(t)} = b(t),$$

a dále zlogaritmováním na lineární rovnici k-tého řádu

$$z(t+k)+\frac{r_{k-1}(t)}{r_k(t)}z(t+k-1)+\cdots+\frac{r_1(t)}{r_k(t)}z(t+1)+\frac{r_0(t)}{r_k(t)}z(t)=\ln b(t).$$

Povšimněme si, že z transformačního vztahu (4.16) plyne, že řešení původní rovnice musí být kladné. Uvedený postup tedy můžeme použít pouze v případě, že počáteční hodnoty hledané posloupnosti splňují podmínky

$$x(t_0)=x_0>0,\ x(t_0+1)=x_1>0.\ \ldots,\ x(t_0+k-1)=x_{k-1}>0.$$

Příklad:

$$x(t+2)=\left(\frac{x(t+1)}{x(t)}\right)^2.$$

Rovnici přepíšeme ve tvaru

$$x(t+2)x(t+1)^{-2}x(t)^2=1$$

a zavedeme substituci $z(t)=\ln x(t)$. Dostaneme lineární homogenní rovnici druhého řádu

$$z(t+2)-2z(t+1)+2z(t)=0.$$

Její charakteristická rovnice $\lambda^2-2\lambda+2=$ má komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=1\pm\mathrm{i}.$$

Modul a argument charakteristických kořenů jsou

$$|\lambda|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\qquad \arg\lambda=\operatorname{arctg}1=\frac{1}{4}\pi.$$

To znamená, že obecné řešení lineární rovnice je

$$z(t)=\sqrt{2}^{\,t}\left(A\cos\frac{\pi t}{4}+B\sin\frac{\pi t}{4}\right)$$

a obecné řešení dané rovnice je

$$x(t)=\exp\left\{\sqrt{2}^{\,t}\left(A\cos\frac{\pi t}{4}+B\sin\frac{\pi t}{4}\right)\right\}.$$

■

4.4 Rovnice řešitelné různými substitucemi

4.4.1 Goniometrické a hyperbolické substituce

Ukážeme několik speciálních rovnic, u kterých lze najít explicitní řešení pomocí goniometrické nebo hyperbolické substituce. U všech těchto rovnic budeme uvažovat také počáteční podmínku

$$x(t_0)=x_0. \tag{4.17}$$

Uvedené rovnice byly získány pomocí známých vztahů pro goniometrické nebo hyperbolické funkce násobného argumentu. Je z nich zřejmé, jak lze odvozovat další explicitně řešitelné rovnice. Navíc téměř libovolnou transformací hledané posloupnosti lze z uvedených rovnic získat další rovnice, které jsou opět explicitně řešitelné. Tuto skutečnost ukážeme na příkladech

Rovnice $x(t+1) = 2x(t)^2 - 1$

Řešení uvažované úlohy je pro libovolné $t \geq t_0$ určeno jednoznačně, neboť se jedná o rekurentní formuli prvního řádu s počáteční podmínkou. Přitom je na pravé straně rovnosti výraz definovaný pro jakoukoliv hodnotu $x(t)$.

Z rovnice a z počáteční podmínky (4.17) plyne, že hodnota řešení $x(t_0-1)$ musí splňovat rovnici $x_0 = 2\,[x(t_0-1)]^2 - 1$. Tato algebraická rovnice pro neznámou $x(t_0-1)$ nemá reálné řešení, pokud $x_0 < -1$, a má dvě různá reálná řešení, pokud $x_0 > -1$. Obecně tedy úloha není jednoznačně řešitelná pro $t < t_0$. Proto budeme řešení hledat pouze pro $t \geq t_0$.

Pokud počáteční hodnota splňuje nerovnost $|x_0| \leq 1$, položíme $x(t) = \cos y(t)$. S využitím známých vztahů pro goniometrické funkce

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1 \quad \text{a} \quad \cos 2\alpha = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2$$

dostaneme

$$\cos y(t+1) = x(t+1) = 2x(t)^2 - 1 = 2\big(\cos y(t)\big)^2 - 1 = \big(\cos y(t)\big)^2 - \big(\sin y(t)\big)^2 = \cos 2y(t).$$

To znamená, že $y(t+1)$ je řešením goniometrické rovnice

$$\cos y(t+1) = \cos 2y(t),$$

a tedy

$$y(t+1) = \pm 2y(t) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Každá z tohoto spočetného systému lineárních nehomogenních diferenčních rovnic prvního řádu má podle důsledku 2 věty 16 řešení tvaru

$$y(t) = y_0(\pm 2)^{t-t_0} + 2k\pi\frac{(\pm 2)^{t-t_0} - 1}{\pm 2 - 1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

kde $y_0 = y(t_0)$, tj. $\cos y_0 = x_0$, $y_0 = \arccos x_0$. Druhý sčítanec na pravé straně rovnosti můžeme upravit na tvar

$$2k\pi\frac{(\pm 2)^{t-t_0} - 1}{\pm 2 - 1} = 2k\pi\sum_{i=0}^{t-t_0-1}(\pm 2)^i.$$

Součet celých čísel je celé číslo a to znamená, že druhý sčítanec je sudým násobkem π, tj.

$$y(t) = y_0(\pm 2)^{t-t_0} + 2l\pi$$

pro nějaké $l \in \mathbb{Z}$. Zpětnou substitucí a úpravou s využitím součtového vzorce

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

dostaneme

$$\begin{aligned} x(t) = \cos\left(y_0(\pm 2)^{t-t_0} + 2l\pi\right) &= \cos\left(y_0(\pm 2)^{t-t_0}\right)\cos 2l\pi - \sin\left(y_0(\pm 2)^{t-t_0}\right)\sin 2l\pi = \\ &= \cos\left((\pm 1)^{t-t_0}2^{t-t_0}y_0\right) = \cos\left(2^{t-t_0}y_0\right), \end{aligned}$$

neboť cosinus je sudá funkce. Řešení úlohy

$$x(t+1) = 2x(t)^2 - 1, \quad x(t_0) = x_0 \in [-1,1] \tag{4.18}$$

je tedy tvaru

$$x(t) = \cos\left(2^{t-t_0} \arccos x_0\right).$$

Pokud je $|x_0| > 1$, položíme $x(t) = \cosh y(t)$. S využitím známého vztahu pro hyperbolický cosinus[1]

$$\cosh 2\alpha = 2(\cosh\alpha)^2 - 1$$

dostaneme

$$\cosh y(t+1) = x(t+1) = 2x(t)^2 - 1 = 2\big(\cosh y(t)\big)^2 - 1 = \cosh 2y(t).$$

Hodnota $y(t+1)$ je tedy řešením rovnice $\cosh y(t+1) = \cosh 2y(t)$. Poněvadž hyperbolický cosinus je sudá funkce, která je ryze monotonní na každém z intervalů $(-\infty, 0]$ a $[0,\infty)$, platí

$$y(t+1) = \pm 2y(t),$$

což jsou dvě rekurentní formule pro geometrickou posloupnost, jedna má kvocient 2, druhá -2. Posloupnost tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$y(t) = y_0(\pm 2)^{t-t_0} = (\pm 1)^{t-t_0} 2^{t-t_0} y_0,$$

kde $y_0 = y(t_0)$, tj. $\cosh y_0 = x_0$,

$$y_0 = \operatorname{argcosh} x_0 = \ln\left(|x_0| + \sqrt{x_0^2 - 1}\right).$$

Poněvadž hyperbolický cosinus je sudá funkce, dostaneme řešení úlohy s počáteční hodnotou $x_0 \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ve tvaru

$$x(t) = \begin{cases} x_0, & t = t_0, \\ \cosh\left(2^{t-t_0} \ln\left(|x_0| + \sqrt{x_0^2 - 1}\right)\right), & t > t_0. \end{cases}$$

Příklad:

$$x(t+1) = 2x(t)\big(2x(t) - 1\big), \quad x(0) = \tfrac{1}{8}$$

Nejprve upravíme pravou stranu rovnice tak, aby byla tvaru $f(2X^2 - 1)$ pro nějakou funkci f a nějaký výraz X závisející na $x(t)$; použijeme doplnění na úplný čtverec:

$$4x(t)^2 - 2x(t) = \left(2x(t) - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}\left(2\left(2x(t) - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 1\right) + \tfrac{1}{4}.$$

Odtud vidíme, že daná diferenční rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$2x(t+1) - \tfrac{1}{2} = 2\left(2x(t) - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 1.$$

Můžeme tedy použít substituci $y(t) = 2x(t) - \frac{1}{2}$, která převádí danou úlohu na počáteční úlohu ve tvaru

$$y(t+1) = 2y(t)^2 - 1, \quad y(0) = -\tfrac{1}{4},$$

[1] $\cosh 2\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right)^2 - 2\right) = 2\left(\frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\right)^2 - 1 = 2(\cosh\alpha)^2 - 1$

která má řešení

$$y(t) = \cos\left(2^t \arccos\left(-\tfrac{1}{4}\right)\right) = \cos\left(2^t\left(\pi - \arccos\tfrac{1}{4}\right)\right) = \begin{cases} -\frac{1}{4}, & t = 0 \\ \cos\left(2^t \arccos\frac{1}{4}\right), & t > 0. \end{cases}$$

Řešení dané úlohy je tedy pro $t > 0$ dáno výrazem

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\left(\cos\left(2^t \arccos\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cos\left(2^t \arccos\tfrac{1}{4}\right).$$

■

Rovnice $x(t+1) = 2x(t)\sqrt{1 \pm x(t)^2}$

Řešení uvažované úlohy je pro $t \geq t_0$ určeno jednoznačně, neboť se jedná o rekurentní formuli prvního řádu s počáteční podmínkou a odmocninu považujeme v reálném oboru za jednoznačnou funkci. Řešení ovšem v případě znaménka „−“ pod odmocninou nemusí být definováno pro každé $t \geq t_0$; je-li totiž v takovém případě $|x(t)| > 1$, pak není $x(t+1)$ definováno.

Z rovnice a z počáteční podmínky plyne, že pro hodnotu $x(t_0 - 1)$ řešení by mělo platit

$$x_0 = 2x(t_0 - 1)\sqrt{1 \pm x(t_0 - 1)^2},$$

nebo po snadné úpravě

$$\pm 4\left[x(t_0 - 1)\right]^4 + 4\left[x(t_0 - 1)\right]^2 - x_0^2 = 0,$$

takže by mělo platit

$$x(t_0 - 1) = \sqrt{\frac{-4 \pm \sqrt{16 \mp 16x_0^2}}{\pm 8}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 \pm x_0^2} \mp 1\right)};$$

hodnota $x(t_0 - 1)$ tedy není určena jednoznačně. Z tohoto důvodu má smysl uvažovat řešení pouze pro $t \geq t_0$.

Pokud je pod odmocninou na pravé straně rovnice znaménko „+“, tedy pokud je rovnice tvaru

$$x(t+1) = 2x(t)\sqrt{1 + x(t)^2}, \tag{4.19}$$

zavedeme substituci $x(t) = \sinh y(t)$ a využijeme známých vlastností hyperbolických funkcí

$$\sinh 2\alpha = 2\sinh\alpha\cosh\alpha, \quad (\cosh\alpha)^2 - (\sinh\alpha)^2 = 1, \quad \cosh\alpha > 0.$$

Pak je

$$\begin{aligned} \sinh y(t+1) = x(t+1) = 2x(t)\sqrt{1 + x(t)^2} = 2\sinh y(t)\sqrt{1 + \left(\sinh y(t)\right)^2} = \\ = 2\sinh y(t)\cosh y(t) = \sinh 2y(t). \end{aligned}$$

Poněvadž hyperbolický sinus je prostá funkce, implicitní diferenční rovnice

$$\sinh y(t+1) = \sinh y(t)$$

je ekvivalentní s explicitní rovnicí $y(t+1) = 2y(t)$ a její řešení je tvaru

$$y(t) = 2^{t-t_0} y_0,$$

kde $y_0 = y(t_0)$, tj. $x_0 = \sinh y_0$, $y_0 = \operatorname{argsinh} x_0 = \ln\Big(x_0 + \sqrt{x_0^2+1}\Big)$.

Zpětnou substitucí dostaneme řešení úlohy (4.19), (4.17) pro $t \geq t_0$ ve tvaru

$$x(t) = \sinh\left(2^{t-t_0} \operatorname{argsinh} x_0\right) = \frac{1}{2}\left(\left(x_0 + \sqrt{1+x_0^2}\right)^{2^{t-t_0}} - \left(x_0 + \sqrt{1+x_0^2}\right)^{-2^{t-t_0}}\right). \tag{4.20}$$

Rovnice se znaménkem „$-$“ pod odmocninou na pravé straně, tedy rovnice

$$x(t+1) = 2x(t)\sqrt{1-x(t)^2} \tag{4.21}$$

může mít řešení pouze pro počáteční podmínku $x_0 \in [-1,1]$, pro $|x| > 0$ není pravá strana rovnice definována. Navíc pro všechny hodnoty řešení musí platit $|x(t)| \leq 1$. Pokud je $x_0 = 0$, bude řešením úlohy (4.21), (4.17) konstantní posloupnost $x \equiv 0$.

Dále si můžeme všimnout, že pro řešení úlohy platí

$$x(t+1)x(t) = 2x(t)^2\sqrt{1-x(t)^2} \geq 0,$$

neboť odmocninu v reálném oboru chápeme jako nezápornou funkci. To znamená, že řešení rovnice nemění znaménko, tj. $\operatorname{sgn} x(t) = \operatorname{sgn} x_0$ pro všechna $t \geq t_0$.

Toto pozorování umožňuje zavést substituci

$$x(t) = |\sin y(t)| \operatorname{sgn} x_0. \tag{4.22}$$

Využijeme známých vlastností goniometrických funkcí

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

a pro $x_0 \neq 0$ dostaneme

$$\begin{aligned}|\sin y(t+1)| = 2|\sin y(t)|\sqrt{1-\big(\sin y(t)\big)^2} = 2|\sin y(t)| \cdot |\cos y(t)| = \\ = |2\sin y(t)\cos y(t)| = |\sin 2y(t)|.\end{aligned}$$

Řešíme tedy goniometrickou rovnici s absolutní hodnotou $|\sin y(t+1)| = |\sin y(t)|$ pro neznámou $y(t+1)$. Řešení této rovnice může být řešením některé ze dvou goniometrických rovnic

$$\sin y(t+1) = \sin 2y(t), \quad \sin y(t+1) = -\sin 2y(t)$$

pro neznámou $y(t+1)$. První z těchto rovnic má dvě řešení

$$y(t+1) = 2y(t) + 2k\pi, \quad y(t+1) = -2y(t) + (2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

druhá má také dvě řešení

$$y(t+1) = -2y(t) + 2k\pi, \quad y(t+1) = 2y(t) + (2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

To znamená, že posloupnost y splňuje některou z nekonečného systému lineárních rekurentních formulí prvního řádu
$$y(t+1) = \pm 2y(t) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$
nebo ekvivalentně lineárních diferenčních rovnic $\Delta y = (\pm 2 - 1)y + k\pi$. Podle důsledku 2 věty 16 je řešení těchto rovnic tvaru
$$y(t) = y_0(\pm 2)^{t-t_0} + k\pi\frac{(\pm 2)^{t-t_0} - 1}{\pm 2 - 1} = y_0(\pm 2)^{t-t_0} + k\pi\sum_{i=0}^{t-t_0-1}(\pm 2)^i,$$
kde $y_0 = y(t_0) = \arcsin x_0$. Sumu na pravé straně rovnosti lze vyjádřit jako
$$\sum_{i=0}^{t-t_0-1}(\pm 2)^i = \begin{cases} 0, & t = t_0,\\ 1 \pm 2 + 4 \pm \cdots + (\pm 2)^{t-t_0-1}, & t > t_0,\end{cases}$$
což znamená, že pro $t > t_0$ je rovna lichému celému číslu. Proto pro $t > t_0$ platí
$$y(t) = (\pm 2)^{t-t_0}y_0 + (2l+1)\pi, \quad l \in \mathbb{Z}$$
a tedy také
$$\begin{aligned} x(t) &= |\sin y(t)| \operatorname{sgn} x_0 = \\ &= \left|\sin\left((\pm 2)^{t-t_0}y_0\right)\cos\left((2l+1)\pi\right) + \cos\left((\pm 2)^{t-t_0}y_0\right)\sin\left((2l+1)\pi\right)\right| \operatorname{sgn} x_0 = \\ &= \left|-(\mp 1)^{t-t_0}\sin\left(2^{t-t_0}y_0\right) + 0\right| \operatorname{sgn} x_0 = \left|(\pm 1)^{t-t_0}\sin\left(2^{t-t_0}y_0\right)\right| \operatorname{sgn} x_0 = \\ &= \left|\sin\left(2^{t-t_0}\arcsin x_0\right)\right| \operatorname{sgn} x_0. \end{aligned}$$
Dostáváme tak výsledek, že řešení počáteční úlohy (4.21), (4.17) s $x_0 \in [-1, 1]$ je pro $t \geq t_0$ dáno formulí
$$x(t) = \left|\sin\left(2^{t-t_0}\arcsin x_0\right)\right| \operatorname{sgn} x_0; \tag{4.23}$$
toto řešení nemění znaménko a pro libovolné $t \geq t_0$ splňuje nerovnost $|x(t)| \leq 1$.

Příklad:
$$x(t+1) = \frac{x(t)^2}{4\big(x(t)+1\big)}, \quad x(0) = -3$$
Zavedeme substituci $x(t) = -\dfrac{1}{y(t)^2}$. Pak
$$\frac{1}{y(t+1)^2} = -x(t+1) = -\frac{x(t)^2}{4\big(x(t)+1\big)} = \frac{-1}{4y(t)^4\left(-\dfrac{1}{y(t)^2}+1\right)} = \frac{1}{4y(t)^2\big(1-y(t)^2\big)}.$$
Tedy $y(t+1)^2 = 4y(t)^2\left(1 - y(t)^2\right)$, neboli
$$y(t+1) = 2y(t)\sqrt{1 - y(t)^2}.$$
Řešení této rovnice s počáteční podmínkou $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ je podle předchozího výsledku dáno výrazem $y(t) = \left|\sin\left(2^t\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right|$. Řešení dané úlohy tedy je
$$x(t) = -\left(\frac{1}{\sin\left(2^t\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}\right)^2.$$
■

Rovnice $x(t+1) = \dfrac{2x(t)}{1-x(t)^2}$**,** $x(t+1) = \dfrac{x(t)^2-1}{2x(t)}$

Opět má smysl řešit počáteční úlohu pouze pro $t \geq t_0$.

V případě první rovnice zavedeme substituci $x(t) = \operatorname{tg} y(t)$ a využijeme vzorec pro tangens dvojnásobného argumentu

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1-(\operatorname{tg} \alpha)^2}.$$

Pak je

$$\operatorname{tg} y(t+1) = x(t+1) = \frac{2x(t)}{1-x(t)^2} = \frac{2 \operatorname{tg} y(t)}{1-\big(\operatorname{tg} y(t)\big)^2} = \operatorname{tg} 2y(t).$$

Řešíme tedy goniometrickou rovnici $\operatorname{tg} y(t+1) = \operatorname{tg} 2y(t)$ pro neznámou $y(t+1)$. Dostaneme

$$y(t+1) = 2y(t+1) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tato lineární nehomogenní rovnice prvního řádu má řešení

$$y(t) = y_0 2^{t-t_0} + k\pi \left(2^{t-t_0} - 1\right),$$

kde $y_0 = y(0) = \operatorname{arctg} x_0$. Zpětnou substitucí dostaneme

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{tg}\left(2^{t-t_0} \operatorname{arctg} x_0 + (2^{t-t_0}-1)k\pi\right) = \\ &= \frac{\operatorname{tg}\left(2^{t-t_0} \operatorname{arctg} x_0\right) + \operatorname{tg}\left((2^{t-t_0}-1)k\pi\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(2^{t-t_0} \operatorname{arctg} x_0\right) \operatorname{tg}\left((2^{t-t_0}-1)k\pi\right)} = \operatorname{tg}\left(2^{t-t_0} \operatorname{arctg} x_0\right). \end{aligned}$$

Řešení počáteční úlohy

$$x(t+1) = \frac{2x(t)}{1-x(t)^2}, \quad x(t_0) = x_0$$

je dáno výrazem

$$x(t) = \operatorname{tg}\left(2^{t-t_0} \operatorname{arctg} x_0\right).$$

Druhou rovnici řešíme analogicky, použijeme substituci $x(t) = \operatorname{cotg} y(t)$.

Příklad:

$$x(t+1) = 2\frac{x(t)-1}{x(t)\big(2-x(t)\big)} + 1, \quad x(0) = \tfrac{1}{2}.$$

Rovnici postupně upravujeme

$$\begin{aligned} 1 - x(t+1) &= 2\frac{1-x(t)}{x(t)\big(2-x(t)\big)}, \\ 1 - x(t+1) &= 2\frac{1-x(t)}{\Big(1-\big(1-x(t)\big)\Big)\Big(1+\big(1-x(t)\big)\Big)}, \\ 1 - x(t+1) &= 2\frac{1-x(t)}{1-\big(1-x(t)\big)^2}. \end{aligned}$$

Tento zápis rovnice ukazuje, že substituce $y(t) = 1 - x(t)$ rovnici transformuje na uvažovaný tvar. Řešení úlohy je tedy dáno relací

$$1 - x(t) = \operatorname{tg}\left(2^t \operatorname{arctg}(1-x_0)\right) = \operatorname{tg}\left(2^{t-1}\frac{\pi}{3}\right),$$

neboť $1 - x_0 = \frac{1}{2}$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$. Řešení dané úlohy tedy je

$$x(t) = 1 - \operatorname{tg}\left(\frac{2^{t-1}}{3}\pi\right).$$

■

4.4.2 Logistická rovnice

Logistická diferenční rovnice je rovnice tvaru

$$x(t+1) = ax(t)\big(1 - x(t)\big), \quad \text{nebo} \quad \Delta x = x(a - 1 - ax),$$

kde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Rekurentní vztah pro hledanou posloupnost x ukazuje, že logistická rovnice s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ má jednoznačné řešení pro $t \geq t_0$. Z rekurentního vztahu však obecně nelze jednoznačně vyjádřit hodnotu $x(t)$ v závislosti na $x(t+1)$. Z rovnice

$$ax(t)^2 - ax(t) + x(t+1) = 0$$

totiž vychází

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4x(t+1)}{a}}\right).$$

Odtud plyne, že logistická rovnice s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ má reálné řešení pro nějaké indexy $t < t_0$ pouze v případě, že $x_0 \leq \frac{1}{4}a$. Toto řešení však obecně není vyjádřeno jednoznačně. Jedinou výjimkou je případ $a = 2$, $x_0 = \frac{1}{2}$; pak je konstantní posloupnost $x \equiv \frac{1}{2}$ jednoznačným řešením počáteční úlohy definovaným na celé množině $\mathbb{Z}$. V případě $x_0 = \frac{1}{4}a$, $a \neq 2$ totiž dostaneme $x(t_0 - 1) = \frac{1}{2} \neq x_0$ a hodnota $x(t_0 - 2)$ již není určena jednoznačně.

Z vyjádření diference hledané posloupnosti x bezprostředně plyne, že konstantní posloupnosti

$$x \equiv 0 \quad \text{a } x \equiv 1 - \frac{1}{a} \tag{4.24}$$

jsou řešeními logistické rovnice definovanými na celé množině $\mathbb{Z}$. Tyto posloupnosti ovšem obecně nelze považovat za řešení logistické rovnice s počáteční hodnotou $x_0 = 0$ nebo $x_0 = 1 - 1/a$.

Počáteční úlohu pro logistickou rovnici vyřešíme pouze ve třech speciálních případech.

Případ $a = 2$: Budeme řešit počáteční úlohu

$$x(t+1) = 2x(t)\big(1 - x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0, \tag{4.25}$$

která je ekvivalentní s úlohou

$$\Delta x = x(1 - 2x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Nejprve zavedeme substituci

$$y(t) = 1 - 2x(t), \quad \text{tj.} \quad x(t) = \frac{1}{2}\big(1 - y(t)\big). \tag{4.26}$$

Po dosazení a úpravách postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big(1-y(t+1)\big) &= \big(1-y(t)\big)\left(1-\frac{1}{2}\big(1-y(t)\big)\right)\\
\frac{1}{2}\big(1-y(t+1)\big) &= \frac{1}{2}\left(1-y(t)^2\right)\\
y(t+1) &= y(t)^2\\
y(t+1)y(t)^{-2} &= 1.
\end{aligned}$$

To je logaritmicky lineární rovnice. Jejím logaritmováním dostaneme

$$\ln y(t+1) - 2\ln y(t) = 0,$$

což je lineární homogenní rovnice $z(t+1) = 2z(t)$ pro posloupnost

$$z(t) = \ln y(t). \tag{4.27}$$

To znamená, že $z(t) = z_0 2^{t-t_0}$, kde $z_0 = \ln y(t_0) = \ln\big(1-2x(t_0)\big)$. Odtud dostaneme

$$y(t) = \mathrm{e}^{z(t)} = \exp\left(2^{t-t_0}\ln(1-2x_0)\right) = (1-2x_0)^{2^{t-t_0}}.$$

Zpětnou substitucí dostaneme řešení úlohy ve tvaru

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(1-(1-2x_0)^{2^{t-t_0}}\right). \tag{4.28}$$

Při řešení úlohy jsme mlčky předpokládali, že výraz $\ln(1-2x_0)$ je definován, tedy že $x_0 < \frac{1}{2}$. Výraz na pravé straně rovnosti (4.28) je však definován pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$. Platí totiž

$$(1-2x_0)^{2^{t-t_0}} = \big(|1-2x_0|\operatorname{sgn}(1-2x_0)\big)^{2^{t-t_0}} = \begin{cases} 1-2x_0, & t = t_0,\\ \exp\left(2^{t-t_0}\ln|1-2x_0|\right), & t \neq t_0. \end{cases}$$

Přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že rovností (4.28) je skutečně definováno řešení úlohy (4.25) pro libovolnou počáteční hodnotu.

Postup hledání tvaru (4.28) řešení počáteční úlohy (4.25) pomocí substitucí (4.26) a (4.27) můžeme popsat ve zhuštěné formě: substitucí

$$1-2x(t) = \exp z(t)$$

najdeme řešení úlohy (4.25) ve tvaru

$$1-2x(t) = \exp\left(2^{t-t_0}\ln(1-2x_0)\right).$$

Kvalitativní vlastnosti řešení úlohy (4.25). Pro $x_0 \in (0,1)$ je $|1-2x_0| < 1$, takže řešení úlohy s takovými počátečními hodnotami splňuje

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\lim_{t\to\infty}(1-2x_0)^{2^{t-t_0}} = \tfrac{1}{2}.$$

Pro $x_0 \in \{0,1\}$ a $t > t_0$ je $(1-2x_0)^{2^{t-t_0}} = 1$, neboť číslo 2^{t-t_0} je sudé. Proto řešení úlohy (4.25) s počáteční podmínkou $x_0 \in \{0,1\}$ splňuje rovnost $x(t) = 0$ pro každé $t > t_0$.

Pro $x_0 > 1$ nebo $x_0 < 0$ je $|1 - 2x_0| > 1$ a proto $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = -\infty$.

Pro $x_0 = \frac{1}{2}$ je řešení úlohy (4.25) rovno $x \equiv \frac{1}{2}$ v souladu s (4.24). Toto řešení je definováno na celé množině $\mathbb{Z}$, jak již bylo předesláno.

Případ $a = 4$: Nejprve budeme hledat nezáporné řešení počáteční úlohy

$$x(t+1) = 4x(t)\big(1 - x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0. \tag{4.29}$$

To znamená, že budeme předpokládat, že $x_0 \in [0, 1]$ a zavedeme substituci

$$x(t) = y(t)^2, \quad \text{tj. } y(t) = \sqrt{x(t)}\,. \tag{4.30}$$

Po dosazení do rekurentní formule v (4.29) dostaneme

$$y(t+1)^2 = 4y(t)^2\left(1 - y(t)^2\right) = \left(2y(t)\sqrt{1 - y(t)^2}\right)^2,$$

tedy

$$y(t+1) = 2y(t)\sqrt{1 - y(t)^2}\,.$$

Počáteční podmínka bude $y(t_0) = \sqrt{x_0} \geq 0$. Jedná se tedy o rovnici tvaru (4.21) s nezápornou počáteční hodnotou, kterou řešíme substitucí

$$y(t) = |\sin z(t)|. \tag{4.31}$$

Podle (4.23) dostaneme řešení ve tvaru

$$y(t) = \left|\sin\left(2^{t-t_0} \arcsin\sqrt{x_0}\right)\right|.$$

Zpětnou substitucí dostaneme řešení $x(t) = y(t)^2$ úlohy (4.29) vyjádřené formulí

$$x(t) = \left[\sin\left(2^{t-t_0} \arcsin\sqrt{x_0}\right)\right]^2. \tag{4.32}$$

Přímým výpočtem můžeme ověřit, že tato posloupnost je skutečně řešením úlohy (4.29).

Postup hledání řešení tvaru (4.32) počáteční úlohy (4.29) s $x_0 \in [0, 1]$ pomocí substitucí (4.30) a (4.31) můžeme opět zformulovat ve zhuštěné podobě: Substitucí

$$\sqrt{x(t)} = |\sin z(t)|$$

najdeme řešení úlohy (4.29) s $x_0 \in [0, 1]$ ve tvaru

$$\sqrt{x(t)} = \left|\sin\left(2^{t-t_0} \arcsin\sqrt{x_0}\right)\right|.$$

Kvalitativní vlastnosti řešení úlohy (4.29) *s* $x_0 \in [0, 1]$.

Nejprve ukážeme, že logistická rovnice s parametrem $a = 4$ má periodická řešení libovolné periody. Buď tedy n libovolné přirozené číslo a položíme

$$x_0 = \left(\sin\frac{2^{n-1}}{2^n + 1}\pi\right)^2.$$

Dosazením do (4.32) dostaneme

$$x(t_0+n) = \left[\sin\left(2^n \arcsin\sqrt{\left(\sin\frac{2^{n-1}}{2^n+1}\pi\right)^2}\right)\right]^2 = \left[\sin\left(2^n\frac{2^{n-1}}{2^n+1}\pi\right)\right]^2 =$$

$$= \left[\sin\left((2^n+1-1)\frac{2^{n-1}}{2^n+1}\pi\right)\right]^2 = \left[\sin\left(2^{n-1}\pi - \frac{2^{n-1}}{2^n+1}\pi\right)\right]^2 = \left(-\sin\frac{2^{n-1}}{2^n+1}\pi\right)^2 = x_0.$$

Pro $n=1$ je

$$\left(\sin\frac{2^{n-1}}{2^n+1}\pi\right)^2 = \left(\sin\tfrac{1}{3}\pi\right)^2 = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4}$$

v souladu s (4.24).

V případě rovnice (4.25) libovolné řešení s počáteční hodnotou $x_0 \in (0,1)$ konvergovalo ke konstantnímu nenulovému řešení. Rovnice (4.29) tuto vlastnost nemá, periodická řešení samozřejmě nekonvergují. Ovšem existují taková řešení, která ke $\frac{3}{4}$ konvergují. Uvažme řešení s počáteční hodnotou

$$x_0 = \left(\sin\frac{1}{3\cdot 2^n}\pi\right)^2$$

a buď $k \in \mathbb{N}_0$ libovolné. Pak platí

$$x(t_0+k) = \left[\sin\left(2^k\frac{1}{3\cdot 2^n}\pi\right)\right]^2 = \begin{cases} \frac{3}{4}, & k \geq n, \\ \left[\sin\left(\frac{1}{3\cdot 2^{n-k}}\pi\right)\right]^2 \neq \frac{3}{4}, & k < n. \end{cases}$$

Toto řešení tedy konverguje ke $\frac{3}{4}$ a to tak, že po n krocích této hodnoty dosáhne a zůstane konstantní.

Počáteční úloha pro logistickou rovnici s parametrem $a = 4$ má také řešení, které je nenulové pouze pro konečně mnoho indexů, tj. řešení, které „po konečně mnoha krocích vymizí“. Buď opět $n \in \mathbb{N}$ libovolné číslo a položme

$$x_0 = \left(\sin\frac{\pi}{2^n}\right)^2.$$

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$x(t_0+k) = \left[\sin\left(2^k\frac{\pi}{2^n}\right)\right]^2 = \left[\sin\left(2^{k-n}\pi\right)\right]^2.$$

To znamená, že $x(t_0+k) = 0$ pro $k \geq 0$ a $x(t_0+k) > 0$ pro $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$.

Nyní hledejme řešení úlohy (4.29) s počáteční hodnotou x_0 splňující nerovnost $x_0 > 1$ nebo $x_0 < 0$, tj. $\left|x_0 - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$.

Nejprve si všimněme, že pro $x_0 > 1$ je $x(t_0+1) = 4x_0(1-x_0) < 0$. Dále pro $x(t) < 0$ je také

$$x(t+1) = 4x(t)\big(1-x(t)\big) = -4|x(t)|\big(1+|x(t)|\big) < 0,$$

což znamená, že pokud v nějakém t_1 je řešení úlohy (4.29) záporné, pak je záporné pro každé $t \geq t_1$. Celkem tak dostáváme, že pro počáteční hodnotu x_0 splňující nerovnost $\left|x_0 - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$, řešení úlohy (4.29) splňuje nerovnost $x(t) < 0$ pro všechna $t \geq t_0+1$. Budeme tedy řešit úlohu

$$x(t+1) = 4x(t)\big(1-x(t)\big), \quad x(t_0+1) = x_1 < 0. \tag{4.33}$$

Poněvadž řešení této úlohy je záporné, můžeme použít substituci

$$x(t) = -y(t)^2, \quad \text{tj.} \quad |y(t)| = \sqrt{-x(t)}. \tag{4.34}$$

Dosazením do rovnice v (4.33) dostaneme

$$y(t+1)^2 = -x(t+1) = -4x(t)\big(1 - x(t)\big) = 4y(t)^2\big(1 + y(t)^2\big),$$

neboli

$$|y(t+1)|^2 = 2|y(t)|\sqrt{1 + |y(t)|^2}.$$

To je diferenční rovnice tvaru (4.19) pro posloupnost $|y|$. Příslušná počáteční podmínka je $y(t_0+1)| = \sqrt{-x_1}$. Tuto úlohu řešíme substitucí $|y(t)| = \sinh z(t)$ a podle (4.20) dostaneme její řešení ve tvaru

$$|y(t)| = \sinh\left(2^{t-t_0-1} \operatorname{argsinh}|y(t_0+1)|\right) = \sinh\left(2^{t-t_0-1} \operatorname{argsinh}\sqrt{-x_1}\right).$$

Zpětnou substitucí (4.34) napíšeme řešení úlohy (4.33) ve tvaru

$$x(t) = -\left[\sinh\left(2^{t-t_0-1} \operatorname{argsinh}\sqrt{-x_1}\right)\right]^2. \tag{4.35}$$

Tento výsledek můžeme ještě upravit. Nejprve využijeme skutečnosti, že $-x_1 = 4x_0(x_0-1)$ a proto

$$\begin{aligned}\operatorname{argsinh}\sqrt{-x_1} &= \operatorname{argsinh}\sqrt{4x_0^2 - 4x_0} = \ln\left(\sqrt{4x_0^2 - 4x_0} + \sqrt{4x_0^2 - 4x_0 + 1}\right) = \\ &= \ln\left(\sqrt{(2x_0-1)^2 - 1} + \sqrt{(2x_0-1)^2}\right) = \ln\left(|1-2x_0| + \sqrt{(2x_0-1)^2 - 1}\right) = \\ &= \operatorname{argcosh}|1-2x_0|;\end{aligned}$$

dále využijeme vzorec pro hyperbolický sinus polovičního argumentu

$$\left(\sinh\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\cosh\alpha - 1}{2}$$

a po dosazení dostaneme

$$x(t) = -\tfrac{1}{2}\left(\cosh\left(2^{t-t_0} \operatorname{argcosh}|1-2x_0|\right) - 1\right).$$

Odtud vyjádříme

$$1 - 2x(t) = \cosh\left(2^{t-t_0} \operatorname{argcosh}|1-2x_0|\right). \tag{4.36}$$

Řešení úlohy (4.29) s počáteční hodnotou x_0, splňující nerovnost $\left|x_0 - \frac{1}{2}\right|$ jsme pro $t > t_0$ dostali v implicitním tvaru (4.36). Již snadno ověříme, že rovností

$$|1 - 2x(t)| = \cosh\left(2^{t-t_0} \operatorname{argcosh}|1-2x_0|\right) \tag{4.37}$$

je dáno řešení úlohy (4.29) s $\left|x_0 - \frac{1}{2}\right|$ pro každé $t \geq t_0$.

Přímým výpočtem můžeme také ukázat, že substitucí

$$|1 - 2x(t)| = \cosh z(t)$$

dostaneme řešení úlohy (4.29) s počáteční hodnotou x_0 splňující nerovnost $\left|x_0 - \frac{1}{2}\right|$ ve tvaru (4.37).

Kvalitativní vlastnosti řešení úlohy (4.29) *s počáteční hodnotou* x_0 *splňující nerovnost* $\left|x_0 - \frac{1}{2}\right|$. Z vyjádření řešení ve tvaru (4.35) vidíme, že pro libovolné řešení x úlohy platí

$$\lim_{t\to\infty} = -\infty$$

a posloupnost x je ryze klesající.

Případ $a = -2$**:** Budeme řešit počáteční úlohu

$$x(t+1) = -2x(t)\big(1 - x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0. \tag{4.38}$$

Nejprve zavedeme substituci

$$y(t) = x(t) - \tfrac{1}{2}, \text{ tj. } x(t) = y(t) + \tfrac{1}{2}. \tag{4.39}$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} y(t+1) = x(t+1) - \tfrac{1}{2} = -2x(t)\big(1 - x(t)\big) - \tfrac{1}{2} = -2\left(y(t) + \tfrac{1}{2}\right)\left(1 - y(t) - \tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2} = \\ = -2\left(y(t) + \tfrac{1}{2}\right)\left(-y(t) + \tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2} = 2\left(y(t)^2 - \tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{2} = 2y(t)^2 - 1. \end{aligned}$$

Posloupnost y je tedy řešením počáteční úlohy

$$y(t+1) = 2y(t)^2 - 1, \quad y(t_0) = x_0 - \tfrac{1}{2}.$$

To je první z rovnic řešitelná goniometrickou nebo hyperbolickou substitucí, viz 4.4.1. Řešení rovnice hledáme pro různé počáteční hodnoty různými substitucemi.

Nechť nejprve $y(t_0) = x_0 - \frac{1}{2} \in [-1, 1]$, tj. $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Substitucí

$$y(t) = \cos z(t) \tag{4.40}$$

dostaneme řešení ve tvaru $y(t) = \cos\left(2^{t-t_0} \arccos y_0\right)$. Zpětnou substitucí dostaneme řešení původní úlohy

$$x(t) = \tfrac{1}{2} + \cos\left(2^{t-t_0} \arccos\left(x_0 - \tfrac{1}{2}\right)\right).$$

Pokud $|y(t_0)| = \left|x_0 - \frac{1}{2}\right| > 1$, tj. $x_0 < -\frac{1}{2}$ nebo $x_0 > \frac{3}{2}$, použijeme substituci

$$y(t) = \cosh z(t) \tag{4.41}$$

a dostaneme řešení ve tvaru

$$x(t) = \tfrac{1}{2} + \cosh\left(2^{t-t_0} \ln\left(|x_0 - \tfrac{1}{2}| + \sqrt{\left(x_0 - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 1}\right)\right).$$

Řešení logistické rovnice s parametrem $a = -2$ pomocí substitucí (4.39) a (4.40) nebo (4.41) můžeme opět shrnout:

Řešení úlohy (4.38) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ najdeme substitucí

$$x(t) - \tfrac{1}{2} = \cos z(t)$$

parametr	počáteční hodnota	$f(\xi)$	$\varphi(\zeta)$
$a=2$	$x_0 \in \mathbb{R}$	$1-2\xi$	e^{ζ}
$a=4$	$x_0 \in [0,1]$	$\sqrt{\xi}$	$\lvert\sin\zeta\rvert$
$a=4$	$x_0 > 1$ nebo $x_0 < 0$	$\lvert 1-2\xi\rvert$	$\cosh\zeta$
$a=-2$	$x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$	$\xi - \frac{1}{2}$	$\cos\zeta$
$a=-2$	$x_0 < -\frac{1}{2}$ nebo $x_0 > \frac{3}{2}$	$\xi - \frac{1}{2}$	$\cosh\zeta$

Tabulka 4.1: Hodnoty parametru a počáteční podmínky, pro které je řešení diskrétní logistické rovnice $x(t+1) = ax(t)\big(1-x(t)\big)$ s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ implicitně dáno rovností $f\big(x(t)\big) = \varphi\Big(2^{t-t_0}\varphi^{-1}\big(f(x_0)\big)\Big)$.

ve tvaru

$$x(t) - \tfrac{1}{2} = \cos\left(2^{t-t_0} \arccos\left(x_0 - \tfrac{1}{2}\right)\right);$$

řešení úlohy (4.38) s počáteční podmínkou $|x_0 - \frac{1}{2}| > 1$ najdeme substitucí

$$x(t) - \tfrac{1}{2} = \cosh z(t)$$

ve tvaru

$$x(t) - \tfrac{1}{2} = \cosh\left(2^{t-t_0} \operatorname{argcosh}\left(x_0 - \tfrac{1}{2}\right)\right).$$

„Zobecňující“ poznámka: Logistickou rovnici

$$x(t+1) = ax(t)\big(1-x(t)\big)$$

lze pro některé hodnoty parametru a a některé počáteční hodnoty x_0 řešit substitucí

$$f\big(x(t)\big) = \varphi\big(z(t)\big),$$

kterou dostaneme řešení logistické rovnice v implicitním tvaru

$$f\big(x(t)\big) = \varphi\Big(2^{t-t_0}\varphi^{-1}\big(f(x_0)\big)\Big).$$

Hodnoty parametru a a počáteční hodnoty x_0, pro které jsme tímto postupem našli řešení logistické rovnice jsou shrnuty v tabulce 4.1.

4.5 Cvičení

V úlohách 1–6 najděte obecné řešení rovnice.

1. $x(t+1)^2 - (2+t)x(t+1)x(t) - 2tx(t)^2 = 0$
2. $x(t+1)x(t) - x(t+1) + x(t) = 0$
3. $x(t+1)x(t) - \frac{2}{3}x(t+1) + \frac{1}{6}x(t) = \frac{5}{18}$

4. $x(t+1) = x(t)^2$
5. $x(t+1) = 2x(t)\sqrt{1-x(t)^2}$
6. $x(t+1) = \frac{1}{2}\left(x(t) - \dfrac{a}{x(t)}\right)$, $a > 0$

V úlohách 7–10 najděte řešení rovnice s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$.

7. $x(t+1)^2 - 2x(t+1)x(t) - 3x(t)^2 = 0$
8. $x(t+1) = 5 - \dfrac{6}{x(t)}$
9. $x(t+1) = \dfrac{x(t)+a}{x(t)+1}$, $a > 0$
10. $x(t+1) = \dfrac{2-x(t)^2}{2\big(1-x(t)\big)}$
11. Řešte počáteční úlohu $x(t+2) = \dfrac{x(t+1)^3}{x(t)^2}$, $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$.
12. Ukažte, že k libovolnému kladnému přirozenému číslu n existuje hodnota $x_0 = x_0(n)$ taková, že řešení úlohy
$$x(t+1) = 2x(t)\big(x(t)-1\big), \quad x(0) = x_0$$
má periodu n.

Výsledky:

1. $2^t c$, $x(t_0)(-1)^{t-t_0}\prod_{i=t_0}^{t-1} i$,
2. $\dfrac{1}{c-t}$,
3. $\dfrac{5-2c(-6)^t}{6\big(1+c(-6)^t\big)}$, $-\frac{1}{3}$
4. c^{2^t}
5. $\sin 2^t c$
6. $\sqrt{a}\,\operatorname{cotg} 2^t c$
7. $x_0 3^t$, $x_0(-1)^t$
8. $\dfrac{3x_0-6}{x_0-2+(x_0+3)\left(\frac{2}{3}\right)^t} + \dfrac{2x_0+6}{x_0+3+(x_0-2)\left(\frac{3}{2}\right)^t}$
9. $\sqrt{a}\,\dfrac{(x_0+\sqrt{a})\,(1+\sqrt{a})^t + (x_0-\sqrt{a})\,(1-\sqrt{a})^t}{(x_0+\sqrt{a})\,(1+\sqrt{a})^t - (x_0-\sqrt{a})\,(1-\sqrt{a})^t}$
10. $1 - \operatorname{cotg}\left(2^t \operatorname{arccotg}(1-x_0)\right)$
11. $x_0\left(\dfrac{x_1}{x_0}\right)^{2^t-1}$
12. Například $x_0(n) = \frac{1}{2} + \cos\dfrac{2\pi}{2^n-1}$

Kapitola 5

Autonomní rovnice

Jedna společná vlastnost tří modelů růstu populace sestavených v Kapitole 1 je bezprostředně vidět z tvarů rovnic (1.14), (1.16) a (1.17) — na pravé straně těchto rekurentních formulí se čas t vyskytuje pouze jako index hledané posloupnosti x. To znamená, že model růstu je v každém časovém okamžiku stejný. Tuto skutečnost lze interpretovat tak, že změny okolního světa nemají žádný vliv na růst populace. Jinak řečeno, populaci (charakterizovanou vnitřním koeficientem růstu r) s jejím prostředím (charakterizovanou kapacitou K) si představujeme jako izolovanou od okolního světa, populaci a její prostředí chápeme jako uzavřený systém a tento systém se vyvíjí podle svých vlastních ($\alpha\upsilon\tau o\varsigma$) zákonů ($\nu o\mu o\iota$). Proto rovnice (1.14), (1.16), (1.17) a obecně diferenční rovnice a jejich soustavy, v jejichž zápisu se čas t objevuje jen jako index hledaných posloupností, nazýváme *autonomní*.

Autonomní rovnice a systémy jsou vymezeny pouze tvarem zápisu, nikoliv jejich interpretacemi nebo realitou, kterou modelují. To, že chápeme populaci spolu s jejím prostředím jako jeden izolovaný systém, není vynuceno nějakými objektivními zákonitostmi. Jedná se jen o jednu z možností popisu, o jeden možný úhel pohledu. Stejně dobře bychom si mohli představovat, že samotná populace představuje systém, na který působí jeho okolí. Nebo že populace a její prostředí jsou dva systémy, které se vzájemně ovlivňují. Tyto možnosti ukážeme na příkladu Bevertonovy-Holtovy rovnice (1.16).

Řešení rovnice (1.16) s počáteční podmínkou (1.9) je podle (4.1) dáno formulí

$$x(t) = \frac{K\xi_0}{\xi_0 + (K-\xi_0)r^{-t}}. \tag{5.1}$$

Odtud plyne, že

$$\frac{x(t+1)}{x(t)} = \frac{\xi_0 + (K-\xi_0)r^{-t}}{\xi_0 + (K-\xi_0)r^{-t-1}} = \frac{r}{1 + \dfrac{(r-1)\xi_0}{\xi_0 + (K-\xi_0)r^{-t}}}.$$

Označíme-li tedy

$$y(t) = \frac{\xi_0}{\xi_0 + (K-\xi_0)r^{-t}} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{K}{\xi_0} - 1\right) r^{-t}}, \tag{5.2}$$

můžeme psát

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)y(t)} x(t). \tag{5.3}$$

Vývoj velikosti populace je tedy také zapsán lineární homogenní rovnicí. Tato rovnice není autonomní, proměnná t se neobjevuje jen jako index hledané posloupnosti x, ale také ve výrazu $y(t)$ a posloupnost y přitom považujeme za známou. Výraz

$$\frac{r}{1+(r-1)y(t)}$$

lze interpretovat jako růstový koeficient populace, který se v čase mění; je-li $(r-1)y(t)>0$, je tento růstový koeficient menší než vnitřní koeficient růstu populace, je-li $(r-1)y(t)<0$, pak je větší. Veličinu $y(t)$ můžeme tedy interpretovat jako vliv prostředí na růst populace v čase t, jako jakousi charakteristiku proměnlivého prostředí. Z rovností (5.1) a (5.2) vidíme, že

$$y(t)=\frac{x(t)}{K}.$$

Bezrozměrná veličina y tedy vyjadřuje poměr velikosti populace k úživnosti prostředí, což lze také chápat jako relativní (vy)čerpání zdrojů prostředí, nebo z jiného pohledu jako jejich vzácnost.

Z rovnosti (5.2) plyne

$$\left(\frac{K}{\xi_0}-1\right)r^{-t}=\frac{1}{y(t)}-1$$

a tedy

$$y(t+1)=\frac{1}{1+\left(\frac{K}{\xi_0}-1\right)r^{-t-1}}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{y(t)}-1\right)r^{-1}}=\frac{ry(t)}{1+(r-1)y(t)}.$$

Posloupnost y je tedy řešením nelineární diferenční rovnice

$$y(t+1)=\frac{ry(t)}{1+(r-1)y(t)}. \tag{5.4}$$

Model růstu populace máme nyní vyjádřený dvěma autonomními rovnicemi (5.3) a (5.4). Rovnice pro posloupnost y (charakterizující prostředí) nezávisí na posloupnosti x, proto nemluvíme o systému ale o dvojici rovnic. Tuto dvojici můžeme interpretovat jako model autonomně se vyvíjejícího prostředí, které ovlivňuje velikost populace. V rovnicích (5.3), (5.4) se nevyskytuje parametr K; úživnost prostředí by se objevila jako počáteční podmínka

$$y(0)=\frac{\xi_0}{K}.$$

Z relací (5.3) a (1.16) můžeme také odvodit

$$1+(r-1)y(t)=r\frac{x(t)}{x(t+1)}=\frac{K+(r-1)x(t)}{K},$$

takže

$$(r-1)y(t)=\frac{(r-1)x(t)}{K}.$$

Dosadíme-li tento výraz do (5.4), dostaneme

$$y(t+1)=\frac{rK}{K+(r-1)x(t)}y(t). \tag{5.5}$$

Nyní nebudeme posloupnost y považovat za známou. Systém rovnic (5.3), (5.5) je autonomní, proměnná t se na pravých stranách objevuje pouze jako index hledaných posloupností. Systém (5.3), (5.5) můžeme tedy chápat jako model vývoje populace (charakterizované její velikostí x) a a jejího životního prostředí (charakterizované relativní vzácností zdrojů y); přitom se populace a prostředí vzájemně ovlivňují, ale nejsou ovlivňovány ničím jiným.

Označíme-li

$$\varphi(\eta) = \frac{r}{1+(r-1)\eta}, \qquad \psi(\xi) = \frac{rK}{K+(r-1)\xi},$$

můžeme systém rovnic (5.3), (5.5) zapsat v „symetrickém" tvaru

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \varphi\big(y(t)\big)x(t), \\ y(t+1) &= \psi\big(x(t)\big)y(t). \end{aligned}$$

Tvar rovnic naznačuje, že veličinu $\varphi(y)$ můžeme interpretovat jako růstový koeficient populace o velikosti x, a analogicky, veličinu $\psi(x)$ můžeme interpretovat jako růstový koeficient nějaké populace o velikosti y.

Triviální úprava modelu růstu populace v omezeném prostředí ukázala, že populaci a její prostředí můžeme chápat dynamicky jako vztah dvou vyvíjejících se populací; přitom růstový koeficient jedné z nich závisí na té druhé.

Pokud je populace životaschopná, tj. její vnitřní koeficient růstu r je větší než 1, pak

$$\varphi'(\eta) = -\frac{r(r-1)}{\big(1+r-1)\eta\big)^2} < 0, \qquad \psi'(\xi) = -\frac{rK(r-1)}{\big(K+r-1)\xi\big)^2} < 0.$$

Zvětšení „populace y" zmenšuje rychlost růstu „populace x" a zvětšení „populace x" zmenšuje rychlost růstu „populace y". To v ekologické terminologii znamená, že uvažované interagující populace jsou ve vztahu konkurence (kompetice).

Nějaký systém (slovo „systém" nyní chápeme jako „nějak vymezená část reality", nikoliv ve smyslu „systém rovnic"), na který nepůsobí vnější vlivy, se nemusí nijak chovat; jeho změna nebo vývoj mohou být vyvolávány teprve zásahy z jeho okolí. O takovém systému řekneme, že je v dynamické rovnováze. Pokud je v takovém případě stav systému popisován nějakou časově závislou veličinou (tj. posloupností) $x = x(t)$, posloupnost x je v tomto případě konstantní a dynamickou rovnováhu představuje nějaká hodnota x^* taková, že $x \equiv x^*$. Je-li navíc systém modelován autonomní diferenční rovnicí $x(t+1) = f\big(x(t)\big)$, pak musí platit $x^* = f(x^*)$; dynamicky rovnovážný stav x^* je dán řešením této (algebraické) rovnice.

Dynamická rovnováha samozřejmě neznamená, že „se nic neděje". Považujeme-li za systém například populaci, kterou charakterizujeme její velikostí x, může být tato velikost konstantní a přitom může docházet k úhynu a rození jedinců, počet uhynulých však musí být stejný jako počet nově narozených.

Z hlediska modelované reality bývá zajímavou otázkou, jak se systém chová, pokud v dynamické rovnováze není. Nebo z jiného hlediska: co se stane, když systém z rovnováhy vychýlíme? Budeme to nyní opět ilustrovat na příkladu populace. Za adekvátní model vývoje její velikosti budeme považovat logistickou rovnici (1.14).

Rovnovážný stav velikosti populace je dán řešením kvadratické rovnice

$$x^* = x^*\left(r - \frac{r-1}{K}x^*\right).$$

Jedním kořenem této rovnice je $x^* = 0$; to je nezajímavý triviální případ — žádná populace není a proto se nijak nevyvíjí. Zajímavější je druhý kořen $x^* = K$, velikost populace je ustálena přesně na hodnotě úživnosti prostředí.

Z explicitního řešení logistické rovnice ukázaného v 4.4.2 víme, že v případě $r = 2$ každé řešení s počáteční podmínkou $x_0 \in (0, 2K)$ konverguje k hodnotě K. (Výsledky byly v 4.4.2 sice formulovány pro jednodušší rovnici (4.3), ale zpětnou změnou měřítka (4.2) snadno dostaneme výsledky pro rovnici (1.14) se dvěma parametry.) Naopak, v případě $r = 4$ existují řešení s počáteční hodnotou $x_0 \in (0, \frac{4}{3}K)$, která konvergují k rovnovážné hodnotě K, a existují řešení, která k této hodnotě nekonvergují. Pokud je tedy růstový koeficient malý a počáteční velikost populace „není příliš daleko“ od rovnovážného stavu, populace se do „ekologické rovnováhy“ po čase dostane. Je-li však růstový koeficient velký, i malá změna velikosti populace od rovnovážného stavu může vést ke „ztrátě ekologické stability“.

Z tohoto příkladu vidíme, že chování systému, i systému popsaného jednoduchou rovnicí, nemusí být jednoduše charakterizováno jeho dynamickou rovnováhou.

V této kapitole se budeme zabývat autonomními rovnicemi a jejich systémy. Nejprve ukážeme jednoduché vlastnosti autonomních rovnic prvního řádu. Z nich nejdůležitější je „invariance v čase“, která, zhruba řečeno, ukazuje, že nezáleží na tom, kdy se systém popsaný autonomní rovnicí začal vyvíjet, ale na tom, z jaké hodnoty tento vývoj začínal. Pak se budeme věnovat rovnovážným stavům a zejména jejich stabilitě, tj. schopnosti systému se po (malém) vychýlení z rovnováhy do rovnovážného stavu vrátit. V případě autonomních rovnic k tomuto zkoumání máme efektivní výpočetní i grafické metody.

Výsledky získané pro autonomní rovnice prvního řádu pak zobecníme na systémy rovnic a rovnice vyšších řádů; pro ně však již grafické metody nejsou k dispozici.

5.1 Autonomní rovnice prvního řádu

Autonomní diferenční rovnice prvního řádu je taková rovnice, v níž se index posloupnosti t nevyskytuje explicitně. Ve tvaru rekurentní formule ji můžeme zapsat jako

$$x(t+1) = f\big(x(t)\big), \tag{5.6}$$

kde $f : \Omega \to \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Pomocí operátoru posunu $^\sigma$ můžeme rovnici (5.6) zapsat ještě stručněji ve tvaru

$$x^\sigma = f(x).$$

Autonomní rovnice tedy mohou modelovat proces, který se odehrává v podmínkách neměnících se v průběhu času. To lze interpretovat i tak, že systém je izolovaný, nepůsobí na něho žádné vnější vlivy. Posloupnost x vyjadřuje nějak kvantifikovaný stav tohoto procesu. Funkce f popisuje, jak se stav v průběhu časového kroku začínajícího v okamžiku t změní z hodnoty $x(t)$ na hodnotu $x(t+1)$. Množina Ω je množinou hodnot, kterých může stav procesu nabývat, proto ji nazýváme *stavový prostor*.

U procesů probíhajících v časově neproměnných podmínkách nezáleží na tom jaký čas zvolíme za počátek, podrobněji:

Tvrzení 16. Je-li posloupnost $\tilde{x}$ řešením rovnice (5.6) s počáteční podmínkou $\tilde{x}(t_0) = \xi_0$, pak posloupnost x definovaná vztahem $x(t) = \tilde{x}(t + t_0)$ je řešením rovnice (5.6) s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$.

Důkaz: Posloupnost x je řešením rovnice (5.6), neboť

$$x(t+1) = \tilde{x}(t+1+t_0) = \tilde{x}\big((t+t_0)+1\big) = f\big(\tilde{x}(t+t_0)\big) = f\big(x(t)\big),$$

a splňuje počáteční podmínku $x(0) = \tilde{x}(0+t_0) = \tilde{x}(t_0) = \xi_0$. □

Bez újmy na obecnosti tedy můžeme rovnici (5.6) uvažovat s počáteční podmínkou

$$x(0) = \xi_0; \tag{5.7}$$

přitom musí být $\xi_0 \in \operatorname{Dom} f$.

Úlohu (5.6), (5.7) můžeme řešit tak, že postupně počítáme jednotlivé členy posloupnosti řešení, tj.

$$\begin{aligned} x(0) &= \xi_0, \\ x(1) &= f\big(x(0)\big) = f(\xi_0), \\ x(2) &= f\big(x(1)\big) = f\big(f(\xi_0)\big) = f^2(\xi_0), \\ &\vdots \\ x(t) &= f^t(\xi_0), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Posloupnost x je tedy řešením úlohy (5.6), (5.7) právě tehdy, když $x(t) = f^t(\xi_0)$ pro každý index $t \in \mathbb{N}$ (symbol f^t označuje t-krát složenou funkci f, nikoliv t-tou mocninu funkční hodnoty). Z tohoto vyjádření je vidět, že z ohraničenosti funkce f plyne ohraničenost řešení rovnice (5.6). Podrobněji:

Tvrzení 17. Pokud existuje konstanta $h \in \mathbb{R}$, resp. $H \in \mathbb{R}$, taková, že $h \leq f(x)$, resp. $f(x) \leq H$, pro všechna $x \in \Omega$, pak pro každé řešení x rovnice (5.6) a pro všechny indexy $t > 0$ platí $h \leq x(t)$, resp. $x(t) \leq H$.

O odhadu řešení úlohy (5.6), (5.7) z jiného pohledu vypovídá následující

Tvrzení 18. Nechť existuje číslo q takové, že pro všechna $\xi \in A \subseteq \Omega$ platí

$$|f(\xi)| \leq q|\xi|, \text{ resp. } |f(\xi)| \geq q|\xi|.$$

Nechť $\xi_0 \in A$, x je řešení úlohy (5.6), (5.7). Pak pro každý index $t \in \mathbb{N}_0$ řešení x splňuje nerovnost

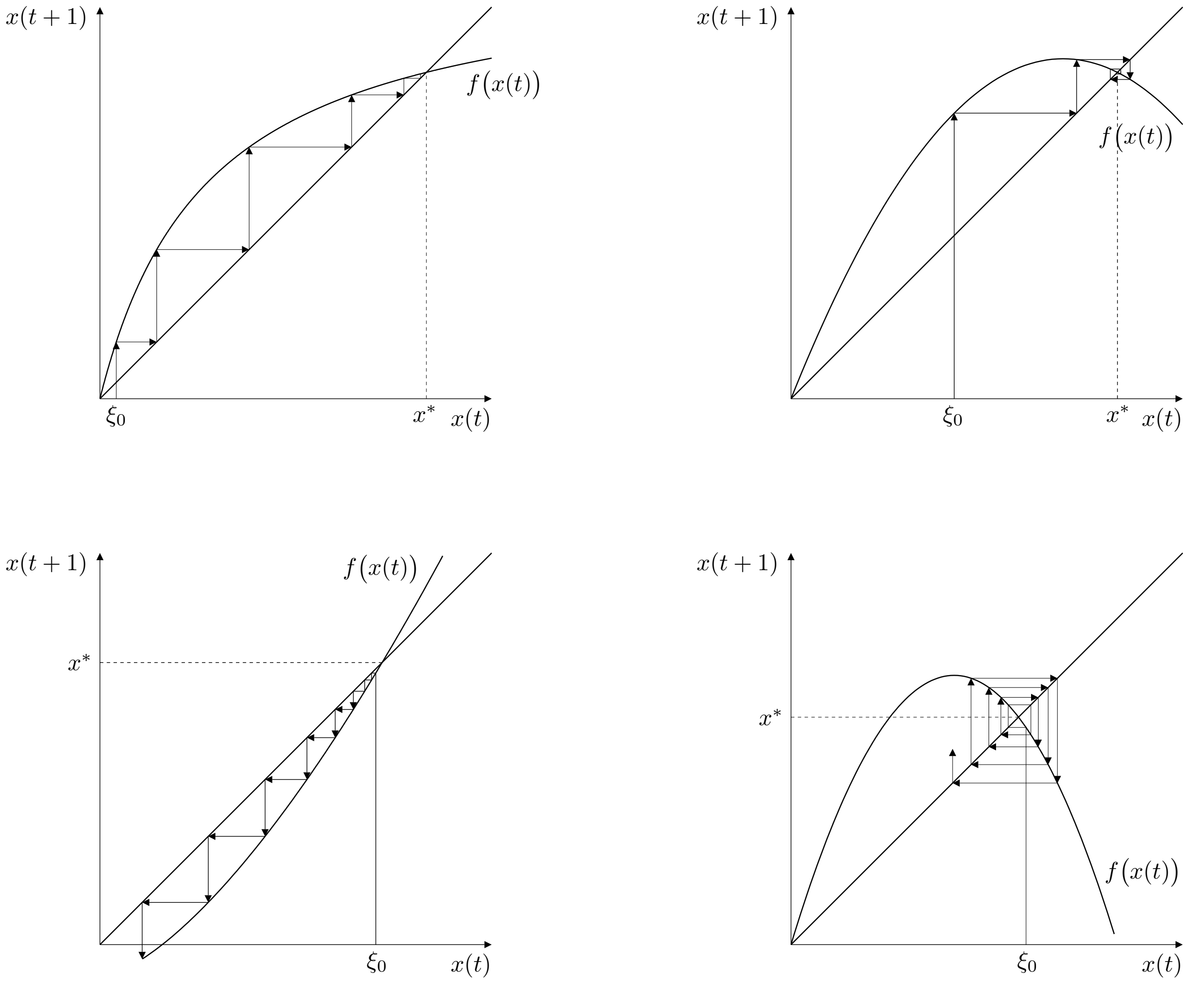
$$|x(t)| \leq |\xi_0|q^t, \text{ resp. } x(t) \geq |\xi_0|q^t,$$

nebo existuje $t_1 \leq t$ takové, že $x(t_1) \notin A$. Pokud $f(A) \subseteq A$, nemůže druhá možnost nastat.

Důkaz: Tvrzení dokážeme úplnou indukcí. Pro $t = 0$ platí $|x(0)| = |\xi_0| = |\xi_0|q^0$. Indukční krok v prvním případě je

$$|x(t+1)| = \big|f\big(x(t)\big)\big| \leq q\,|x(t)| \leq q|\xi_0|q^t = |\xi_0|q^{t+1},$$

ve druhém má obrácené nerovnosti. □



Obrázek 5.1: Grafické řešení autonomní rovnice (5.6). Vlevo „schodový diagram“, vpravo „pavučinový diagram“, nahoře stabilní (přitahující) pevný (rovnovážný) bod zobrazení f, dole nestabilní (odpuzující).

5.1.1 Grafické řešení

Uvažujme nelineární diferenční rovnici (rekurentní formuli) prvního řádu (5.6) s počáteční podmínkou (5.7). Rovnici lze chápat také jako zápis zobrazení, které reálné hodnotě $x(t)$ přiřadí hodnotu $x(t+1)$, tj. jako reálnou funkci jedné reálné proměnné. Toto zobrazení lze znázornit v souřadné rovině — na vodorovnou osu nanášíme hodnoty $x(t)$, na svislou hodnoty $x(t+1)$. Nakreslíme tedy graf funkce f a pro danou hodnotu $x(0) = \xi_0$ na něm najdeme hodnotu $x(1)$.

Stejným způsobem chceme najít hodnotu $x(2)$ pomocí hodnoty $x(1)$. Hodnotu $x(1)$ tedy přeneseme na vodorovnou osu; to můžeme udělat tak, že sestrojíme vodorovnou úsečku ve výšce $x(1)$ („výškou“ rozumím, že přímka incidentní s touto úsečkou prochází bodem $\big(0, x(1)\big)$ na svislé ose) a najdeme její průsečík s osou prvního kvadrantu, tedy bod $\big(x(1), x(1)\big)$. Nyní průsečík svislé přímky procházející tímto bodem a grafu funkce f má druhou souřadnici rovnu hledané hodnotě $x(2) = f\big(x(1)\big)$.

Při hledání hodnoty $x(2)$ řešení uvažované diferenční rovnice tedy sestrojíme vodorovnou úsečku s krajními body $\big(\xi_0, x(1)\big)$ a $\big(x(1), x(1)\big)$, poté úsečku s krajními body $\big(x(1), x(1)\big)$ a $\big(x(1), x(2)\big)$. Tímto způsobem můžeme pokračovat a postupně nacházet (konstruovat) jednotlivé členy posloupnosti, která řeší danou diferenční rovnici. V závislosti na tvaru grafu funkce f, úsečky konstruované popsaným způsobem vytváří „schody“, obr. 5.1 vlevo, (odtud používaný název „stair step diagram“) nebo „pavučinu“ („codweb diagram“), obr. 5.1 vpravo.

Pokud je funkce f konkávní, má nejvýše dva pevné body. To znamená, že existují nejvýše dvě hodnoty x^* takové, že $f(x^*) = x^*$. Tyto body jsou souřadnicemi průsečíků grafu funkce f a osy prvního kvadrantu. Na diagramech konstruovaných popsaným způsobem je dobře vidět, za jakých podmínek (tj. při jakém tvaru funkce f) se řešení uvažované diferenční rovnice od stacionárního bodu vzdaluje (obr. 5.1 dole) nebo se k němu přibližuje (obr. 5.1 nahoře).

5.1.2 Rovnovážné body a jejich stabilita

Definice 25. Množina bodů $\mathcal{T}(\xi_0) = \{f^n(\xi_0) : n \in \mathbb{N}\}$ se nazývá *(pozitivní) trajektorie bodu* ξ_0 nebo *orbita bodu* ξ_0.

Trajektorie bodu ξ_0 je množinou členů řešení úlohy (5.6), (5.7).

Definice 26. Řekneme, že bod $x^* \in \operatorname{Dom} f$ je *rovnovážný (stacionární) bod rovnice* (5.6), pokud je pevným bodem funkce f, tj. pokud platí $f(x^*) = x^*$.

Bod x^* je rovnovážným bodem rovnice (5.6) právě tehdy, když stacionární posloupnost $x \equiv x^*$ je řešením této rovnice. To nastává právě tehdy, když x^* je první souřadnicí průsečíku grafu funkce f a osy prvního a třetího kvadrantu, tj. přímky o rovnici $y = x$.

Trajektorie rovnovážného bodu x^* je jednoprvková, $\mathcal{T}(x^*) = \{x^*\}$.

Definice 27. Řekneme, že rovnovážný bod x^* rovnice (5.6) je *dosažitelný z bodu* $\xi \in \operatorname{Dom} f$, pokud existuje kladné číslo $r \in \mathbb{N}$ takové, že $f^r(\xi) = x^*$ a $f^{r-1}(\xi) \neq x^*$.

Je-li rovnovážný bod x^* dosažitelný z nějakého bodu $\xi \neq x^*$, pak funkce f není prostá.

Příklad: Uvažujme rovnici

$$x(t+1) = T\big(x(t)\big),$$

kde funkce T je definována vztahem

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Platí $T(0) = 0$, $T(\frac{2}{3}) = 2 - 2\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, takže 0 a $\frac{2}{3}$ jsou rovnovážné body uvažované rovnice. Dále

$$\begin{aligned} &T(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{2}{3}, \\ &T(\tfrac{1}{6}) = \tfrac{1}{3},\ T^2(\tfrac{1}{6}) = T(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{2}{3}, \\ &T(\tfrac{1}{12}) = \tfrac{1}{6},\ T^2(\tfrac{1}{12}) = \tfrac{1}{3},\ T^3(\tfrac{1}{12}) = \tfrac{2}{3}, \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

$$T\left(\frac{1}{3\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}},\ T^2\left(\frac{1}{3\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{3\cdot 2^{n-2}},\ \dots,\ T^n\left(\frac{1}{3\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{3},\ T^{n+1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{2}{3}.$$

To znamená, že rovnovážný bod $\frac{2}{3}$ je dosažitelný z každého bodu tvaru $\dfrac{1}{3\cdot 2^n}$. ∎

Definice 28. Nechť x^* je rovnovážný bod rovnice (5.6) a posloupnost x je řešením úlohy (5.6), (5.7). Řekneme, že rovnovážný bod x^* je

stabilní, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že z nerovnosti $|\xi_0 - x^*| < \delta$ plyne nerovnost $|x(t) - x^*| < \varepsilon$ pro všechna $t > 0$;

atrahující (přitažlivý), pokud existuje $\eta > 0$ takové, že z nerovnosti $|\xi_0 - x^*| < \eta$ plyne rovnost $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x^*$; je-li navíc $\eta = \infty$, řekneme, že x^* je *globálně atrahující;*

asymptoticky stabilní, pokud je stabilní a atrahující; je-li x^* navíc globálně atrahující, řekneme, že rovnovážný bod x^* je globálně asymptoticky stabilní;

nestabilní, pokud není stabilní;

repelentní (odpuzující), pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že z nerovnosti $\xi_0 \neq x^*$ plyne, že existuje index posloupnosti t_0 takový, že $|x(t) - x^*| \geq \varepsilon$ pro všechny indexy $t \geq t_0$.

Poznamenejme, že je-li rovnovážný bod x^* rovnice (5.6) repelentní, pak je nestabilní. Obrácené tvrzení neplatí. Od nestabilního rovnovážného bodu x^* se řešení x rovnice (5.6) v jistém čase (indexu) t_1 vzdálí, ale v nějakém dalším čase $t_2 > t_1$ se k němu může opět přiblížit.

Příklad: Lineární rovnice

$$x(t+1) = \alpha x(t) + \beta$$

s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$ má podle výsledků uvedených v 3.1.2 řešení

$$x(t) = \left(\xi_0 + \frac{\beta}{\alpha - 1}\right)\alpha^t + \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Pro jediný rovnovážný bod $x^* = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$ uvažované rovnice platí:

- je-li $|\alpha| > 1$, pak x^* je repelentní;
- je-li $|\alpha| = 1$, pak x^* je stabilní ale nikoliv atrahující;
- je-li $|\alpha| < 1$, pak x^* je globálně asymptoticky stabilní; je-li přitom navíc $\alpha = 0$, pak x^* je dosažitelný z jakéhokoliv bodu $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq x^*$. ■

Budeme vyšetřovat chování řešení rovnice (5.6) v okolí rovnovážného bodu x^*. Odchylku řešení x od rovnovážného stavu x^* definujeme jako posloupnost y danou vztahem

$$y(t) = x(t) - x^*.$$

Z Taylorovy věty plyne, že ke každému indexu t existuje číslo $\vartheta(t)$ z intervalu $[0,1]$ takové, že

$$\begin{aligned} y(t+1) &= x(t+1) - x^* = f\big(x(t)\big) - f(x^*) = \\ &= f'(x^*)\big(x(t) - x^*\big) + \frac{1}{2}f''\Big(x^* + \vartheta(t)\big(x(t) - x^*\big)\Big)\big(x(t) - x^*\big)^2 = \\ &= f'(x^*)y(t) + \frac{1}{2}f''\big(x^* + \vartheta(t)y(t)\big)y(t)^2. \end{aligned}$$

Pokud je odchylka $y(t)$ „malá“, „výrazně menší než 1“, pak je její druhá mocnina $y(t)^2$ „ještě menší“, „skoro nulová“. Na základě této úvahy zanedbáme v poslední rovnost poslední sčítanec a dostaneme, že odchylka $y(t)$ od rovnovážného stavu přibližně splňuje lineární homogenní diferenční rovnici

$$y(t+1) = f'(x^*)y(t).$$

Pokud tedy $|f'(x^*)| < 1$, pak malá odchylka se bude s rostoucím indexem t zmenšovat, až vymizí. Lze tedy očekávat, že v případě $|f'(x^*)| < 1$ bude rovnovážný bod x^* asymptoticky stabilní. Pokud naopak $|f'(x^*)| > 1$, malá odchylka se bude s rostoucím t zvětšovat, až přestane být malou. V tomto případě lze očekávat, že rovnovážný bod x^* je nestabilní. Z této úvahy ovšem neplyne, že by v případě $|f'(x^*)| > 1$ byl rovnovážný bod x^* repelentní. Odchylka se může zvětšit a poté znovu zmenšit na hodnotu menší, než předem daná hranice ε.

Provedená úvaha ukazuje, že lze snadno rozhodnout o asymptotické stabilitě nebo nestabilitě rovnovážného bodu x^* rovnice (5.6), pro který je $|f'(x^*)| \neq 1$. Takový rovnovážný bod si zaslouží vlastní název.

Definice 29. Řekneme, že rovnovážný bod x^* rovnice (5.6) je *hyperbolický,* pokud

$$\left|f'(x^*)\right| \neq 1.$$

Při vyšetřování stability se však nemusíme omezit jen na hyperbolické rovnovážné body. Téměř úplnou odpověď na otázku stability rovnovážných bodů autonomních diferenčních rovnic s hladkou pravou stranou dá Věta 26.

Věta 26. *Nechť x^* je rovnovážný bod rovnice* (5.6) *a funkce f je spojitě diferencovatelná v bodě x^*. Pak platí:*

(i) Je-li $|f'(x^*)| > 1$, pak x^* je nestabilní.

(ii) Je-li $|f'(x^*)| < 1$, pak x^* je asymptoticky stabilní.

(iii) Je-li $f'(x^*) = 1$ a funkce f je v bodě x^* dvakrát spojitě diferencovatelná, pak:

- *(a) je-li $f''(x^*) \neq 0$, pak x^* je nestabilní;*
- *(b) je-li $f''(x^*) = 0$ a funkce f je v bodě x^* třikrát spojitě diferencovatelná, pak*
  - *(α) je-li $f'''(x^*) > 0$, pak x^* je nestabilní,*
  - *(β) je-li $f'''(x^*) < 0$, pak x^* je asymptoticky stabilní.*

(iv) Je-li $f'(x^*) = -1$ a funkce f je v bodě x^* třikrát spojitě diferencovatelná, pak:

- *(a) je-li $f'''(x^*) < \frac{3}{2}\left[f''(x^*)\right]^2$, pak x^* je nestabilní,*
- *(b) je-li $f'''(x^*) > \frac{3}{2}\left[f''(x^*)\right]^2$, pak x^* je asymptoticky stabilní.*

Důkaz: **(i)** Nechť $|f'(x^*)| > 1$. Položme $\gamma = \frac{1}{2}\left(|f'(x^*)| - 1\right) > 0$. Poněvadž funkce f' je spojitá v bodě x^*, je v tomto bodě spojitá i její absolutní hodnota a tedy existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\xi \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ je

$$\left|f'(\xi)\right| > \left|f'(x^*)\right| - \gamma.$$

Položme $q = \inf\{|f'(\xi)| : -\varepsilon < \xi - x^* < \varepsilon\}$. Pak

$$q \geq \big|f'(x^*)\big| - \gamma = \tfrac{1}{2}\left(\big|f'(x^*)\big| + 1\right) > 1.$$

Nechť nyní $0 < |\xi_0 - x^*| < \varepsilon$ a x je řešením úlohy (5.6), (5.7). Označme $y(t) = |x(t) - x^*|$ a připusťme, že $y(t) < \varepsilon$ pro všechna $t \in \mathbb{N}$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje $\vartheta = \vartheta(t) \in (0,1)$ takové, že

$$\begin{aligned} y(t+1) = |x(t+1) - x^*| = \big|f\big(x(t)\big) - f(x^*)\big| = \big|f'\big(x^* + \vartheta(x(t) - x^*)\big)\big(x(t) - x^*\big)\big| = \\ = \big|f'\big(x^* + \vartheta(x(t) - x^*)\big)\big|\,|x(t) - x^*| \geq q\,|x(t) - x^*| = qy(t). \end{aligned}$$

Podle Tvrzení 18 je $y(t) \geq q^t y(0) = q^t\,|\xi_0 - x^*|$, přičemž $q > 1$, což znamená, že $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \infty$. Proto nemůže být $y(t) < \varepsilon$ pro všechny indexy $t \in \mathbb{N}$. Existuje tedy index t, že $|x(t) - x^*| \geq \varepsilon$, tj. rovnovážný bod x^* je nestabilní. Tvrzení (i) je dokázáno.

(ii) Nechť $|f'(x^*)| < 1$. Položme $\gamma = \frac{1}{2}(1 - |f'(x^*)|)$. Pak je $\gamma \in (0,1)$. Ze spojitosti funkce $|f'|$ plyne, že ke γ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\big||f'(\xi)| - |f'(x^*)|\big| < \gamma$ pro všechna $\xi \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$. Tedy pro všechna ξ z ε-okolí bodu x^* platí

$$|f'(\xi)| < |f'(x^*)| + \gamma = 1 - \gamma < 1.$$

Položme opět $y(t) = |x(t) - x^*|$. Nechť $x_0 = x(0) \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, tedy $y(0) = |x(0) - x^*| < \varepsilon$. Pokud pro nějaké $t \geq 0$ je $y(t) < \varepsilon$, pak podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje $\vartheta \in (0,1)$ takové, že

$$\begin{aligned} y(t+1) = |x(t+1) - x^*| = |f\big(x(t)\big) - f(x^*)| = \big|f'\big(x^* + \vartheta(x(t) - x^*)\big)\big(x(t) - x^*\big)\big| = \\ = \big|f'\big(x^* + \vartheta(x(t) - x^*)\big)\big|\,|x(t) - x^*| \leq (1 - \gamma)y(t) < y(t) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy z nerovnosti $y(t) < \varepsilon$ plyne nerovnost $y(t+1) < \varepsilon$. Úplnou indukcí tedy dostaneme, že $|x(t) - x^*| = y(t) < \varepsilon$ pro všechna $t \geq 0$. To znamená, že rovnovážný bod x^* je stabilní. Současně platí $y(t+1) \leq (1 - \gamma)y(t)$ pro všechna $t \geq 0$. Z Tvrzení 18 nyní plyne

$$0 \leq y(t) \leq y(0)(1 - \gamma)^t$$

a poněvadž $\lim\limits_{t\to\infty}(1 - \gamma)^t = 0$, platí podle věty o třech posloupnostech

$$0 = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} |x(t) - x^*|,$$

takže $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x^*$. To znamená, že rovnovážný bod x^* je atrahující. Celkem tedy x^* je asymptoticky stabilní a tvrzení (ii) je dokázáno.

(iii) Nechť $f'(x^*) = 1$. Pak osa prvního kvadrantu je tečnou ke grafu funkce f a existuje okolí bodu x^*, na kterém je funkce f ryze rostoucí. Nechť nejprve je funkce f na levém ryzím okolí bodu x^* ryze konkávní, tj. její graf leží pod tečnou v bodě x^*. Označme ε takové kladné číslo, že funkce f je na intervalu $[x^* - \varepsilon, x^*)$ rostoucí a ryze konkávní. Pak pro každé $\xi \in [x^* - \varepsilon, x^*)$ platí

$$\xi > f(\xi). \tag{5.8}$$

Je-li x řešení rovnice (5.6) a pro nějaký index t platí $x(t) \in [x^* - \varepsilon, x^*)$, pak podle předchozí nerovnosti platí

$$x(t+1) = f\big(x(t)\big) < x(t).$$

Připusťme, že existuje řešení rovnice (5.6) takové, že $x(t) \in (x^* - \varepsilon, x^*)$ pro všechny indexy $t \in \mathbb{N}$. Pak x je ryze klesající zdola ohraničená posloupnost, tedy podle Věty 2 konvergentní. Označme

$$\hat{x} = \lim_{t\to\infty} x(t).$$

Pak je $\hat{x} \in [x^* - \varepsilon, x^*)$. Z nerovnosti (5.8) a ze spojitosti funkce f nyní plyne

$$\hat{x} < f(\hat{x}) = f\Bigl(\lim_{t\to\infty} x(t)\Bigr) = \lim_{t\to\infty} f\bigl(x(t)\bigr) = \lim_{t\to\infty} x(t+1) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \hat{x},$$

což je spor. Dostáváme tak:

- Je-li funkce f rostoucí a ryze konkávní na intervalu $[x^* - \varepsilon, x^*)$, pak pro každé řešení x rovnice (5.6) s počáteční podmínkou $x(0) \in (x^* - \varepsilon, x^*)$ existuje index $t \in \mathbb{N}$ takový, že $x(t) < x^* - \varepsilon$.

Nechť nyní je funkce f na levém ryzím okolí bodu x^* ryze konvexní, tj. její graf leží nad tečnou v bodě x^*. Označme δ takové kladné číslo, že funkce f je na intervalu $(x^* - \delta, x^*)$ ryze konvexní a rostoucí. Pak pro každé $\xi \in (x^* - \delta, x^*)$ je

$$\xi < f(\xi) < x^* = f(x^*). \tag{5.9}$$

Je-li $x(t) \in (x^* - \delta, x^*)$, pak podle těchto nerovností platí

$$x(t) < f\bigl(x(t)\bigr) = x(t+1) < x^*.$$

To znamená, že řešení x rovnice (5.6) s počáteční podmínkou $x(0) \in (x^* - \delta, x^*)$ je ryze rostoucí posloupnost shora ohraničená hodnotou x^*. Podle Věty 2 je tato posloupnost konvergentní. Existuje tedy $\hat{x} \le x^*$ takové číslo, že

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \hat{x}.$$

Ze spojitosti funkce f nyní plyne

$$f(\hat{x}) = f\Bigl(\lim_{t\to\infty} x(t)\Bigr) = \lim_{t\to\infty} f\bigl(x(t)\bigr) = \lim_{t\to\infty} x(t+1) = \hat{x}.$$

Kdyby $\hat{x} < x^*$, pak by podle (5.9) platilo $\hat{x} < f(\hat{x}) = \hat{x}$ a to by byl spor; je tedy $\hat{x} = x^*$. Dostáváme tak

- Je-li funkce f rostoucí a ryze konvexní na intervalu $(x^* - \delta, x^*)$, pak pro každé řešení x rovnice (5.6) s počáteční podmínkou $x(0) \in (x^* - \delta, x^*)$ platí $x(t) \in (x^* - \delta, x^*)$ pro všechny indexy $t \in \mathbb{N}$ a $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x^*$.

Analogicky můžeme ukázat, že platí tvrzení

- Je-li funkce f rostoucí a ryze konkávní na intervalu $(x^*, x^* + \delta)$, pak pro každé řešení x rovnice (5.6) s počáteční podmínkou $x(0) \in (x^*, x^* + \delta)$ platí $x(t) \in (x^*, x^* + \delta)$ pro všechny indexy $t \in \mathbb{N}$ a $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x^*$.

- Je-li funkce f rostoucí a ryze konvexní na intervalu $(x^*, x^* + \varepsilon]$, pak pro každé řešení x rovnice (5.6) s počáteční podmínkou $x(0) \in (x^*, x^* + \varepsilon)$ existuje index $t \in \mathbb{N}$ takový, že $x(t) > x^* + \varepsilon$.

Z dokázaných pomocných tvrzení již plyne tvrzení (iii). V případě (a) je totiž funkce f na okolí rovnovážného bodu x^* buď ryze konvexní nebo ryze konkávní. V případě (b) má funkce f v bodě x^* inflexi; pokud nastane možnost (α), pak je funkce f na pravém okolí bodu x^* konvexní; pokud nastane možnost (β), pak je funkce f na levém okolí bodu x^* konvexní a na pravém konkávní.

(iv) Spolu s rovnicí (5.6) uvažujme rovnici

$$y(t+1) = g\big(y(t)\big), \tag{5.10}$$

kde $g = f^2$. Je-li x^* rovnovážný bod rovnice (5.6), pak

$$g(x^*) = f\big(f(x^*)\big) = f(x^*) = x^*$$

a x^* je také rovnovážným bodem rovnice (5.10). Je-li posloupnost x řešením rovnice (5.6), pak posloupnost y definovaná vztahem $y(t) = x(2t)$ splňuje rovnost

$$g\big(x(2t)\big) = f\Big(f\big(x(2t)\big)\Big) = f\big(x(2t+1)\big) = x(2t+2) = x\big(2(t+1)\big) = y(t+1)$$

a tedy je řešením rovnice (5.10). Tato skutečnost ukazuje, že z asymptotické stability (resp. nestability) rovnovážného bodu rovnice (5.10) plyne asymptotická stabilita (resp. nestabilita) rovnovážného bodu x^* rovnice (5.6).

Dále platí

$$\begin{aligned}
g'(y) &= f'\big(f(y)\big)f'(y),\\
g''(y) &= f''\big(f(y)\big)\left[f'(y)\right]^2 + f'\big(f(y)\big)f''(y),\\
g'''(y) &= f'''\big(f(y)\big)\left[f'(y)\right]^3 + 3f''\big(f(y)\big)f''(y)f'(y) + f'\big(f(y)\big)f'''(y).
\end{aligned}$$

Je-li tedy $f'(x^*) = -1$, pak podle předchozích rovností platí

$$\begin{aligned}
g'(x^*) &= 1,\\
g''(x^*) &= f''(x^*) - f''(x^*) = 0,\\
g'''(x^*) &= -2f'''(x^*) - 3\left[f''(x^*)\right]^2.
\end{aligned}$$

Tvrzení (iv) je tedy důsledkem tvrzení (iii). □

Příklad. Stabilita rovnovážného řešení Bevertonovy-Holtovy rovnice.

Rovnice (1.16) je autonomní, funkce na její pravé straně je dána výrazem

$$f(x) = x\frac{rK}{K+(r-1)x}.$$

Oba parametry r a K jsou kladné. Uvažujme tuto rovnici na stavovém prostoru $\Omega = [0,\infty)$. Rovnovážné body jsou řešením (algebraické) rovnice

$$x\frac{rK}{K+(r-1)x} = x,$$

po snadné úpravě

$$x(K-x)(r-1) = 0.$$

Předpokládejme nejprve, že $r \neq 1$. Pak jsou rovnovážné body dva, 0 a K. Platí

$$f'(x) = \frac{rK^2}{\big(K + (r-1)x\big)^2}, \qquad f'(0) = r, \quad f'(K) = \frac{1}{r}.$$

Z Věty 26 nyní plyne: Je-li $r < 1$, pak je rovnovážný bod 0 asymptoticky stabilní a rovnovážný bod K je nestabilní. Naopak, pokud $r > 1$, pak je rovnovážný bod 0 nestabilní a rovnovážný bod K je asymptoticky stabilní. Připomeňme, že stejné závěry plynuly z explicitního řešení (4.1) rovnice (1.16).

Poněvadž Bevertonova-Holtova rovnice modeluje vývoj populace v prostředí s úživností K, můžeme tento výsledek interpretovat: Je-li vnitřní koeficient růstu r menší než 1, pak populace vymře; v takovém případě by totiž populace nemohla růst ani v prostředí s neomezenými zdroji. Pokud je vnitřní koeficient růstu větší než jedna, populace v prostředí dlouhodobě přežívá a její velikost se ustálí na hodnotě kapacity prostředí.

Povšimněme si, že o přežití populace vyvíjející se podle rovnice (1.16), tedy populace K-stratégů, nerozhoduje prostředí ale jen její vlastní biotický potenciál. Tento závěr asi není obecně úplně realistický – v případě malé kapacity prostředí může i populace K-stratégů vyhynout v důsledku nějaké náhodné fluktuace.

Pokud $r = 1$, pak je každý bod ze stavového prostoru rovnovážný. Rovnice (1.16) nabude tvar

$$x(t+1) = x(t)$$

a její řešení je konstantní, $x \equiv x(0)$. Každý bod je tedy navíc stabilní. Tato situace asi nemá rozumnou ekologickou interpretaci. ■

5.1.3 Cykly

Definice 30. Nechť $b \in \operatorname{Dom} f$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

Řekneme, že b je *p-periodický bod* rovnice (5.6), pokud $f^p(b) = b$. V takovém případě se trajektorie $\mathcal{T}(b) = \big\{b, f(b), f^2(b), \dots, f^{p-1}(b)\big\}$ nazývá *cyklus délky p* (*p-cyklus*).

Řekneme, že p-periodický bod je *dosažitelný z bodu b*, pokud existuje $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ takové, že $f^m(b)$ je p-periodický bod.

Bod $b \in \operatorname{Dom} f$ je p-periodickým bodem rovnice (5.6) právě tehdy, když je rovnovážným bodem rovnice

$$x(t+1) = f^p\big(x(t)\big). \tag{5.11}$$

Definice 31. Řekneme, že p-cyklus $\mathcal{T}(b)$ rovnice (5.6) je

stabilní, pokud b je stabilní rovnovážný bod rovnice (5.11);

asymptoticky stabilní, pokud b je asymptoticky stabilní rovnovážný bod rovnice (5.11);

nestabilní, pokud b je nestabilní rovnovážný bod rovnice (5.11).

Věta 27. *Nechť* $\mathcal{T}(b) = \big\{b, f(b), f\big(f(b)\big), \dots, f^{k-1}(b)\big\} = \{x(0), x(1), x(2), \dots, x(k-1)\}$ *je p-cyklus rovnice* (5.6).

Je-li $\Big|f'\big(x(0)\big)f'\big(x(1)\big)f'\big(x(2)\big)\cdots f'\big(x(p-1)\big)\Big| < 1$, *pak je* $\mathcal{T}(b)$ *asymptoticky stabilní.*

Je-li $\Big|f'\big(x(0)\big)f'\big(x(1)\big)f'\big(x(2)\big)\cdots f'\big(x(p-1)\big)\Big| > 1$, *pak je* $\mathcal{T}(b)$ *nestabilní.*

Důkaz: Podle věty o derivaci složené funkce platí

$$\begin{aligned}(f^p)'(b) &= f'\big(f^{p-1}(b)\big)\left(f^{p-1}\right)'(b) = f'\big(x(p-1)\big)f'\big(f^{p-2}(b)\big)\left(f^{p-2}\right)'(b) = \\ &= f'\big(x(p-1)\big)f'\big(x(p-2)\big)f'\big(f^{p-3}(b)\big)\left(f^{p-3}\right)'(b) = \cdots \\ &\cdots = f'\big(x(p-1)\big)f'\big(x(p-2)\big)f'\big(x(p-3)\big)\cdots f'\big(x(1)\big)f'\big(x(0)\big).\end{aligned}$$

Tvrzení jsou nyní důsledkem Věty 26. □

5.1.4 Autonomní rovnice závislé na parametru

Nechť nyní $f : \Omega \times A \to \mathbb{R}$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, je funkce dvou proměnných taková, že pro každé $\mu \in A$ a každé $x \in \Omega$ platí $f(x,\mu) \in \Omega$. Pro pevně zvolené $\mu \in A$ můžeme funkci f chápat jako funkci jedné proměnné x a μ považovat za parametr. Tuto funkci jedné proměnné budeme značit $f(\,\cdot\,,\mu)$.

Uvažujme rekurentní formuli

$$x(t+1) = f\big(x(t),\mu\big). \tag{5.12}$$

Řekneme, že při hodnotě parametru $\mu = \mu_0$ dochází k *bifurkaci,* pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro $\mu \in (\mu_0 - \varepsilon)$ je řešení rovnice (5.12) „kvalitativně odlišné“ od řešení této rovnice pro $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \varepsilon)$.

Příklad: Rovnice

$$x(t+1) = \mu x(t)\big(1 - x(t)\big)$$

má rovnovážný bod $x_1^* = 0$. Vyšetříme jeho stabilitu:

$$f(x) = \mu x(1-x), \quad f'(x) = \mu(1-2x), \quad f'(0) = \mu,$$

tedy $|f'(0)| < 1$ pro $\mu \in (-1,1)$ a $|f'(0)| > 1$ pro $\mu \in (1,3)$. Při hodnotě $\mu = \mu_0 = 0$ tedy dochází k bifurkaci: rovnice má stabilní rovnovážný bod 0 pro hodnoty parametru μ v levém okolí μ_0 a má nestabilní rovnovážný bod 0 pro hodnoty parametru μ v pravém okolí μ_0. ■

Konstrukce *bifurkačního diagramu:*

1. Specifikujeme hodnoty $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_M$ parametru μ. Zvolíme čas τ, který budeme považovat za dobu, během níž se „chování řešení ustálí“, a maximální čas T.

2. Položíme $i = 1$.

3. Položíme $\mu = \mu_i$ a zvolíme $\xi_0 \in \operatorname{Dom} f(\,\cdot\,,\mu)$.

4. Najdeme řešení rovnice (5.12) s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$ pro indexy $t \leq T$, tj. najdeme množinu $\{\xi_0 = x(0), x(1), x(2), \ldots, x(T)\}$.

5. Zakreslíme množinu bodů $\big\{\big(\mu_i, x(\tau+1)\big), \big(\mu_i, x(\tau+2)\big), \ldots, \big(\mu_i, x(T)\big)\big\}$.

6. Pokud $i < M$, zvětšíme i o jedna a vrátíme se k bodu 3.

5.2 Autonomní systémy

Autonomní systém k diferenčních rovnic (rekurentních formulí) prvního řádu je systém, ve kterém se index posloupnosti t nevyskytuje explicitně. Jako systém rekurentních formulí ho můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f_1\big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big), \\ x_2(t+1) &= f_2\big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big), \\ &\vdots \\ x_k(t+1) &= f_k\big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big). \end{aligned} \tag{5.13}$$

O funkcích $f_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, předpokládáme, že všechny mají stejný definiční obor Ω, který zobrazují do sebe, tj. $\operatorname{Im} f_i \subseteq \operatorname{Dom} f_i = \Omega$. Společný definiční obor Ω funkcí f_i se nazývá *stavový* nebo *fázový prostor.* Při označení

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix},$$

můžeme systém (5.13) zapsat ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t)\big), \tag{5.14}$$

nebo stručněji

$$\boldsymbol{x}^\sigma = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Z tohoto vyjádření vidíme, že autonomní systém je bezprostředním zobecněním autonomní rovnice (5.6). Formálně stejně jako Tvrzení 16 můžeme ukázat, že nezáleží na volbě počátečního času t_0. Počáteční podmínku pro systém (5.13), resp. (5.14), budeme uvažovat ve tvaru

$$x_1(0) = \xi_{01},\ x_2(0) = \xi_{02},\ \ldots,\ x_k(0) = \xi_{0k}, \tag{5.15}$$

resp.

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\xi_0}. \tag{5.16}$$

Řešení úlohy (5.14), (5.16) je podobně jako v oddílu 5.1 dáno výrazy

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}^t\big(\boldsymbol{\xi}_0\big).$$

Pro autonomní systémy zavádíme pojmy analogické, jako pro autonomní rovnice:

Definice 32. Množina bodů $\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi_0}) = \{\boldsymbol{f}^n(\xi_0) : n \in \mathbb{N}\}$ se nazývá *(pozitivní) trajektorie bodu* $\boldsymbol{\xi_0}$ nebo *orbita bodu* $\boldsymbol{\xi_0}$ (vzhledem k rovnici (5.14)).

Nechť $S \subseteq \Omega$. Množina $\mathcal{T}(S) = \bigcup\limits_{\boldsymbol{x} \in S} \mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ se nazývá *trajektorie (orbita) množiny S.*

Definice 33. Řekneme, že bod $\boldsymbol{x}^* \in \operatorname{Dom} \boldsymbol{f}$ je *rovnovážný (stacionární) bod rovnice* (5.14), pokud je pevným bodem zobrazení $\boldsymbol{f}$, tj. pokud platí $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*$.

Trajektorie rovnovážného bodu $\boldsymbol{x}^*$ je jednoprvková, $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{x}^*\}$.

Definice 34. Řekneme, že rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ rovnice (5.6) je *dosažitelný z bodu* $\boldsymbol{\xi} \in \operatorname{Dom} \boldsymbol{f}$, pokud existuje kladné číslo $r \in \mathbb{N}$ takové, že $\boldsymbol{f}^r(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x}^*$ a $\boldsymbol{f}^{r-1}(\boldsymbol{\xi}) \neq \boldsymbol{x}^*$.

Definice 35. Nechť $\boldsymbol{x}^*$ je rovnovážný bod rovnice (5.14) a vektorová posloupnost $\boldsymbol{x}$ je řešením úlohy (5.14), (5.16). Řekneme, že rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ je

stabilní, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že z nerovnosti $\|\boldsymbol{\xi}_0 - \boldsymbol{x}^*\| < \delta$ plyne nerovnost $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*\| < \varepsilon$ pro všechna $t > 0$;

atrahující (přitažlivý), pokud existuje $\eta > 0$ takové, že z nerovnosti $\|\boldsymbol{\xi}_0 - \boldsymbol{x}^*\| < \eta$ plyne rovnost $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*$; je-li navíc $\eta = \infty$, řekneme, že $\boldsymbol{x}^*$ je *globálně atrahující;*

asymptoticky stabilní, pokud je stabilní a atrahující; je-li $\boldsymbol{x}^*$ navíc globálně atrahující, řekneme, že rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ je *globálně asymptoticky stabilní;*

nestabilní, pokud není stabilní;

repelentní (odpuzující), pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že z nerovnosti $\boldsymbol{\xi}_0 \neq \boldsymbol{x}^*$ plyne existence indexu t_0 posloupnosti $\boldsymbol{x}$ takového, že $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*\| \geq \varepsilon$ pro všechny indexy $t \geq t_0$.

5.2.1 Stabilita lineárních systémů

Uvažujme lineární homogenní systém s konstantní maticí (3.58). Tento systém je autonomní. Jeho rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ je řešením homogenní soustavy lineárních (algebraických) rovnic

$$\mathsf{Q}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^*. \tag{5.17}$$

Odtud plyne, že $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{o}$ je rovnovážným bodem lineárního homogenního systému.

Je-li matice Q regulární, pak má systém (3.58) s počáteční podmínkou (5.16) podle (3.60) řešení

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{P}\mathsf{J}^t\mathsf{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_0,$$

kde J je Jordanův kanonický tvar matice Q. Z tvaru řešení vidíme, že

(i) Mají-li všechny vlastní hodnoty matice Q modul (absolutní hodnotu) menší než 1, pak je rovnovážný bod $\boldsymbol{o}$ globálně asymptoticky stabilní.

(ii) Pokud modul žádné vlastní hodnoty matice Q nepřevýší 1 a ty vlastní hodnoty, které mají modul roven 1, jsou jednoduchého typu, pak je rovnovážný bod $\boldsymbol{o}$ stabilní.

(iii) Existuje-li vlastní hodnota matice Q taková, že její modul je větší než 1, pak je rovnovážný bod $\boldsymbol{o}$ nestabilní.

(iv) Mají-li všechny vlastní hodnoty matice Q modul větší než 1, pak je rovnovážný bod $\boldsymbol{o}$ repelentní.

Pokud 1 není vlastní hodnotou regulární matice Q, pak má rovnice (5.17) jediné řešení $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{o}$ a tedy lineární homogenní systém má jediný rovnovážný bod. Proto můžeme mluvit nikoliv o stabilitě nějakého rovnovážného bodu systému, ale o stabilitě právě toho jediného rovnovážného bodu. To nás opravňuje mluvit o stabilitě lineárního systému.

Uvažujme nyní nehomogenní lineární autonomní systém (lineární systém s konstantními koeficienty)

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}. \tag{5.18}$$

Je-li matice Q regulární a nemá vlastní číslo 1, pak má tento systém jediný stacionární bod $\boldsymbol{x}^* = (\mathsf{I} - \mathsf{Q})^{-1}\boldsymbol{b}$. V takovém případě řekneme, že systém (5.18) je stabilní, pokud přidružený homogenní systém je stabilní.

5.2.2 Linearizace nelineárních systémů v okolí rovnovážného bodu

Nechť $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ je rovnovážný bod rovnice (5.14). Jeho stabilitu budeme vyšetřovat pomocí vývoje odchylky $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*$ nějakého řešení od řešení rovnovážného. Podle Taylorovy věty pro libovolné $i \in \{1, 2, \dots k\}$ platí

$$
\begin{aligned}
y_i(t+1) &= x_i(t+1) - x_i^* = f_i\big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big) - f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = \\
&= f_i\big(\boldsymbol{x}(t)\big) - f_i(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_j}\big(x_j(t) - x_j^*\big) + O\left(\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*\|^2\right) = \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_j} y_j(t) + O\left(\|\boldsymbol{y}(t)\|^2\right).
\end{aligned}
$$

Při označení

$$
\mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})
\end{pmatrix}
$$

přepíšeme předchozí rovnosti ve tvaru

$$
\boldsymbol{y}(t+1) = \mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)\boldsymbol{y}(t) + O\left(\|\boldsymbol{y}(t)\|^2\right).
$$

Z tohoto vyjádření usuzujeme podobně jako na str. 117, že odchylka od rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}^*$ se „přibližně vyvíjí“ jako řešení lineárního homogenního systému

$$
\boldsymbol{y}(t+1) = \mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)\boldsymbol{y}(t). \tag{5.19}
$$

Tento systém nazveme *linearizace nelineárního systému* (5.14) *v okolí jeho rovnovážného bodu* $\boldsymbol{x}^*$. Matici $\mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)$, což je Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{f}$ vypočítaná v rovnovážném bodě, nazýváme *variační matice* systému (5.14) v jeho rovnovážném bodu $\boldsymbol{x}^*$.

Definice 36. Řekneme, že rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ systému (5.14) je *hyperbolický*, pokud žádná vlastní hodnota matice $\mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)$ nemá modul rovný 1.

Z 5.2.1 plyne

Tvrzení 19. Nechť $\boldsymbol{x}^*$ je hyprbolický rovnovážný bod autonomního systému (5.14). Mají-li všechny vlastní hodnoty jeho variační matice $\mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)$ modul menší než 1, pak je rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ asymptoticky stabilní. Existuje-li vlastní číslo variační matice $\mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)$, které má modul větší než 1, pak je rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ nestabilní.

Příklad: Dvojrozměrný autonomní systém Uvažujme systém

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f\big(x(t), y(t)\big), \\ y(t+1) &= g\big(x(t), y(t)\big). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Souřadnice rovnovážného bodu (x^*, y^*) jsou řešením soustavy dvou rovnic

$$x = f(x, y), \quad y = g(x, y).$$

Nechť (x^*, y^*) je rovnovážným bodem rovnice (5.20) a

$$\mathsf{J}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}.$$

Ze závěru příkladu na str. 82–83 můžeme nyní usoudit, že platí tvrzení:

(i) Je-li $|\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*)| - 1 < \det \mathsf{J}(x^*, y^*) < 1$, pak rovnovážný bod (x^*, y^*) rovnice (5.20) je asymptoticky stabilní.

(ii) Je-li $|\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*)| - 1 > \det \mathsf{J}(x^*, y^*)$ nebo $\det \mathsf{J}(x^*, y^*) > 1$, pak rovnovážný bod (x^*, y^*) rovnice (5.20) je nestabilní.

(iii) Je-li (x^*, y^*) asymptoticky stabilní, $\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*) > 0$ a $\det \mathsf{J}(x^*, y^*) \leq \frac{1}{4}\left(\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*)\right)^2$, pak obě složky řešení systému (5.20) konvergujícího k rovnovážnému bodu (x^*, y^*) jsou od jistého indexu počínaje ryze monotonní.

■

5.2.3 Invariantní množiny autonomních systémů

Rovnovážný bod $\boldsymbol{x^*}$ systému (5.14) je charakteristický tím, že jeho trajektorie je jednoprvková a obsahuje právě tento bod, $\mathcal{T}(\boldsymbol{x^*}) = \{\boldsymbol{x^*}\}$. Této vlastnosti využijeme k zavedení obecnějších pojmů.

Definice 37. Množina $S \subseteq \Omega$ se nazývá *invariantní množina rovnice* (5.14), pokud $\mathcal{T}(S) \subseteq S$.
Množina $S \subseteq \Omega$ se nazývá *minimální invariantní množina rovnice* (5.14), pokud pro každou vlastní podmnožinu Q invariantní množiny S platí, že Q není invariantní.

Množina $S \subseteq \Omega$ je maximální invariantní množinou rovnice (5.14) právě tehdy, když ke každé množině $Q \subseteq S$ takové, že $Q \subseteq S$ a $S \setminus Q \neq \emptyset$, a ke každému bodu $\boldsymbol{x} \in S$ existuje přirozené číslo n, že $\boldsymbol{f}^n(\boldsymbol{x}) \in S \setminus Q$. To je dále ekvivalentní s tím, že $S = \mathcal{T}(S)$.

Definice 38 (Typy invariantních množin)**.** Minimální invariantní množina $S \subseteq \Omega$ rovnice (5.14) se nazývá:

rovnovážný (stacionární) bod, pokud množina S je jednoprvková;

cyklus délky p (p-cyklus), pokud množina S je p-prvková (přitom p je kladné celé číslo);

invariantní smyčka, pokud množina S je uzavřená spojitá křivka v $\mathbb{R}^k$;

podivná, pokud není žádného z předchozích typů.

Poznamenejme, že *okolím množiny* A ve stavovém prostoru Ω rozumíme množinu V, která je otevřená v relativní topologii prostoru Ω a pro kterou platí $S \subseteq V$.

Definice 39. Minimální invariantní množina $S \subseteq \Omega$ rovnice (5.14) se nazývá:

stabilní, pokud ke každému okolí V množiny S existuje okolí U množiny S tak, že $\mathcal{T}(U) \subseteq V$;

atraktor, pokud existuje množina $U \subseteq \Omega$ taková, že

$$\lim_{t\to\infty} \left(\inf\left\{\left\|\boldsymbol{f}^t(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{x}\right\| : \boldsymbol{x} \in S, \boldsymbol{\xi} \in U\right\}\right) = 0,$$

množina U se v takovém případě nazývá *obor atraktoru* S; pokud vlastnost množiny U má celý stavový prostor Ω, atraktor S se nazývá *globální;*

repelor, pokud existuje $\varepsilon > 0$ a okolí U množiny S takové, že

$$\lim_{t\to\infty} \left(\inf\left\{\left\|\boldsymbol{f}^t(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{x}\right\| : \boldsymbol{x} \in S, \boldsymbol{\xi} \in U\right\}\right) > \varepsilon.$$

5.3 Autonomní rovnice vyšších řádů

Autonomní diferenční rovnice k-tého řádu ve tvaru rekurentní formule je

$$x(t+k) = f\big(x(t), x(t+1), \dots, x(t+k-1)\big), \tag{5.21}$$

kde funkce $f : \Omega^k \to \Omega$ není konstantní v první proměnné. Množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ se opět nazývá stavový prostor. Rovnice (5.21) můžeme přepsat ve tvaru systému rekurentních formulí prvního řádu

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \quad x_2(t) \\ x_2(t+1) &= \quad x_3(t) \\ &\ \ \vdots \\ x_{k-1}(t+1) &= \quad x_k(t) \\ x_k(t+1) &= f\big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big) \end{aligned} \tag{5.22}$$

tedy ve tvaru autonomního systému. První složka řešení tohoto systému je řešením rovnice (5.21). Na autonomní rovnici k-tého řádu tedy můžeme přenést všechny pojmy a výsledky z teorie autonomních systémů.

Počáteční podmínku pro rovnici (5.21) můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat ve tvaru

$$x(0) = \xi_0,\ x(1) = \xi_1,\ \dots, x(k-1) = \xi_{k-1}. \tag{5.23}$$

Bod $x^* \in \Omega$ je rovnovážným bodem rovnice (5.21), pokud

$$f(x^*, x^*, \dots, x^*) = x^*.$$

Stabilitu, asymptotickou stabilitu nebo nestabilitu rovnovážného bodu x^* rovnice (5.21) definujeme jako tuto vlastnost rovnovážného bodu $(x^*, x^*, \dots, x^*)$ autonomního systému (5.22) podle Definice 35.

Je-li funkce f dvakrát diferencovatelná, pak pro „malou“ odchylku od rovnovážného bodu

$$y(t) = x(t) - x^*$$

podle Taylorovy věty platí

$$y(t+k) = x(t+k) - x^* = f\big(x(t), x(t+1), \dots, x(t+k-1)\big) - f(x^*, x^*, \dots, x^*) \approx$$
$$\approx \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*, x^*, \dots, x^*)\big(x(t+i-1) - x^*\big) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*, x^*, \dots, x^*) y(t+i-1).$$

Označme

$$f_{|i}(x^*) = \left.\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_k}{\partial x_i}\right|_{(x_1,x_2,\dots,x_k)=(x^*,x^*,\dots,x^*)}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

„Malá“ odchylka se tedy přibližně vyvíjí jako řešení lineární homogenní rovnice k-tého řádu

$$y(t+k) = f_{|k}(x^*)y(t+k-1) + f_{|k-1}(x^*)y(t+k-2) + \cdots + f_{|1}(x^*)y(t).$$

Podle Důsledku 8 Věty 21 platí

Věta 28. *Nechť x^* je rovnovážný bod rovnice* (5.21).

Mají-li všechny kořeny polynomu

$$\lambda^k - f_{|k}(x^*)\lambda^{k-1} - f_{|k-1}(x^*)\lambda^{k-2} - \cdots - f_{|2}(x^*)\lambda - f_{|1}(x^*) \tag{5.24}$$

modul menší než 1*, pak je rovnovážný bod x^* rovnice* (5.21) *asymptoticky stabilní.*

Existuje-li kořen polynomu (5.24)*, který má modul větší než* 1*, pak je rovnovážný bod x^* rovnice* (5.21) *nestabilní.*

Příklad. Bevertonova-Holtova rovnice se zpožděním.

Připomeňme, že rovnice (1.16) modeluje vývoj velikosti populace v prostředí s omezenými zdroji. Výraz

$$\frac{K}{K + (r-1)x},$$

který je menší než 1, vyjadřuje zmenšení (malthusovského) koeficientu růstu působením populace velikosti x v omezeném prostředí, Tato vnitrodruhová konkurence se nemusí projevit hned v následující generaci, může působit až na generaci další. Např. populace produkuje odpady, jejichž toxicita oslabuje potomky tak, že jim sníží plodnost. V další generaci se tak rodí méně potomků, Tento jev můžeme do modelu zahrnout tak, že ve jmenovateli zlomku nebudeme psát $x(t)$ ale $x(t-1)$. Dostaneme tak autonomní rovnici druhého řádu ve tvaru

$$x(t+1) = x(t)\frac{rK}{K + (r-1)x(t-1)}, \tag{5.25}$$

nebo ve tvaru jako (5.21)

$$x(t+2) = x(t+1)\frac{rK}{K + (r-1)x(t)}.$$

Je tedy

$$f(x_1, x_2) = x_2\frac{rK}{K + (r-1)x_1}$$

Algebraická rovnice $f(x,x)=x$ má dva kořeny 0 a K, tedy diferenční rovnice (5.25) má dva rovnovážné body. Funkce f je dvakrát diferencovatelná a platí

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -\frac{r(r-1)Kx_2}{\big(K+(r-1)x_1\big)^2}, \qquad \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \frac{rK}{K+(r-1)x_1},$$

takže

$$f_{|1}(0)=0, \quad f_{|2}(0)=r, \qquad f_{|1}(K)=\frac{1}{r}-1, \quad f_{|2}(K)=1.$$

Pro rovnovážný bod 0 má polynom (5.24) tvar $\lambda^2-r\lambda$ a tedy kořeny 0 a r. Je-li $r<1$, je rovnovážný bod 0 stabilní, je-li $r>1$, je rovnovážný bod 0 nestabilní.

Pro rovnovážný bod K má polynom (5.24) tvar

$$\lambda^2-\lambda+1-\frac{1}{r}$$

a tedy kořeny

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1-4\left(1-\frac{1}{r}\right)}\right).$$

Je-li $r<1$, pak

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1-4\frac{r-1}{r}}\right)=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1+4\frac{1-r}{r}}\right)>1$$

a to znamená, že rovnovážný bod K je nestabilní.

Je-li $1<r\le\frac{4}{3}$, pak kořeny

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{\frac{4}{r}-3}\right).$$

jsou reálné kladné a menší než 1. Je-li $r>\frac{4}{3}$, pak jsou kořeny $\lambda_{1,2}$ komplexně sdružené a pro jejich modul platí

$$|\lambda_{1,2}|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(3-\frac{4}{r}\right)=1-\frac{1}{r}<1.$$

To znamená, že pro $r>1$ je rovnovážný bod K stabilní.

Dostáváme tak téměř stejný výsledek jako v případě Bevertonovy-Holtovy rovnice bez zpoždění, viz příklad na str. 120. Řešení rovnice bez zpoždění však pro $r>1$ konverguje k hodnotě K monotonně a stejně se chová řešení rovnice (5.25) pro $1<r<\frac{4}{3}$. Ovšem pro $r>\frac{4}{3}$ řešení rovnice (5.25) se zpožděním konverguje k hodnotě K s tlumenými oscilacemi.

Kapitola 6

Aplikace

6.1 Růst populace

6.1.1 Fibonacciovi králíci a jejich modifikace

Leonardo Pisánský, známější jako Fibonacci, se narodil kolem roku 1170 v italské Pise a zemřel roku 1250. Vzdělání získal v severní Africe, kde jeho otec Guilielmo Bonacci působil jako diplomat. Svoje vědomosti sepsal do knihy *Liber abaci*. Toto dílo publikované roku 1202 má hlavní zásluhu na tom, že v Evropě byl přijat poziční systém zápisu čísel (pomocí indických symbolů, kterým dnes říkáme arabské číslice). Ve třetí části knihy Fibonacci zformuloval a řešil úlohu:

> Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.[1]

Tuto úlohu a její řešení lze považovat za jeden z prvních matematických modelů růstu populace. Budeme ji řešit s použitím současné symboliky.

Ze zadání úlohy plyne, že králíky můžeme rozdělit do dvou kategorií (tříd) — na ty, kteří jsou mladší než dva měsíce a tedy dosud „nerodí“ potomky, a na ty staré aspoň dva měsíce a tedy plodné. Označme $x(t)$, resp. $y(t)$, počet párů juvenilních (mladých, dosud neplodných), resp. dospělých (plodných), králíků v t-tém měsíci. Z poněkud vágního Fibonacciova popisu však není jasné, co přesně má vyjadřovat „počet párů králíků v t-tém měsíci“. Budeme si tedy představovat, že každý měsíc v určený den proběhne sčítání králíků, kterým získáme hodnoty $x(t)$ a $y(t)$. Nyní je potřeba vyjasnit, kdy se nové páry rodí. Jedna z možností je, že také k porodům dochází určitý den v měsíci. Abychom úvahy dále zjednodušili (a zreprodukovali Fibonacciův výsledek) budeme předpokládat, že králíci se rodí první den a jejich sčítání provádíme poslední den měsíce. Při sčítání mají tedy novorození králíci věk již jeden měsíc. Při sčítání následujícího měsíce mají tito králíci již věk dva měsíce a patří tedy mezi plodné. Poněvadž pár plodných králíků „zrodí“ (tj. zplodí a porodí) jeden pár mladých, bude počet párů mladých v t-tém měsíci stejný jako počet párů plodných v měsíci předchozím,

$$x(t) = y(t-1). \tag{6.1}$$

[1]Překlad E. Čecha. Citováno dle J. Bečvář a kol., Matematika ve středověké Evropě. Praha: Prometheus 2001, str. 277.

měsíc t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
počet juvenilních párů $x(t)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
počet plodných párů $y(t)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
celkový počet párů $z(t)$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Tabulka 6.1: Řešení Fibonacciovy úlohy o králících za předpokladu, že k rození dochází na začátku měsíce, počty zjišťujeme na konci měsíce, tj. používáme model (6.3).

Králíci jsou na místě ohrazeném zdí. Tomu můžeme rozumět tak, že jsou chráněni před predátory a tedy neumírají, a také, že nemohou nikam utéci. Proto bude počet plodných v t-tém měsíci roven jejich počtu v předchozím měsíci zvětšenému o počet mladých, kteří se v předchozím měsíci narodili a během měsíce dospěli,

$$y(t) = y(t-1) + x(t-1). \tag{6.2}$$

Rovnice (6.1) a (6.2) můžeme považovat za model růstu populace králíků; její aktuální velikost počítáme z velikosti v minulosti. Při matematickém modelování nějakých procesů je ovšem obvyklé usuzovat na budoucnost z přítomnosti. V rovnicích (6.1) a (6.2) budeme psát $t+1$ místo t, rovnice tedy přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \phantom{x(t) + {}} y(t), \\ y(t+1) &= x(t) + y(t). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Měsíc, ve kterém „kdosi umístil pár králíků na určitém místě“, budeme považovat za nultý, onen „umístěný pár“ za dospělé. Máme tedy počáteční podmínku $x(0) = 0$, $y(0) = 1$. Odtud již můžeme postupně počítat počty $x(t)$ a $y(t)$ pro libovolné $t = 1, 2, 3, \dots$ a z nich celkový počet párů $z(t) = x(t) + y(t)$. Výpočet je shrnut v tabulce 6.1. Výsledek 377 párů odpovídá výsledku v *Liber abaci.*[2]

Jiná z možností, jak zadání porozumět, je mírně realističtější představa, že králíci se rodí kdykoliv, ale opět je sčítáme v určitý den měsíce. Při sčítání tedy mohou mít novorozenci, tj. králíci narození od předchozího sčítání, věk z intervalu $[0, 1)$ a starší, ale dosud neplodní králíci věk z intervalu $[1, 2)$. Při této interpretaci rozdělíme třídu juvenilních párů na dvě a označíme $x_0(t)$ počet novorozených párů a $x_1(t)$ počet neplodných párů věku alespoň jeden měsíc, ale méně než dva měsíce. Poněvadž novorozenci jsou bezprostředními potomky plodných párů, mladí jsou ti, kteří se v předchozím měsíci narodili, a počet plodných je počtem plodných z předchozího měsíce zvětšeným o počet mladých, kteří dosáhli věku aspoň dva měsíce, dostaneme model

$$\begin{aligned} x_0(t+1) &= \phantom{x_0(t) \quad x_1(t)+{}} y(t) \\ x_1(t+1) &= x_0(t) \\ y(t+1) &= x_1(t) + y(t). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Při počátečních podmínkách $x_0(0) = 0$, $x_1(0) = 0$, $y(0) = 1$ a označení celkového počtu párů jako $z(t) = x_0(t) + x_1(t) + y(t)$, dostaneme počty králíků, jak je uvedeno v tabulce 6.2. Výsledný počet párů králíků za rok je při této interpretaci téměř třikrát menší, než původní Fibonacciův výsledek.

[2] To nemusí znamenat, že by si Fibonacci skutečně představoval rození na začátku měsíce a sčítání na jeho konci. Pravděpodobnější je, že si neuměl představit nulový věk a proto jeho novorozenci měli hned věk 1 a v následujícím měsíci tak byli dvouměsíční a tedy již plodní.

měsíc	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
počet novorozených párů	$x_0(t)$	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41
počet neplodných párů	$x_1(t)$	0	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28
počet plodných párů	$y(t)$	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60
celkový počet párů	$z(t)$	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129

Tabulka 6.2: Řešení Fibonacciovy úlohy o králících za předpokladu, že k rození dochází kdykoliv v průběhu měsíce a králíky sčítáme v pevně určený den měsíce, tj. používáme model (6.4).

Prvním obecným poučením tedy může být to, že sestavení modelu růstu populace je potřebné věnovat pozornost, přesně formulovat a zdůvodnit předpoklady, za kterých je model sestaven. Různé modely téhož procesu mohou totiž dávat různé výsledky.

Vraťme se ještě k Fibonnaciovu modelu (6.3). V rovnicích budeme psát $t+1$ místo t a rovnice sečteme. Dostaneme tak

$$x(t+2)+y(t+2)=x(t+1)+y(t+1)+y(t+1)=x(t+1)+y(t+1)+x(t)+y(t).$$

Označíme-li stejně jako v tabulce 6.3 symbolem $z(t)=x(t)+y(t)$ celkový počet králíků v t-tém měsíci, dostaneme pro vývoj tohoto počtu rekurentní formuli druhého řádu

$$z(t+2)=z(t+1)+z(t). \tag{6.5}$$

Pro její rozbor využijeme teorii lineárních homogenních diferenčních rovnic vyššího řádu s konstantními koeficienty 3.2.3. Charakteristická rovnice příslušná k diferenční rovnici (6.3) je tvaru

$$\lambda^2-\lambda-1=0$$

a její kořeny jsou

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{5}\right).$$

To znamená, že řešení rovnice (6.5) s počátečními podmínkami

$$z(0)=1,\quad z(1)=2$$

je rovno

$$z(t)=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t.$$

Toto řešení odpovídá původnímu Fibonacciovu řešení, které je uvedeno v tabulce 6.1.

Řešení rovnice (6.5) s počátečními podmínkami

$$z(0)=0,\quad z(1)=1$$

je rovno

$$z(t)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^t\left(1-\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^t\right).$$

Fibonacciův model je krásný matematicky, není ovšem příliš realistický biologicky. Králíci neumírají, dospívají v přesně určených časech, plodí přesně určený počet potomků v pravidelných intervalech. Fibonacci samozřejmě nepředstíral, že popisuje vývoj populace králíků, vytvořil jakousi umělou skutečnost — jeho králíci žijí a množí se na „místě ohrazeném zdí“. Navíc svou úlohu o králících uzavírá větou: „tak je to možné dělat dál do nekonečného počtu měsíců“; tím se Fibonacci projevil jako skutečný matematik — uvažuje o nekonečnu a abstraktních nesmrtelných králících. Myšlenka modelovat pomocí rovnic typu (6.3) nebo (6.4) vývoj populace rozdělené na několik disjunktních tříd, přičemž čas plyne v diskrétních krocích, je však velmi plodná.

Pokusíme se modelovat vývoj populace za realističtějších předpokladů. Ponecháme původní představu času plynoucího v diskrétních krocích (nejedná se tedy o čas fyzikální) a zvolíme nějakou časovou jednotku (ve Fibonacciově úloze jí byl jeden měsíc). Populaci si budeme představovat jako tvořenou velkým počtem jedinců (v případě organismů rozmnožujících se pohlavně budeme za „jedince“ považovat páry nebo samice). Každý z jedinců může být jednoho z typů — *juvenilní* (mladý, neplodný) nebo *dospělý* (plodný). Jinak jsou jedinci nerozlišitelní.

V populaci probíhají tři procesy — rození (vznik nových jedinců), dospívání (maturace, přeměna juvenilního jedince na plodného) a umírání (nebo z jiného pohledu přežívání). Narození jedince, jeho přeměnu na plodného a jeho úmrtí považujeme za náhodné jevy. O umírání (přežívání) a dospívání budeme předpokládat, že se jedná o jevy stochasticky nezávislé. Označme

σ_1 ... pravděpodobnost, že juvenilní jedinec přežije jedno období,
σ_2 ... pravděpodobnost, že plodný jedinec přežije jedno období,
γ ... pravděpodobnost, že juvenilní jedinec během období dospěje,
φ ... střední počet potomků plodného jedince za jedno období.

O pravděpodobnostech přežití σ_1 a σ_2, pravděpodobnosti maturace γ a fertilitě φ budeme předpokládat

$$0 < \sigma_1 < 1, \quad 0 \leq \sigma_2 < 1, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad 0 < \varphi; \tag{6.6}$$

v reálně existující populaci totiž musí být možné, že se juvenilní jedinec dožije plodnosti ($\sigma_1 > 0$, $\gamma > 0$) a že se nějací noví jedinci rodí ($\varphi > 0$), přežití nikdy není jisté ($\sigma_1 < 1$, $\sigma_2 < 1$). Nevylučujeme možnost $\sigma_2 = 0$, tj. že jedinci po „produkci potomků“ (porodu, nakladení vajíček a podobně) hynou; taková populace se nazývá *semelparní*. Nevylučujeme však ani možnost $\sigma_2 > 0$, tj. že dospělí jedinci plodí po delší úsek života; taková populace se nazývá *iteroparní*. Jedinci mohou dospívat bezprostředně po narození, tj. v čase kratším, než je zvolené období. V období po narození tedy takový jedinec, pokud nezemře, jistě dospěje, $\gamma = 1$. Jedinci z populace mohou dospívat i s jistým zpožděním, $\gamma < 1$. Zhruba řečeno, při délce časového kroku jeden rok jsou jednoleté organismy semelparní s bezprostředním dospíváním, drobní ptáci a savci jsou iteroparní s bezprostředním dospíváním, lososi nebo cikády jsou semelparní se zpožděným dospíváním, velcí ptáci a savci (včetně člověka) jsou iteroparní se zpožděným dospíváním. Snažíme se tedy modelovat dosti obecnou populaci.

Označme dále $x(t)$, resp. $y(t)$, velikost (počet jedinců, populační hustotu, celkovou biomasu a podobně) části populace tvořené juvenilními, resp. plodnými, jedinci v t-tém časovém kroku. Juvenilní část populace je tvořena jedinci, kteří se za poslední období narodili, a jedinci, kteří již tuto třídu populace tvořili, přežili období a nedospěli v něm. Očekávaná velikost juvenilní části populace v následujícím období tedy bude

$$x(t+1) = \sigma_1(1-\gamma)x(t) + \varphi y(t). \tag{6.7}$$

Plodná část populace bude tvořena jedinci, kteří byli juvenilní, nezemřeli a dospěli, a jedinci, kteří již dospělí byli a přežili. Očekávaná velikost plodné části populace v následujícím období tedy bude

$$y(t+1) = \sigma_1\gamma x(t) + \sigma_2 y(t). \tag{6.8}$$

Poznamenejme ještě, že kdybychom připustili $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ a položili $\gamma = \varphi = 1$ (jedinci jistě přežívají, tj. neumírají, jistě během období dospějí a dospělí vždy vyprodukují právě jednoho potomka), dostaneme původní Fibonacciův model (6.3).

Opět označíme celkovou velikost populace v čase t symbolem $z(t)$, tj. $z(t) = x(t) + y(t)$. Z rovnic (6.7) a (6.8) postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
z(t+2) &= x(t+2) + y(t+2) = \\
&\qquad = \sigma_1(1-\gamma)x(t+1) + \varphi y(t+1) + \sigma_1\gamma x(t+1) + \sigma_2 y(t+1) = \\
&= \big(\sigma_1(1-\gamma)+\sigma_2\big)\big(x(t+1)+y(t+1)\big) + \\
&\qquad + (\sigma_1\gamma - \sigma_2)x(t+1) + \big(\varphi - \sigma_1(1-\gamma)\big)y(t+1) = \\
&= \big(\sigma_1(1-\gamma)+\sigma_2\big)z(t+1) + \\
&\qquad + (\sigma_1\gamma-\sigma_2)\big(\sigma_1(1-\gamma)x(t)+\varphi y(t)\big) + \big(\varphi-\sigma_1(1-\gamma)\big)\big(\sigma_1\gamma x(t)+\sigma_2 y(t)\big) = \\
&= \big(\sigma_1(1-\gamma)+\sigma_2\big)z(t+1) + \\
&\qquad + \big(\sigma_1\gamma\varphi - \sigma_1\sigma_2(1-\gamma)\big)x(t) + \big(\sigma_1\gamma\varphi - \sigma_1\sigma_2(1-\gamma)\big)y(t) = \\
&\qquad = \big(\sigma_1(1-\gamma)+\sigma_2\big)z(t+1) + \big(\sigma_1\gamma\varphi - \sigma_1\sigma_2(1-\gamma)\big)z(t).
\end{aligned}$$

Celková velikost populace z je tedy řešením lineární diferenční rovnice druhého řádu

$$z(t+2) - \big(\sigma_1(1-\gamma)+\sigma_2\big)z(t+1) + \sigma_1\big(\sigma_2(1-\gamma) - \gamma\varphi\big)z(t) = 0. \tag{6.9}$$

K analýze této rovnice využijeme výsledky oddílu 3.2.3, zejména příkladu začínajícího na str. 64. Při označení používaném ve zmíněném příkladu je

$$b = -\big(\sigma_1(1-\gamma)+\sigma_2\big) < 0, \quad c = \sigma_1\big(\sigma_2(1-\gamma)-\gamma\varphi\big),$$

$$\begin{aligned}
b^2 - 4c &= \sigma_1^2(1-\gamma)^2 + 2\sigma_1\sigma_2(1-\gamma) + \sigma_2^2 - 4\sigma_1\sigma_2(1-\gamma) + 4\sigma_1\gamma\varphi = \\
&\qquad = \big(\sigma_1(1-\gamma)-\sigma_2\big)^2 + 4\sigma_1\gamma\varphi > 0,
\end{aligned}$$

neboť podle (6.6) je $\sigma_1\gamma\varphi > 0$. To znamená, že ryze dominantní charakteristický kořen je

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_1(1-\gamma)+\sigma_2+\sqrt{\big(\sigma_1(1-\gamma)-\sigma_2\big)^2+4\sigma_1\gamma\varphi}}{2} > 0$$

a druhý charakteristický kořen je

$$\lambda_2 = \frac{\sigma_1(1-\gamma)+\sigma_2-\sqrt{\big(\sigma_1(1-\gamma)-\sigma_2\big)^2+4\sigma_1\gamma\varphi}}{2} < 0.$$

Počáteční velikosti populace $\zeta_0 = z(0)$ a $\zeta_1 = z(1)$ musí být nezáporné a alespoň jedna z nich musí být nenulová (jinak by žádná populace nebyla). To znamená, že

$$\zeta_1 - \zeta_0\lambda_2 = \zeta_1 + \zeta_2|\lambda_2| > 0$$

a vývoj velikosti populace bude po jistém čase popsán geometrickou posloupností s kvocientem λ_1. Populace roste, pokud $c < -b - 1$, tj.

$$\sigma_1\big(\sigma_2(1-\gamma) - \gamma\varphi\big) < \sigma_1(1-\gamma) + \sigma_2 - 1,$$

po úpravě

$$\big(1 - \sigma_1(1-\gamma)\big)(1-\sigma_2) < \sigma_1\gamma\varphi.$$

Výraz na pravé straně této nerovnosti představuje střední hodnotu počtu novorozenců, kteří se dožijí dospělosti. Výraz na levé straně vyjadřuje pravděpodobnost toho, že juvenilní jedinec uhyne nebo dospěje a hned v prvním období uhyne, tedy pravděpodobnost, že novorozenec během svého života nezplodí potomka.

Pokud

$$\big(1 - \sigma_1(1-\gamma)\big)(1-\sigma_2) > \sigma_1\gamma\varphi,$$

populace vymře. V případě, že by nastala rovnost, populace se vyvine do konstantní velikosti. Ovšem pravděpodobnost, že by reálná populace měla takové parametry, které splní nějakou rovnost, je nulová.

6.1.2 Süßmilchova populace a Leslieho matice

Berlínský akademik Johann Peter Süßmilch publikoval v roce 1741 pojednání *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menslichen Geschlechts aus der Geburt, dem Tode un der Fortpflanzung deßelben* (Božský řád ve změnách lidských generací jejich rozením, smrtí a rozmnožováním), které je nyní považováno za první práci věnovanou demografii. Do jejího druhého vydání o dvacet let později zahrnul matematický model, který pro něj vypracoval Leonhard Euler. Model vychází z podobných zjednodušení jako Fibonacciův model růstu populace králíků, zahrnuje však vedle rození i umírání. Začíná v roce 0 s jedním lidským párem, přičemž muž i žena mají dvacet let. Euler dále předpokládal, že lidé umírají ve 40 letech, žení a vdávají se ve 20 letech a každý pár má šest dětí: dvě děti (chlapce a děvče) ve věku 22 let, další dva ve věku 24 let a poslední dvojici ve věku 24 let.

Vyjádříme Eulerův model formálně. Za jednotku času budeme považovat dva roky. Označíme $n = n(t)$ — počet novorozených párů v čase t,
$d = d(t)$ — počet úmrtí v časovém intervalu $(t-1, t)$
$x = x(t)$ — počet žijících párů v čase t.

Novorozenci v čase t jsou potomci párů 22-ti letých (tj. těch, kteří byli novorozenci před 22 lety, tedy v čase $t - 11$), párů 24 letých a párů 26 letých. Pro veličinu $n(t)$ tedy máme rekurentní vztah

$$n(t) = n(t-11) + n(t-12) + n(t-13).$$

Poněvadž lidé umírají ve 40 letech, je počet $d(t)$ zemřelých párů v čase t roven počtu novorozenců před 40 lety, tj.

$$d(t) = n(t-20). \tag{6.10}$$

V čase t žijí páry, které žily v předchozím období a nezemřely, a dále páry, které se v tomto čase narodily. Platí tedy

$$x(t) = x(t-1) - d(t) + n(t).$$

rok	čas t	novorozenci $n(t)$	úmrtí $d(t)$	žijící páry $x(t)$	rok	čas t	novorozenci $n(t)$	úmrtí $d(t)$	žijící páry $x(t)$
0	0	0	0	1	20	10	0	1	3
2	1	1	0	2	22	11	0	0	3
4	2	1	0	3	24	12	1	0	4
6	3	1	0	4	26	13	2	0	6
8	4	0	0	4	28	14	3	0	9
10	5	0	0	4	30	15	2	0	11
12	6	0	0	4	32	16	1	0	12
14	7	0	0	4	34	17	0	0	12
16	8	0	0	4	36	18	0	0	12
18	9	0	0	4	38	19	0	0	12

Tabulka 6.3: Počáteční velikosti populace modelované rovnicemi (6.11).

Těmito úvahami dostáváme model vývoje populace tvořený třemi posloupnostmi, které splňují lineární diferenční rovnice

$$\begin{aligned} n(t+13) &= n(t+2)+n(t+1)+n(t), \\ d(t+20) &= n(t), \\ x(t+20) &= x(t+19)+n(t)-d(t). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Vývoj modelované populace v prvních čtyřiceti letech, tj. v čase $t = 0$ až $t = 19$ je shrnut v Tabulce 6.1. V počátečním čase byl na Zemi pouze jeden pár dvacetiletých, tj. $x(0) = 1$, $n(0) = 0$. Po dvou letech k nim přibyli novorození chalapec a děvče, tj. $n(1) = 1$, $x(1) = 2$. Po dalších dvou letech přibyl další pár novorozenců, $n(2) = 1$, $x(2) = 3$ a po dalších dvou letech opět, $n(3) = 1$, $x(3) = 4$. Pak se čtrnáct let velikost populace neměnila, nikdo se nerodil ani neumíral. Za další dva roky, tj. 20 let od začátku prvotní pár zemřel, $d(10) = 1$, $x(10) = 3$ a za další dva roky přibyli první potomci prvního narozeného páru, $n(11) = 1$, $x(11) = 4$. Za další dva roky přibyli druzí dva potomci prvního narozeného páru a první dva potomci druhého narozeného páru, $n(12) = 2$, $x(12) = 6$. Tak můžeme v počítání pokračovat a dostaneme všechny počáteční podmínky pro rovnice (6.12), jak jsou uvedeny v Tabulce 6.3.

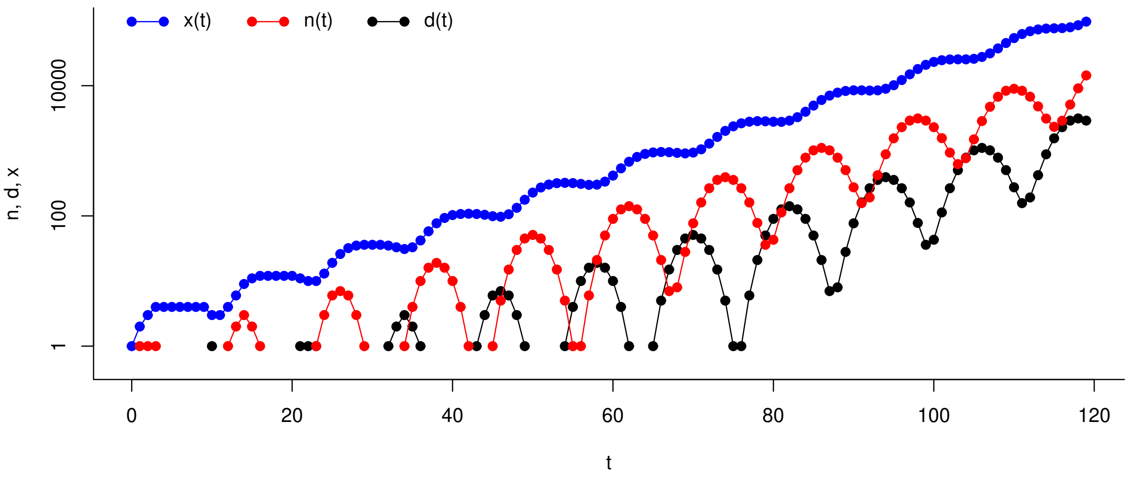
Rovnice (6.12) spolu s počátečními podmínkami umožňují rekurentně počítat velikost populace v libovolném čase. L. Euler tento výpočet provedl až do času $t = 119$. Na Obrázku 6.1 jsou zobrazeny hodnoty posloupností n, d, x až do tohoto času. K problematice růstu populace se Euler později vrátil v rukopise *Sur la multiplication du genre humain* (O rozmnožování lidského rodu), který však za jeho života nevyšel. Tam odvodil (v 18. století, bez jakékoliv výpočetní techniky!), že velikost lidstva po dostatečně dlouhé době vývoje roste jako geometrická posloupnost s kvocientem $r \doteq 1{,}096$, což znamená, že jeho velikost se zdvojnásobí každých zhruba 15 let. Dále vztahem

$$\frac{n(t)}{d(t)} = \frac{n(t)}{n(t-20)} \simeq r^{20} \doteq 6{,}25$$

ukázal, že počet úmrtí je zhruba šestkrát menší, než počet narození.

Vzhledem k podmínce (6.10) můžeme původní Eulerův model (6.11) zredukovat na dvě lineární diferenční rovnice

$$\begin{aligned} n(t+13) &= n(t+2)+n(t+1)+n(t), \\ x(t+20) &= x(t+19)+n(t+20)-n(t). \end{aligned} \tag{6.12}$$



Obrázek 6.1: Model „rozmnožování lidského rodu“ (6.11). Na svislé ose je logaritmické měřítko. Symboly označují: $x(t)$ — počet žijících párů v čase t, tj. $2t$ let od počátku, $n(t)$ — počet narození v čase t, $d(t)$ — počet úmrtí v čase t.

První z těchto rovnic je lineární homogenní diferenční rovnice pro posloupnost n. Můžeme ji tedy vyřešit metodami uvedenými v 3.2.3 a nalezenou posloupnost n dosadit do druhé rovnice.

Charakteristická rovnice pro první z rovnic (6.12) je

$$\lambda^{13} - \lambda^2 - \lambda = 1$$

a má jeden reálný a 12 komplexně sdružených jednoduchých kořenů. Tyto kořeny jsou

$\lambda_1 \doteq 1{,}096128990,$
$\lambda_{2,3} \doteq 0{,}9404208930 \pm 0{,}5461788546\mathrm{i} \doteq 1{,}087521401(\cos 0{,}5261682144 \pm \mathrm{i}\sin 0{,}5261682144),$
$\lambda_{4,5} \doteq 0{,}5258241166 \pm 0{,}9196097193\mathrm{i} \doteq 1{,}059326691(\cos 1{,}051377404 \pm \mathrm{i}\sin 1{,}051377404),$
$\lambda_{6,7} = \pm\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{2} \pm \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2},$
$\lambda_{8,9} \doteq -0{,}9603461911 \pm 0{,}2570448492\mathrm{i} \doteq 0{,}9941513271(\cos 2{,}880064478 \pm \mathrm{i}\sin 2{,}880064478),$
$\lambda_{10,11} \doteq -0{,}6729736856 \pm 0{,}6502474237\mathrm{i} \doteq 0{,}9357966091(\cos 2{,}373367756 \pm \mathrm{i}\sin 2{,}373367756),$
$\lambda_{12,13} \doteq -0{,}3809896276 \pm 0{,}8056402296\mathrm{i} \doteq 0{,}8911841986(\cos 2{,}012532255 \pm \mathrm{i}\sin 2{,}012532255).$

Reálný charakteristický kořen λ_1 je současně ryze dominantním charakteristickým kořenem. To znamená, že posloupnost n je asymptoticky ekvivalentní s posloupností $\bar{n}$ danou vztahem

$$\bar{n}(t) = \lambda_1^t \left(\lim_{\tau\to\infty} \frac{n(\tau)}{\lambda_1^\tau} \right).$$

Posloupnost $\bar{n}$ lze proto považovat za první aproximaci posloupnosti n. Označíme

$$\alpha = \lim_{\tau\to\infty} \frac{n(\tau)}{\lambda_1^\tau},$$

geometrickou posloupnost $\bar{n}$ jednoduše vyjádříme vztahem $\bar{n}(t) = \alpha\lambda_1^t$ a dosadíme ji do druhé z rovnic (6.12). Tak najdeme první aproximaci $\bar{x}$ posloupnosti x. Posloupnost $\bar{x}$ tedy má splňovat

$$\bar{x}(t+20) = \bar{x}(t+19) + \bar{n}(t+20) - \bar{n}(t) = \bar{x}(t+19) + \alpha\lambda_1^{t+20} - \alpha\lambda_1^t.$$

Budeme-li v této rovnosti psát $t-19$ místo t, dostaneme po jednoduché úpravě vyjádření diference posloupnosti $\bar{x}$ ve tvaru

$$\Delta\bar{x}(t) = \alpha\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda_1^{19}}\lambda_1^t.$$

Podle (1.25) a podle 1.3.1 tedy je

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + \alpha\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda_1^{19}}\sum_{i=0}^{t-1}\lambda_1^i = \bar{x}_0 + \frac{\alpha}{\lambda_1^{19}}\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda_1-1}\left(\lambda_1^t-1\right).$$

Vyjádření posloupnosti $\bar{x}$ zjednodušíme tím, že označíme

$$A = \frac{\alpha}{\lambda_1^{19}}\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda_1-1}. \tag{6.13}$$

Dostáváme tak první aproximace řešení systému diferenčních rovnic (6.12) ve tvaru

$$\bar{n}(t) = \alpha\lambda_1^t, \qquad \bar{x}(t) = \bar{x}_0 + A\left(\lambda_1^t-1\right). \tag{6.14}$$

Tyto posloupnosti lze považovat za vyjádření časového trendu množství novorozenců a velikosti populace.

Povšimněme si nyní toho, že pro argument φ charakteristických kořenů, které mají druhý největší modul, tj. kořenů $\lambda_{2,3}$, platí

$$\varphi = \arg\lambda_{2,3} \doteq 0{,}5261682 \doteq \frac{2\pi}{11{,}9414}.$$

Odtud plyne, že „perioda kolísání“ posloupnosti n kolem posloupnosti $\bar{n}$, tj. kolem jakési střední hodnoty počtu novorozených párů, je zhruba 12. Tento jev je také dobře pozorovatelný na Obrázku 6.1.

Označme pro stručnost $\kappa = |\lambda_2|$. Posloupnost $\tilde{n}$ daná vztahem

$$\tilde{n}(t) = \alpha\lambda_1^t + (\beta\cos t\varphi + \gamma\sin t\varphi)\kappa^t,$$

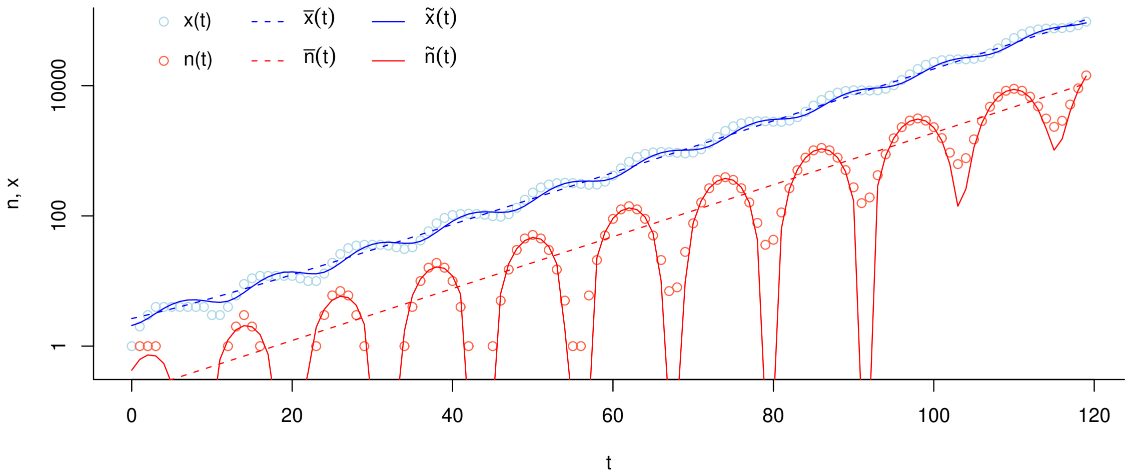
kde β,γ jsou vhodné konstanty určené počátečními podmínkami, „pro dostatečně velká t dostatečně přesně aproximuje posloupnost n“.

Nyní budeme hledat „dostatečně dobrou“ aproximaci $\tilde{x}$ posloupnosti x. Dostaneme ji tak, že ve druhé z rovnic (6.12) budeme psát $\tilde{x}$ místo x, $\tilde{n}$ místo n a $t-19$ místo t. Dostaneme

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t+1) &= \tilde{x}(t) + \tilde{n}(t+1) - \tilde{n}(t-19) = \\ &= \tilde{x}(t) + \alpha\lambda_1^{t+1} + \big(\beta\cos(t+1)\varphi + \gamma\sin(t+1)\varphi\big)\kappa^{t+1} - \\ &\qquad - \alpha\lambda_1^{t-19} - \big(\beta\cos(t-19)\varphi + \gamma\sin(t-19)\varphi\big)\kappa^{t-19},\end{aligned}$$

tedy

$$\Delta\tilde{x}(t) = \alpha\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda^{19}}\lambda_1^t + (B\cos t\varphi + C\sin t\varphi)\kappa^t, \tag{6.15}$$



Obrázek 6.2: Upravený model „rozmnožování lidského rodu“ (6.12). Na svislé ose je logaritmické měřítko. Symboly označují: $x(t)$, $n(t)$ — hodnoty počítané z rekurentních vztahů (6.12), $\bar{x}(t)$, $\bar{n}(t)$ — první aproximace řešení (6.14) využívající pouze dominantní charakteristický kořen λ_1 (trend), $\tilde{x}(t)$, $\tilde{n}(t)$ — druhá aproximace řešení (6.16) využívající charakteristické kořeny $\lambda_{2,3}$ s druhým největším modulem. Při výpočtu byly použity hodnoty $\alpha \doteq 0{,}194708013278096$, $\bar{x}_0 \doteq 2{,}6514514395602$, $\beta \doteq 0{,}231889637997667$, $\gamma \doteq 0{,}352845633763305$, $\tilde{x}_0 \doteq 2{,}07362768022334$.

kde jsme označili

$$B = \kappa(\beta\cos\varphi - \gamma\sin\varphi) - \kappa^{-19}(\beta\cos 19\varphi - \gamma\sin 19\varphi),$$

$$C = \kappa(\gamma\cos\varphi - \beta\sin\varphi) - \kappa^{-19}(\gamma\cos 19\varphi + \beta\sin 19\varphi).$$

Z rovnice (6.15) dostaneme aproximaci řešení druhé z rovnic (6.12) ve tvaru

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 + \sum_{i=0}^{t-1}\left(\alpha\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda^{19}}\lambda_1^i + (B\cos i\varphi + C\sin i\varphi)\kappa^i\right).$$

Toto vyjádření můžeme upravit s využitím 1.3.1 a označení (6.13)

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 + A(\lambda_1^t - 1) + \\ + \frac{B\big(\kappa^{t+1}\cos(t-1)\varphi - \kappa\cos\varphi - \kappa^t\cos t\varphi + 1\big) + C\big(\kappa^{t+1}\sin(t-1)\varphi + \kappa\sin\varphi - \kappa^t\sin t\varphi\big)}{\kappa^2 - 2\kappa\cos\varphi + 1}. \tag{6.16}$$

Aproximace (6.14) a (6.16) řešení systému (6.12) jsou zobrazeny na Obrázku 6.2.

Model (6.12) popisuje vývoj velikosti populace, která je strukturovaná do dvou tříd — novorozenci a ostatní. Snadno ho ale můžeme modifikovat, aby popisoval populaci strukturovanou podrobněji; může nás zajímat počet školních dětí, počet rodičů pečujících o děti předškolního věku a podobně. V Eulerově zjednodušení takové rozčlenění populace závisí pouze na věku jedinců. Označme proto $x_i(t)$ počet párů věku i (tj. $2i$ let) v čase t, $i = 1, 2, \dots, 20$. Pak platí

$$x(t) = \sum_{i=1}^{20} x_i(t)$$

a

$$x_i(t) = n(t-i), \quad x_i(t+1) = \begin{cases} n(t), & i = 1, \\ x_{i-1}(t), & i > 1, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 20.$$

První z rovnic modelu (6.12) nyní můžeme přepsat ve tvaru

$$n(t+1) = n(t-10) + n(t-11) + n(t-12) = x_{10}(t) + x_{11}(t) + x_{12}(t).$$

Pro vývoj velikosti populace strukturované podle věku popsaným způsobem tak dostáváme model tvořený 21 lineárními diferenčními rovnicemi prvního řádu

$$\begin{aligned} n(t+1) &= x_{10}(t) + x_{11}(t) + x_{12}(t), \\ x_1(t+1) &= n(t), \\ x_i(t+1) &= x_{i-1}(t), \qquad\qquad i = 2, 3, \dots, 20. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Euler v podstatě předpokládal, že smrt je jistá ve čtyřiceti letech a v mladším věku je jisté přežití. Abychom model přiblížili realitě, nahradíme jistoty pravděpodobnostmi. Označme proto P_i pravděpodobnost, že jedinec věku i (tj. $2i$ let) přežije jedno dvouleté období (tj. dožije se věku $2i + 2$ let). Dále nechť nejvyšší možný věk je $2k$ let. Pak

$$x_1(t+1) = P_0 n(t), \qquad x_i(t+1) = P_{i-1} x_{i-1}(t), \; i = 2, 3, \dots, k.$$

Další Eulerův nerealistický předpoklad je ten, že dospělé páry mají v přesně daném věku právě jeden pár potomků. Tento předpoklad nahradíme realističtějším, že počet potomků páru věku i je náhodná veličina se střední hodnotou F_i. První z rovnic modelu (6.17) nyní můžeme nahradit rovnicí

$$n(t+1) = \sum_{i=1}^{k} F_i x_i(t);$$

hodnota posloupnosti $n(t)$ nyní již nevyjadřuje počet novorozenců v čase t, ale očekávanou hodnotu tohoto počtu. Celkem tak dostáváme model tvořený $k + 1$ lineárními diferenčními rovnicemi

$$\begin{aligned} n(t+1) &= \sum_{i=1}^{k} F_i x_i(t), \\ x_1(t+1) &= P_0 n(t), \\ x_i(t+1) &= P_{i-1} x_{i-1}(t), \quad i = 2, 3, \dots, k. \end{aligned}$$

Tento model můžeme zapsat ve vektorovém tvaru

$$\begin{pmatrix} n \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-2} \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix}(t+1) = \begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{k-2} & F_{k-1} & F_k \\ P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-2} \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix}(t),$$

nebo stručně

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t), \tag{6.18}$$

kde jsme označili

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} n \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{k-1} & F_k \\ P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{k-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Maticový model(6.18) poprvé zformuloval Patrick Holt Leslie ve slavném článku *On the use of matrices in certain population mathematics,* který publikoval roku 1945 v časopise *Biometrika*. Matice A proto dostala název *Leslieho matice*.

6.1.3 Malthusovské modely

Předpokládejme, že známe okamžitou velikost populace a umíme spočítat počty jedinců uhynulých a „nově vzniklých" (tj. novorozenců, embryí, klíčících semen a podobně). Budeme dále předpokládat, že nějací „noví" jedinci skutečně „vznikají" a jejich počet v nějakém zvoleném období je úměrný velikosti populace (např. že každý jedinec za období vyprodukuje určitý počet potomků a jedinec „nově vzniklý" potomky ještě neprodukuje). Počet uhynulých jedinců budeme považovat za úměrný velikosti populace, což lze interpretovat tak, že existuje pro všechny „staré" jedince (tj. nikoliv ty „nově vzniklé") pravděpodobnost, že během uvažovaného období zemřou. Nebudeme vylučovat „nesmrtelnost" (tj. populace se může vyvíjet v dokonale chráněném prostředí a její růst sledujeme jen po takové období, že jedinci nezestárnou; takovou populací byli např. Fibonacciovi králíci) ani možnost, že během období vymřou všichni „staří" jedinci a zůstanou pouze ti „nově vzniklí".

Zvolme tedy časovou jednotku a označme $x(t)$ velikost populace v čase t, $y(t)$ množství jedinců „vzniklých" v časovém intervalu $(t, t+1]$, kteří v čase $t+1$ žijí, a $z(t)$ množství jedinců uhynulých v tomto časovém intervalu. Tyto stavové proměnné jsou vázány rovností

$$x(t+1) = x(t) + y(t) - z(t) \tag{6.19}$$

pro každé $t \in \mathbb{N}$. Přitom předpokládáme

(i) $y(t) = bx(t)$ pro každé $t \in \mathbb{N}$ a nějaké $b > 0$,

(ii) $z(t) = dx(t)$ pro každé $t \in \mathbb{N}$ a nějaké d, $0 \le d \le 1$;

parametr b, resp. d, se nazývá *koeficient porodnosti* (birth rate), resp. *úmrtnosti* (death rate).

S využitím uvedených předpokladů můžeme rovnost (6.19) přepsat ve formě

$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1 + b - d)x(t)$$

a při označení

$$r = 1 + b - d \tag{6.20}$$

v jednoduchém tvaru

$$x(t+1) = rx(t). \tag{6.21}$$

Dostáváme tak model s jedinou stavovou proměnnou x a jediným parametrem r. Parametr r se nazývá *růstový koeficient* (growth rate) a podle předpokladu (ii) splňuje nerovnost

$$r = 1 + b - d \geq 1 + b - 1 = b > 0. \tag{6.22}$$

Model (6.21) je vlastně lineární homgenní diferenční rovnice prvního řádu, jednoduše řečeno, rekurentní formule pro geometrickou posloupnost s kvocientem r. Při známé (nebo dané) počáteční velikosti populace $x(0) = x_0$ můžeme tedy časově závislou velikost populace vyjádřit geometrickou posloupností

$$x(t) = r^t x(0). \tag{6.23}$$

Ze známých vlastností geometrické posloupnosti dostáváme první závěr:

Tvrzení 20. Pro populaci modelovanou rovností (6.19) s předpoklady (i) a (ii) platí

- je-li $r > 1$, tj. $b > d$, pak $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \infty$, populace neomezeně roste;
- je-li $r = 1$, tj. $b = d$, pak $x(t) = x(0)$ pro všechna $t \in \mathbb{N}$, velikost populace je v průběhu času konstantní;
- je-li $r < 1$, tj. $b < d$, pak $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, populace vymírá.

Někdy může být užitečné v populaci rozlišovat novorozence a ostatní jedince. Množství „nově vzniklých“ jedinců totiž nemusí být pozorovatelné, např. klíčící semena jsou schovaná v zemi, březost samice nemusí být viditelná a podobně. Budeme proto uvažovat jinou veličinu — množství novorozenců, tj. živě narozených mláďat nebo čerstvě rašících rostlin. Označme tedy $n(t)$ množství novorozenců v čase t. Za novorozence budeme považovat jedince, kteří „vznikli“ v časovém intervalu $(t-1, t]$ a v čase t žijí. To znamená, že $n(t) = y(t-1)$. Rovnost (6.19) tedy můžeme přepsat na tvar

$$x(t+1) - n(t+1) = x(t) - z(t). \tag{6.24}$$

V čase $t > 0$ je podíl novorozenců v populaci podle (6.21) a předpokladu (i) roven

$$\frac{n(t)}{x(t)} = \frac{y(t-1)}{rx(t-1)} = \frac{b}{r}.$$

Vidíme, že tento podíl nezávisí na čase. Označíme

$$m = \frac{b}{r}. \tag{6.25}$$

Pak podle nerovnosti (6.22) a předpokladu (i) je $m > 0$. Z rovností (6.24) a (6.21) nyní můžeme vyjádřit

$$z(t) = x(t) - x(t+1) + n(t+1) = x(t) - x(t+1) + mx(t+1) = (1 - r + mr)x(t).$$

Porovnáním s předpokladem (ii) vidíme, že

$$d = 1 - r + mr. \tag{6.26}$$

Odtud a s dalším využitím předpokladu (ii) dostaneme

$$m = \frac{d+r-1}{r} \le \frac{1+r-1}{r} = 1.$$

Pro množství $n(t)$ novorozenců v čase t tedy platí

$$n(t) = mx(t), \qquad 0 < m \le 1. \tag{6.27}$$

Množství novorozenců $n(t)$, množství „nově vzniklých“ jedinců $y(t)$ a množství uhynulých jedinců $z(t)$ splňují stejnou diferenční rovnici (6.21) jako velikost populace $x(t)$:

$$n(t+1) = mx(t+1) = mrx(t) = rn(t), \qquad y(t+1) = bx(t+1) = brx(t) = ry(t),$$

$$z(t+1) = dx(t+1) = drx(t) = rz(t).$$

Z rovností (6.26), (6.27) a předpokladu (ii) dostaneme

$$r = \frac{1-d}{1-m} = \frac{1-\dfrac{z(t)}{x(t)}}{1-\dfrac{n(t)}{x(t)}} = \frac{x(t)-z(t)}{x(t)-n(t)}. \tag{6.28}$$

Známe-li tedy velikost populace a množství novorozenců v nějakém okamžiku a množství uhynulých jedinců v předchozím období, můžeme vypočítat růstový koeficient r; samozřejmě za předpokladu, že se populace vyvíjí podle uvažovaného modelu, tj. podle rovnice (6.21).

S využitím rovností (6.26), (6.27) a předpokladu (ii) můžeme také vyjádřit

$$\frac{z(t)}{n(t)} - r = \frac{z(t)}{x(t)}\frac{x(t)}{n(t)} - r = \frac{d}{m} - r = \frac{1-r+mr}{m} - r = \frac{1-r}{m},$$

takže

$$\frac{\dfrac{z(t)}{n(t)} - r}{1-r} = \frac{1}{m}. \tag{6.29}$$

Ze znalosti množství novorozenců, množství uhynulých jedinců a podílu novorozenců v populaci můžeme vypočítat růstový koeficient r.

V matrikách bývají vedeny záznamy o narozeních a úmrtích (ve farních matrikách bývaly záznamy o křtech a pohřbech). Z těchto údajů lze určit počet novorozenců $n(t)$ a počet zemřelých $z(t)$ v nějakém roce. Z odhadu podílu novorozenců v populaci (například spočítáním kočárků a lidí na náměstí odpoledne) lze pomocí rovnice (6.29) spočítat přírůstek obyvatelstva r a z této hodnoty a z rovnice (6.28) odhadnout počet obyvatel.

Údaje o úmrtích bývají většinou doplněny i o věk zemřelých. Budeme tedy předpokládat, že známe věk uhynulých jedinců, Označme $z_k(t)$ množství jedinců, kteří uhynuli v časovém intervalu $(t, t+1]$ a jejich věk byl k; přesněji, kteří v časovém intervalu $(t, t+1)$ věku k dosáhli a poté v tomto intervalu uhynuli, nebo kteří by v tomto intervalu věku k dosáhli, pokud by neuhynuli. Předpokládejme, že existuje nějaký maximální možný věk ω, tj. takový věk, že není možné aby jakýkoliv jedinec byl starší než ω.[3]

[3] Tím samozřejmě není řečeno, že je možné se věku ω dožít; v případě lidské populace můžeme bezpečně volit např. $\omega = 1000$ let, neboť nejstarší člověk Metuzalém zemřel ve věku 969 let.

Označme dále $x_k(t)$ množství jedinců věku k v čase t, přesněji: množství jedinců, kteří v časovém intervalu $(t-1,t]$ dosáhli věku k. Proměnné $x(t)$, $n(t)$, $z(t)$, $x_k(t)$, $z_k(t)$, $k=1,2,\ldots,\omega$ jsou vázány vztahy

$$z(t)=\sum_{i=1}^{\omega} z_i(t), \quad x(t)=n(t)+\sum_{i=1}^{\omega} x_i(t), \quad z_k(t)=x_k(t)-x_{k+1}(t+1) \tag{6.30}$$

pro každý čas $t\in\mathbb{N}$.

Nechť q_k, $k=1,2,\ldots,\omega$ označuje pravděpodobnost, že se jedinec dožije věku k, tj. pravděpodobnost, že jedinec, který byl v čase $t-k$ novorozencem, žije v čase t,

$$q_k=\frac{x_k(t)}{n(t-k)}. \tag{6.31}$$

Položme ještě $q_0=1$. Z rovností (6.30), (6.31), (6.27) a (6.23) vyjádříme

$$\begin{aligned} z_k(t)&=x_k(t)-x_{k+1}(t+1)=q_kn(t-k)-q_{k+1}n\big(t+1-(k+1)\big)=\\ &=q_kmx(t-k)-q_{k+1}mx(t-k)=(q_k-q_{k+1})mr^tx(0)\frac{1}{r^k}=(q_k-q_{k+1})\frac{n(t)}{r^k}. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme rekurentní formuli pro výpočet pravděpodobností q_k dožití věku k při známých počtech úmrtí ve věku k, počtu novorozenců $n(t)$ a růstovém koeficientu r:

$$q_{k+1}=q_k-\frac{r^kz_k(t)}{n(t)}, \quad q_0=1.$$

Z ní také plyne, že

$$1=q_0\geq q_1\geq q_2\geq\cdots\geq q_{\omega-1}\geq q_\omega. \tag{6.32}$$

Tyto nerovnosti vyjadřují samozřejmou skutečnost, že jedinec, který se dožil věku $k+1$, se určitě dožil také věku k.

Z rovností (6.23), (6.30), (6.31), (6.27) a (6.32) dostaneme

$$\begin{aligned} r^tx(0)=x(t)=n(t)+\sum_{i=1}^{\omega}x_i(t)&=n(t)+\sum_{i=1}^{\omega}q_in(t-i)=mx(t)+\sum_{i=1}^{\omega}q_imx(t-i)=\\ &=m\left(r^tx(0)+\sum_{i=1}^{\omega}q_ir^{t-i}x(0)\right)=mr^tx(0)\left(1+\sum_{i=1}^{\omega}\frac{q_i}{r^i}\right). \end{aligned}$$

Z této rovnosti plyne *Eulerova rovnice*

$$1=m\left(1+\sum_{i=1}^{\omega}\frac{q_i}{r^i}\right), \tag{6.33}$$

kterou lze považovat mj. za rovnici pro výpočet růstového koeficientu r ze znalosti pravděpodobností $q_1,q_2,\ldots,q_\omega$ a podílu novorozenců v populaci.

Do Eulerovy rovnice (6.33) dosadíme parametr m vypočítaný z rovnosti (6.29),

$$1+\sum_{i=1}^{\omega}\frac{q_i}{r^i}=\frac{\dfrac{z(t)}{n(t)}-r}{1-r}$$

a tím odvodíme vztah

$$\sum_{i=1}^{\omega} \frac{q_i}{r^i} = \frac{\dfrac{z(t)}{n(t)} - 1}{1 - r}. \tag{6.34}$$

Z Eulerovy rovnice (6.33) a rovnosti (6.27) dostaneme

$$x(t) = n(t)\left(1 + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{q_i}{r^i}\right). \tag{6.35}$$

Relace (6.34) a (6.35) lze považovat za rovnice pro výpočet růstového koeficientu r při známých pravděpodobnostech dožití $q_1, q_2, \dots, q_\omega$, počtu novorozenců $n(t)$ a k tomu velikosti populace $x(t)$ nebo počtu úmrtí $z(t)$.

Podle rovností (6.31), (6.27) a (6.23) platí

$$x_k(t) = q_k n(t-k) = q_k m x(t-k) = q_k m r^{t-k} x(0) = m x(t) \frac{q_k}{r^k},$$

takže podle Eulerovy rovnice (6.33) je podíl jedinců věku k v populaci roven

$$\frac{x_k(t)}{x(t)} = m\frac{q_k}{r^k} = \frac{\dfrac{q_k}{r^k}}{1 + \sum\limits_{i=1}^{\omega} \dfrac{q_i}{r^i}}, \tag{6.36}$$

jmenovatel posledního zlomku nezávisí na věku k. To znamená, že v populaci, jejíž velikost se vyvíjí podle rovnice (6.21), je stálé zastoupení jednotlivých věkových tříd, populace má *věkově stabilizovanou strukturu.* Označíme-li

$$x_0(t) = n(t) \tag{6.37}$$

vidíme porovnáním s Eulerovou rovnicí (6.33), že rovnost (6.36) platí také pro $k = 0$.

Podle nerovností (6.32) pro $r \geq 1$ platí

$$1 = \frac{q_0}{r^0} \geq \frac{q_1}{r^1} \geq \frac{q_2}{r^2} \geq \frac{q_3}{r^3} \geq \cdots \geq \frac{q_\omega}{r^\omega}.$$

Odtud, z rovnosti (6.36) a z Tvrzení 20 dostáváme:

Tvrzení 21. Nechť se velikost populace vyvíjí podle modelu (6.21). Pokud populace nevymírá ($r \geq 1$), pak třída novorozenců $n(t)$ je v populaci zastoupena nejpočetněji ze všech věkových tříd. Pokud třída novorozenců není zastoupena nejpočetněji, pak populace vymírá ($r < 1$).

Podle třetí z rovností (6.30) a rovností (6.21), (6.36) platí

$$1 - \frac{z_k(t)}{x_k(t)} = \frac{x_k(t) - \big(x_k(t) = x_{k+1}(t+1)\big)}{x_k(t)} = \frac{x_{k+1}(t+1)}{x_k(t)} =$$
$$= \frac{x_{k+1}(t+1)}{x(t+1)} \frac{r x(t)}{x_k(t)} = \frac{q_{k+1}}{r^{k+1}} \frac{r r^k}{q_k} = \frac{q_{k+1}}{q_k}.$$

Výraz nalevo vyjadřuje klasickou pravděpodobnost, že jedinec, který měl v čase t věk k neuhyne během časového intervalu $(t, t+1]$. Výraz napravo vyjadřuje podmíněnou pravděpodobnost, že se jedinec dožije věku $k+1$ za podmínky, že se dožil věku k. Rovnost tedy není nijak překvapivá, ukazuje však, že dosud odvozené závěry z modelu neodporují realitě. Zmíněnou pravděpodobnost, tj. pravděpodobnost, že jedinec věku k přežije časový interval jednotkové délky, označíme symbolem p_k, tedy

$$p_k = \frac{q_{k+1}}{q_k} = 1 - \frac{z_k(t)}{x_k(t)} = \frac{x_{k+1}(t+1)}{x_k(t)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \omega - 1. \tag{6.38}$$

Pokud známe pravděpodobnosti přežití p_k, můžeme vypočítat pravděpodobnosti q_k dožití věku k podle rekurentní formule

$$q_{k+1} = p_k q_k, \quad q_0 = 1.$$

Tuto formuli lze považovat za lineární homogenní diferenční rovnici a tedy

$$q_k = \prod_{i=0}^{k-1} p_i.$$

Tento výsledek říká, že přežití každého z intervalů $(t+i, t+i+1]$, $i = 0, 1, \dots, k$ jedincem, který byl v čase t novorozený, jsou stochasticky nezávislé jevy.

Třetí vyjádření pravděpodobností p_k v rovnostech (6.38) můžeme také zapsat jako diferenční rovnice pro množství jedinců věku k:

$$x_{k+1}(t+1) = p_k x_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \omega - 1. \tag{6.39}$$

K tomuto systému diferenčních rovnic přidáme ještě rovnici pro množství novorozenců, tj. pro složku $x_0(t) = n(t)$. Z předpokladu (i) dostaneme

$$x_0(t+1) = n(t+1) = y(t) = bx(t), \tag{6.40}$$

takže s využitím druhé z rovností (6.30) je

$$x_0(t+1) = b \sum_{i=0}^{\omega} x_i(t). \tag{6.41}$$

Aby se velikost populace vyvíjela podle rovnice (6.21), musí být počáteční podmínky systému rovnice (6.41), (6.39) podle rovností (6.36) ve tvaru

$$x_0(0) = mx(0), \qquad x_k(0) = \frac{q_k}{r^k} \frac{x(0)}{1 + \sum\limits_{i=1}^{\omega} \dfrac{q_i}{r^i}}, \quad k = 1, 2, \dots, \omega. \tag{6.42}$$

Předpokládejme navíc, že jsme schopni rozlišit věk jedinců, kteří ve zvoleném časovém období „dali vznik novým jedincům“. V matrice obyvatelstva by například mohly být záznamy o věku matky. Budeme předpokládat v analogii k předpokladu (i), že množství „nově vzniklých“ jedinců, kteří jsou potomky jsou potomky jedinců věku k, je úměrné množství jedinců tohoto věku. Navíc jedinci z žádné věkové třídy nemohou „vyprodukovat“ méně než žádného jedince. Předpokládáme tedy

(iii) $y_k(t) = b_k x_k(t)$, $b_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots, \omega$, $\sum\limits_{i=0}^{\omega} b_i > 0$.

Proměnné y a y_k, $k = 0, 1, \dots, \omega$ jsou samozřejmě vázány rovností

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\omega} y_i(t) \tag{6.43}$$

pro všechna $t \in \mathbb{N}$. Parametry b_k, $k = 0, 1, 2, \dots, \omega$ nazýváme *věkově specifické koeficienty porodnosti* nebo *míra reprodukce ve věku* k. Jedinci bývají plodní až od jistého minimálního věku, řekněme $\alpha > 0$ (menarche), poté plodnost až do jistého věku roste, v nějakém věku plné dospělosti, řekněme $\beta > \alpha$, dosáhne svého maxima, od tohoto věku již neroste nebo dokonce klesá a v nějakém věku γ (menopauza), $\beta \leq \gamma \leq \omega$, může vymizet. Pro věkově specifické plodnosti tedy může platit

$$0 = b_0 = \cdots = b_{\alpha-1} < b_\alpha \leq b_{\alpha+1} \leq \cdots b_{\beta-1} \leq b_\beta \geq b_{\beta+1} \geq \cdots \geq b_{\gamma-1} \geq b_\gamma = 0;$$

nerovnosti mezi věkově specifickými koeficienty porodnosti nejsou z hlediska matematického modelu důležité, mohou mít význam pouze při jeho interpretacích.

Z předpokladů (i), (iii) a rovnosti (6.36) dostaneme

$$bx(t) = y(t) = \sum_{i=0}^{\omega} y_i(t) = \sum_{i=0}^{\omega} b_i x_i(t) = m \sum_{i=0}^{\omega} b_i \frac{q_i}{r^i} x(t).$$

Odtud a z vyjádření (6.25) plyne

$$r = \frac{b}{m} = \sum_{i=0}^{\omega} b_i \frac{q_i}{r^i}.$$

Růstový koeficient r je tedy řešením rovnice

$$\sum_{i=0}^{\omega} b_i q_i r^{-1-i} = 1. \tag{6.44}$$

Poněvadž se velikost populace vyvíjí podle diferenční rovnice (6.21), musí mít rovnice (6.44) kladné řešení. To znamená, že

$$\text{existuje } k \in \{0, 1, 2, \dots, \omega\} \text{ že } b_k q_k > 0; \tag{6.45}$$

v opačném případě by totiž levá strana rovnice (6.44) byla nulová pro každé $r > 0$. Označme nyní $f(r)$ levou stranu rovnice (6.44). Z podmínky (6.45) plyne, že platí

$$\lim_{r \to 0+} f(r) = \infty, \quad \lim_{r \to \infty} f(r) = 0, \quad f'(r) = -\sum_{i=0}^{\omega} (i+1) b_i q_i r^{-2-i} < 0 \text{ pro } r > 0.$$

Funkce f je tedy na intervalu $(0, \infty)$ ryze klesající, klesá od nekonečna k nule. To znamená, že rovnice (6.44) má řešení jediné. Pokud $f(1) > 1$, je toto řešení větší než 1, pokud $f(1) < 1$, je toto řešení menší než 1. Z tohoto pozorování a z tvrzení 20 plyne

Tvrzení 22. Nechť se velikost populace $x(t)$ vyvíjí podle modelu (6.21), tj. jsou splněny relace (6.19),(6.24), (6.30), (6.31) a předpoklady (i), (ii). Nechť navíc platí předpoklad (iii) a jsou splněny podmínky (6.43) a (6.45). Pak

- je-li $\sum\limits_{i=0}^{\omega} b_i q_i > 1$, pak populace neomezeně roste;
- je-li $\sum\limits_{i=0}^{\omega} b_i q_i = 1$, pak velikost populace je v průběhu času konstantní;
- je-li $\sum\limits_{i=0}^{\omega} b_i q_i < 1$, pak populace vymírá.

6.2 Problém extinkce

Do druhého vydání svého Eseje o principech populace v roce 1803 přidal Thomas Malthus kapitolu o populaci Švýcarska, ve které upozornil na skutečnost, že

> v Bernu přijala městská rada v letech 1583 až 1654 mezi měšťany 487 rodin, z nichž 379 během dvou století vymřelo a v roce 1783 jich zůstávalo pouze 108.

Navzdory tomu, že velikost populace roste exponenciálně, velké množství rodin vymírá. V průběhu devatenáctého století byla zaznamenána také vymírání rodin, u kterých jsou k dispozici spolehlivé genealogické záznamy, tedy u příslušníků šlechty nebo vyšší buržoasie. Tento jev býval interpretován jako příznak degenerace horních vrstev. Vysvětlit ho bez ideologické zaujatosti se pokusil úředník francouzského ministerstva financí Irenée Jules Bienaymé (1796–1878), který roku 1845 publikoval práci o trvání šlechtických rodin ve Francii nazvanou *De la loi de multiplication et de la durée des familles.*

Bienaymé pro zjednodušení předpokládal, že všichni muži mají stejnou pravděpodobnost, že budou mít $0, 1, 2, 3, \ldots, N$ synů, kteří se dožijí dospělosti. Pokud je průměrný počet synů menší než 1, je jasné, že nositelé rodového jména vymřou. Ovšem stejný závěr platí, pokud je průměrný počet synů 1; např. je-li stejná pravděpodobnost $\frac{1}{2}$ toho, že muž nebude mít syna, nebo že bude mít dva syny. Bienaymé vypočítal, že v takovém případě je pravděpodobnost trvání rodu po více než 35 generací menší než 0,05. Pokud se tedy během staletí vystřídají zhruba tři generace, je téměř jisté, že rod za jedenáct až dvanáct století vymře.

Na Bienaymého práci navázal jeho přítel, matematik a ekonom Antoine Augustin Cournot (1801–1877) v knize *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie* z roku 1847. Za dosti obecných předpokladů (libovolný muž může mít nejvýše N synů, kteří se dožijí dospělosti, přičemž pravděpodobnost, že bude mít právě k synů je rovna p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$) ukázal, že problém hledání pravděpodobnosti vyhynutí rodu lze převést na řešení algebraických rovnic.

Stejným problémem se zabýval bratranec Charlese Darwina Francis Galton (1822–1911). V časopise *Educational Times* předložil čtenářům problém:

> Velký národ, v němž budeme uvažovat pouze dospělé muže, kterých je celkem N, kolonizuje nějakou oblast. Vývoj jejich populace se řídí zákonem, že v každé populaci nemá a_0 procent mužů žádné mužské potomky, kteří by se dožili dospělosti; a_1 procent mužů má jednoho takového mužského potomka; a_2 procent jich má 2; a tak dále až do a_5 procent mužů, kteří jich mají 5.

> Najděte (1) jaký podíl příjmení po r generacích vymře a (2) a kolik příjmení bude nosit m osob.

Na první otázku již dříve odpověděli Bienaymé a Cournot. Galton však jejich řešení neznal, od čtenářů uspokojivé řešení nedostal a sám na ně asi přijít nemohl. Proto se obrátil na svého přítele, matematika Henryho Williama Watsona (1827–1903), aby se ho pokusil vyřešit. V roce 1875 publikovali Galton s Watsonem článek *On the probability of extinction of families*[4], v němž k řešení prvního problému nezávisle zopakovali Cournotovy úvahy a ukázali (chybně, viz příklad 2 v 6.2.1), že každá rodina jistě vymře.

Tentýž problém, ale interpretovaný jako hledání pravděpodobnosti, že v populaci přežije zmutovaný gen, řešil Ronald Aymler Fisher (1890–1962). Fisher[5] zopakoval Galtonovo-Watsonovo řešení, jejich původní článek ovšem necitoval. Přitom předpokládal, že pravděpodobnost, že v následující generaci bude k kopií mutovaného genu, má binomické rozdělení. Na Fisherovu práci navázal John Burdon Sanderson Haldane (1892–1964). V letech 1924 až 1934 napsal sérii deseti článků souhrnně nazvaných Matematická teorie přirozeného a umělého výběru. V pátém z nich[6] zobecnil Fisherův postup pro libovolné rozdělení pravděpodobností p_k.

Obecné řešení problému extinkce rodinných jmen (nebo přežívání zmutovaného genu) spolu s výpočtem očekávaného počtu potomků nějakého jedince (nositelů mutovaného genu) v libovolné generaci později publikoval Johan Frederick Steffenson[7]. Uvažovaný proces nyní bývá nazýván *Galtonův-Watsonův.* Představuje východisko k teoretickému popisu vymírání v evoluční teorii[8].

V následujícím textu v podstatě zreprodukujeme Steffensonovy myšlenky. Nejprve v 6.2.1 ukážeme, že pravděpodobnost vymizení rodové linie v některé z po sobě následujících generací je řešením jisté nelineární autonomní diferenční rovnice. Najdeme její rovnovážný bod a vyšetříme jeho stabilitu. V další části 6.2.2 najdeme střední hodnotu a rozptyl počtu potomků nějakého jedince. Výsledkem je, že střední hodnota počtu potomků se vyvíjí podle Malthusovského deterministického modelu, tj. vytváří geometrickou posloupnost, a přitom i v případě růstového koeficientu většího než 1 je pravděpodobnost jejich vyhynutí nenulová.

6.2.1 Mizení rodové linie

Uvažujme populaci s nepřekrývajícími se generacemi. Její vývoj si budeme představovat tak, že každá generace žije jedno časové období a „vyprodukuje“ generaci *bezprostředních potomků.* Všechny jedince budeme považovat za identické. Zejména to znamená, že počet bezprostředních potomků nějakého jedince nezávisí na tom, zda tento jedinec měl či neměl nějaké sourozence a kolik jich bylo. Potomky jednoho jedince (kterému budeme říkat „zakladatel rodu“) všech generací nazveme *rodová linie;* sám „zakladatel rodu“ do rodové linie samozřejmě patří.

Zavedeme náhodnou veličinu K vyjadřující počet bezprostředních potomků jedince; jedná se o veličinu diskrétní. Označme p_k pravděpodobnost, že jedinec má právě k bezprostředních

[4] H. W. Watson and F. Galton, On the probability of extinction of families. *J. Anthropol. Inst.*, **4**:138–144, 1875

[5] R. A. Fisher, On the dominance ratio. *Proc. R. Soc. Edinb.*, **42**:321–341, 1922

[6] J. B. S. Haldane, A mathematical theory of natural and artificial selection. Part V. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **23**: 838–844, 1927

[7] J. F. Steffensen, Deux problèmes du calcul des probabilités. *Ann. Inst. Henri. Poincaré*, **3**:319–344, 1933

[8] Viz např. P. Jagers, Extinction, Persistence, and Evolution. In F. A. C. C. Chalub, J. F. Rodrigues (eds.), *The Mathematics of Darwin's Legacy.* Birkhäuser, 2011

potomků; p_k tedy představují hodnoty pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny K. Tyto hodnoty splňují nerovnosti $0 \leq p_k \leq 1$ pro všechna $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ a platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \tag{6.46}$$

Dále budeme předpokládat, že bezprostřední vyhynutí linie je možné, ale není jisté, tedy že

$$0 < p_0 < 1.$$

Očekávaný počet R_0 bezprostředních potomků jedince, tedy střední hodnota náhodné veličiny K, je dána součtem

$$R_0 = \mathrm{E}\, K = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k. \tag{6.47}$$

Označme $x(t)$ pravděpodobnost, že rodová linie vymře nejpozději v čase t, tj. nejpozději v t-té generaci. Za nultou generaci budeme považovat „zakladatele rodu“. Ten samozřejmě žil, takže jeho linie v nulté generaci nevymřela, tj.

$$x(0) = 0. \tag{6.48}$$

Extinkce potomků v první generaci znamená, že jedinec nemá žádné bezprostřední potomky, tj. $x(1) = p_0$. Pravděpodobnost, že linie vymře do druhé generace, je pravděpodobnost vzájemně neslučitelných jevů, že jedinec nemá bezprostředního potomka, nebo že jedinec má jednoho bezprostředního potomka, který bezprostřední potomky již nemá, nebo že jedinec má dva bezprostřední potomky a z nich každý zemře bez bezprostředních potomků, atd. Tedy

$$x(2) = p_0 + p_1 p_0 + p_2 p_0^2 + p_3 p_0^2 + \cdots = p_0 + p_1 x(1) + p_2 x(1)^2 + p_3 x(1)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x(1)^k.$$

Podobně

$$x(3) = p_0 + p_1 x(2) + p_2 x(2)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x(2)^k$$

a obecně

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x(t-1)^k. \tag{6.49}$$

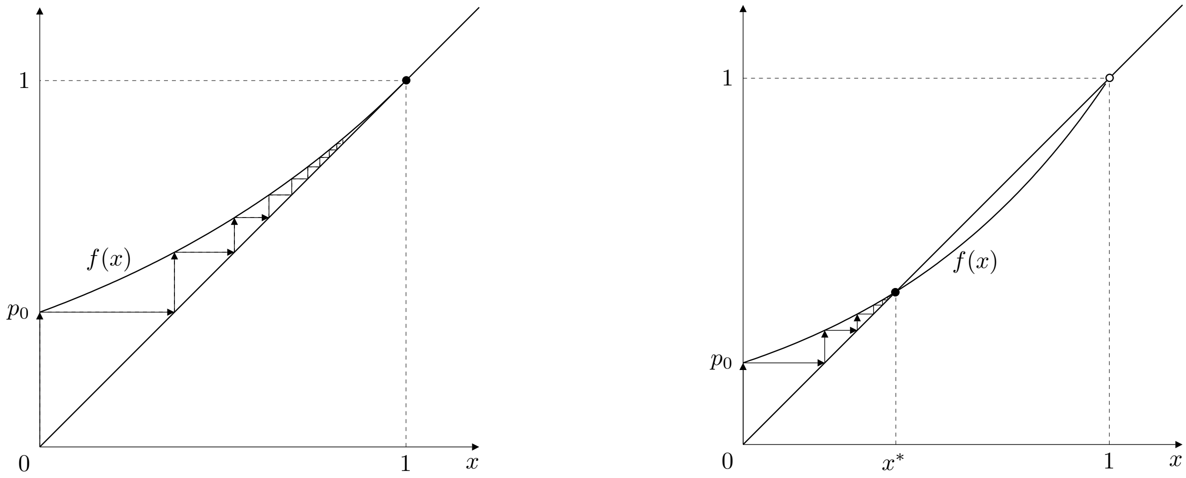
Nyní zavedeme reálnou funkci f jako součet mocninné řady[9]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k. \tag{6.50}$$

Podle podmínky (6.46) je poloměr konvergence této řady alespoň 1 a platí

$$f(1) = 1. \tag{6.51}$$

[9] Funkce f je vytvořující funkcí diskrétní náhodné veličiny K. Některé z následujících odvozovaných výsledků jsou speciálními případy obecné teorie vytvořujících funkcí.



Obrázek 6.3: Graficé řešení počáteční úlohy (6.53), (6.48) v případě $f'(1) \leq 1$ (vlevo) a $f'(1) > 1$ (vpravo).

Dále $f(0) = p_0 \in (0,1)$ a

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k x^{k-1}, \qquad f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k x^{k-2}. \tag{6.52}$$

Odtud plyne, že pro $x \in [0,1]$ je $f' \geq 0$ a $f'' \geq 0$, což znamená, že funkce f je neklesající a konvexní na intervalu $[0,1]$.

Pravděpodobnost vymření linie nejpozději v t-té generaci je podle vyjádření (6.49) řešením nelineární autonomní rekurentní formule prvního řádu

$$x(t+1) = f\big(x(t)\big) \tag{6.53}$$

s počáteční podmínkou (6.48). Poněvadž již známe průběh funkce f, můžeme kvalitativní vlastnosti řešení úlohy (6.53), (6.48) vyšetřit graficky. Mohou nastat dva případy, viz obr. 6.3.

Pokud $f'(1) \leq 1$, pak graf funkce f na intervalu $(0,1)$ leží nad osou prvního kvadrantu. To znamená, že rovnice (6.53) má jediné rovnovážné řešení $x \equiv 1$, který je asymptoticky stabilní. Pro řešení x úlohy (6.53), (6.48) pak platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1.$$

Tedy pravděpodobnost, že linie někdy v budoucnu vymře, se blíží jistotě.

Pokud $f'(1) < 1$, pak má graf funkce f uvnitř intervalu $(0,1)$ jeden průsečík s osou prvního kvadrantu. Existuje tedy hodnota $x^* \in (p_0, 1)$, která je asymptoticky stabilním rovnovážným bodem rovnice (6.53). Pro řešení x úlohy (6.53), (6.48) platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*.$$

To znamená, že pravděpodobnost vymření linie dosáhne nějaké nenulové hodnoty.

Porovnáním první rovnosti v (6.52) s formulí (6.47) vidíme, že

$$R_0 = f'(1). \tag{6.54}$$

Dosažený výsledek tedy můžeme interpretovat následujícím způsobem. Pokud střední hodnota počtu bezprostředních potomků jedince nepřesáhne 1, pak rodová linie jistě vymře; to byl očekávatelný výsledek. Ale i v případě, že střední počet bezprostředních potomků každého jedince je větší než 1, existuje nenulová pravděpodobnost, že rodová linie z populace vymizí.

Příklad 1. Uvažujme hypotetické buňky, které se řídí následujícím pravidlem: za časovou jednotku buňka buď uhyne, nebo se rozdělí na dvě identické; pravděpodobnost obou těchto jevů je stejná. Do živného roztoku na počátku vložíme jednu takovou buňku. Určete pravděpodobnost, že kolonie buněk vzniklých tímto způsobem bude žít ještě v čase $t = 35$.

(Promyslete si, že úloha je ekvivalentní s úlohou o přežívání rodiny, v níž se se dospělosti dožijí buď dva synové anebo žádný, přičemž každá z těchto možností nastane s pravděpodobností $\frac{1}{2}$; to je úloha, kterou v první polovině 19. století řešil I. J. Bienaymé.)

V tomto případě je $p_0 = p_2 = \frac{1}{2}$, $p_1 = p_3 = p_4 = \cdots = 0$. Funkce f definovaná rovností (6.50) má tvar

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2.$$

Pravděpodobnost $x(t)$, že kolonie buněk vyhyne nejpozději v čase t je řešením počáteční úlohy (6.53), (6.48), tedy v našem případě

$$x(t+1) = \frac{1 + x(t)^2}{2}, \quad x(0) = 0. \tag{6.55}$$

S pomocí libovolného software, úplně stačí nějaký tabulkový procesor, můžeme vypočítat $x(35) \doteq 0{,}950563$. Hledaná pravděpodobnost, že kolonie v čase $t = 35$ ještě žije, je rovna

$$P = 1 - x(35) \doteq 0{,}049437.$$

Dále, střední hodnota náhodné veličiny K vyjadřující počet potomků jedné buňky je

$$R_0 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

což souhlasí s vyjádřením $R_0 = f'(1) = 1$ podle (6.54). Posloupnost x definovaná rekurentně vztahy (6.55) má tedy limitu

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 1.$$

V průběhu výpočtu jsme si mohli všimnout, že konvergence posloupnosti je velice pomalá a ze znalosti prvních 35 členů nelze na první pohled určit, zda posloupnost konverguje; a pokud ano, tak k jaké hodnotě. ■

Příklad 2. Uvažujme rostlinu, která vyprodukuje N semen a každé z nich má pravděpodobnost $q > 0$, že z něj vyroste nová rostlina. Určete pravděpodobnost, že potomci jedné rostliny z populace vymizí.

Pravděpodobnost p_k, že rostlina bude mít k potomků, je pravděpodobnostní funkcí binomického rozdělení,

$$p_k = \binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k}.$$

Funkce f definovaná mocninnou řadou (6.50) má tvar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k} x^k = \big(qx + (1-q)\big)^N = \big(1 + (x-1)q\big)^N,$$

takže $f'(x) = Nq\big(1+(x-1)q\big)^{N-1}$ a $f'(1) = Nq$. Pokud tedy $Nq \leq 1$, pak potomci rostliny z populace jistě vymizí; pochopitelně, v takovém případě je totiž střední počet potomků jedné rostliny menší než 1.

Nechť $Nq > 1$. Pak pravděpodobnost $x(t)$, že potomci rostliny vymizí nejpozději v t-té generaci je podle (6.53) a (6.48) řešením počáteční úlohy

$$x(t+1) = \Big(1 + \big(x(t) - 1\big)q\Big)^N, \qquad x(0) = 0. \tag{6.56}$$

Spočítejme například prvních deset členů této posloupnosti pro $N = 5$ a $q = \frac{1}{4}$:

$$\begin{array}{lllll} x(1) \doteq 0{,}237, & x(2) \doteq 0{,}347, & x(3) \doteq 0{,}410, & x(4) \doteq 0{,}450, & x(5) \doteq 0{,}478, \\ x(6) \doteq 0{,}497, & x(7) \doteq 0{,}511, & x(8) \doteq 0{,}521, & x(9) \doteq 0{,}528, & x(10) \doteq 0{,}534. \end{array}$$

Tento výpočet uvedli Galton a Watson v článku zmíněném na str. 150 a chybně z něho usoudili, že posloupnost x pomalu konverguje k 1. Uvažovaná diferenční rovnice má však kromě rovnovážného bodu 1 také rovnovážný bod x^* mezi 0 a 1, který je řešením algebraické rovnice

$$\big(1 + (x-1)\big)^N = x$$

a k němuž konverguje řešení úlohy (6.56); pro hodnoty $N = 5$ a $q = \frac{1}{4}$ je $x \doteq 0{,}553$. ■

6.2.2 Vývoj velikosti rodové linie

Zavedeme náhodnou funkci N tak, že diskrétní náhodná veličina $N(t)$ vyjadřuje velikost rodové linie v t-té generaci. Bude nás zajímat očekávaný počet $y(t)$ příslušníků rodové linie v t-té generaci,

$$y(t) = \mathrm{E}\, N(t). \tag{6.57}$$

Označme $q_{k,t}$ pravděpodobnost, že rodová linie má v t-té generaci právě k příslušníků,

$$q_{k,t} = \mathrm{P}\big(N(t) = k\big). \tag{6.58}$$

Zejména tedy $q_{k,1}$ vyjadřuje pravděpodobnost, že jedinec má právě k bezprostředních potomků,

$$q_{k,1} = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6.59}$$

Hodnoty $q_{k,n}$ jakožto pravděpodobnosti splňují pro libovolné $t \in \mathbb{N}$ vztahy

$$0 \leq q_{k,t} \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q_{k,t} = 1. \tag{6.60}$$

Pro $t \in \mathbb{N}$, $t > 0$ definujeme funkci g_t jako součet nekonečné řady

$$g_t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{k,t} x^k. \tag{6.61}$$

Poloměr konvergence této řady je podle (6.60) roven alespoň 1. Pro funkce g_t podle (6.59) a (6.50) platí

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{k,1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = f(x), \tag{6.62}$$

Dále derivováním definiční rovnosti (6.61) podle x dostaneme

$$g_t'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k q_{k,t} x^{k-1},$$

takže podle (6.58) a (6.57) je

$$g_t'(1) = \mathrm{E}\, N(t) = y(t). \tag{6.63}$$

O počtech bezprostředních potomků různých jedinců předpokládáme, že jsou stochasticky nezávislé. Pravděpodobnost, že dva jedinci budou mít celkem k bezprostředních potomků, je tedy dána součtem součinů

$$\sum_{i=0}^{k} q_{i,1} q_{k-i,1} = \sum_{i=0}^{k} p_i p_{k-i} = \sum_{i_1+i_2=k} p_{i_1} p_{i_2}$$

a obecně pravděpodobnost, že l jedinců bude mít dohromady k bezprostředních potomků, je dána součtem

$$\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_l=k} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_l}.$$

Předpoklad o nezávislosti počtu bezprostředních potomků nějakého jedince a počtu jeho sourozenců vyjádříme nyní tak, že pravděpodobnost jevu, že rodová linie v $(t-1)$-ní generaci má velikost právě l jedinců a ti mají dohromady k bezprostředních potomků, je dána součinem

$$\mathrm{P}\big(N(t-1) = l, N(t) = k\big) = q_{l,t-1} \sum_{i_1+\cdots+i_l=k} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_l}.$$

Pravděpodobnost $q_{k,t}$, že jedinec má v t-té generaci právě $k > 0$ potomků, je pravděpodobností jevu, že jedinec má v $(t-1)$-ní generaci právě jednoho potomka a ten má právě k bezprostředních potomků, nebo jedinec má v $(t-1)$-ní generaci právě dva potomky, kteří mají celkem k bezprostředních potomků, atd. Popsané jevy jsou zřejmě neslučitelné, takže

$$q_{k,t} = \sum_{l=1}^{\infty} q_{l,t-1} \sum_{i_1+\cdots+i_l=k} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_l} \quad \text{pro } k > 0. \tag{6.64}$$

Jev, že jedinec nemá v t-té generaci potomky, je totožný s jevem, že jedinec nemá v $(t-1)$-ní generaci potomka, nebo má v $(t-1)$-ní generaci jednoho potomka, který nemá žádného bezprostředního potomka, nebo jedinec má v $(t-1)$-ní generaci právě dva potomky, z nichž žádný nemá bezprostředního potomka, nebo .... Z této úvahy dostáváme

$$q_{0,t} = q_{0,t-1} + q_{1,t-1} p_0 + q_{2,t-1} p_0^2 + \cdots = \sum_{l=0}^{\infty} q_{l,t-1} p_0^l. \tag{6.65}$$

S využitím vztahů (6.64), (6.65) a definice (Cauchyova) součinu mocninných řad dostaneme

$$
\begin{aligned}
g_t(x) = q_{0,t} + \sum_{k=1}^{\infty} q_{k,t}x^k = \sum_{l=0}^{\infty} q_{l,t-1}p_0^l + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} q_{l,t-1} \sum_{i_1+\cdots+i_l=k} p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_l}\right)x^k = \\
= q_{0,t-1} + \sum_{l=1}^{\infty} q_{l,t-1} \sum_{i_1+\cdots+i_l=0} p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_l} + \sum_{l=1}^{\infty} q_{l,t-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1+\cdots+i_l=k} p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_l}x^k = \\
= q_{0,t-1} + \sum_{l=1}^{\infty} q_{l,t-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1+\cdots+i_l=k} p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_l}x^k = \\
= q_{0,t-1} + \sum_{k=1}^{\infty} q_{k,t-1}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i_1+\cdots+i_k=l} p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}x^l\right) = \\
= q_{0,t-1} + \sum_{k=1}^{\infty} q_{k,t-1}\big(f(x)\big)^k = \sum_{k=0}^{\infty} q_{k,t-1}\big(f(x)\big)^k = g_{t-1}\big(f(x)\big).
\end{aligned}
$$

Odtud a z (6.62) dostáváme, že hodnoty funkcí g_t můžeme počítat rekurentně ze vztahů

$$g_t(x) = g_{t-1}\big(f(x)\big), \qquad g_1(x) = f(x).$$

Derivováním uvedené rekurentní formule podle x obdržíme

$$g_t'(x) = g_{t-1}'\big(f(x)\big)f'(x). \tag{6.66}$$

Dosazením $x = 1$ a porovnáním tohoto vztahu s (6.63), (6.51) a (6.54) vidíme, že

$$y(t) = R_0 y(t-1).$$

Očekávaný počet příslušníků rodové linie v t-té generaci je tedy řešením počáteční úlohy

$$y(t+1) = R_0 y(t), \quad y(0) = 1,$$

neboť zakladatel rodové linie je jistě jeden. Řešením této jednoduché úlohy je geometrická posloupnost

$$y(t) = R_0^t. \tag{6.67}$$

Dostáváme tak výsledek: Pokud je střední počet R_0 potomků jedince větší než 1, pak lze očekávat, že velikost rodové linie bude růst geometricky; přitom ale podle výsledku v 6.2.1 nelze vyloučit, že rodová linie vymře.

Vedle očekávané velikosti rodové linie v t-té generaci, tj. střední hodnoty veličiny $N(t)$, je důležitou charakteristikou také rozptyl velikosti rodové linie, tedy veličina

$$z(t) = \operatorname{var} N(t).$$

Pro její vyšetřování využijeme vlastností vytvořující funkce g_t náhodné veličiny $N(t)$, která je dána rovností (6.61). Platí[10]

$$z(t) = \operatorname{var} N(t) = g_t''(1) + g_t'(1) - \big(g_t'(1)\big)^2 = g_t''(1) + y(t) - y(t)^2 = g_t''(1) + R_0^t - R_0^{2t},$$

[10] Viz např. A. Rényi. *Teorie pravděpodobnosti.* Praha, Academia 1972, str. 126–128.

takže

$$g_t''(1) = z(t) - R_0^t + R_0^{2t}. \tag{6.68}$$

Derivováním formule (6.66) podle x dostaneme

$$g_t''(x) = g_{t-1}''\big(f(x)\big) \cdot \big(f'(x)\big)^2 + g_{t-1}'\big(f(x)\big)f''(x). \tag{6.69}$$

Poněvadž funkce f je vytvořující funkcí náhodné veličiny K, platí pro ni analogie rovnosti (6.68), tj.

$$f''(1) = \operatorname{var} K - f'(1) + \big(f'(1)\big)^2 = \operatorname{var} K - R_0 + R_0^2$$

podle (6.54). Po dosazení do (6.69) dostaneme s využitím (6.51), (6.63) rovnost

$$z(t) - R_0^t + R_0^{2t} = \big(z(t-1) - R_0^{t-1} + R_0^{2t-2}\big)\, R_0^2 + R_0^{t-1}\left(\operatorname{var} K - R_0 + R_0^2\right)$$

a po úpravě

$$z(t) = R_0^2 z(t-1) + R_0^{t-1} \operatorname{var} K.$$

Na počátku je celá rodová linie tvořena pouze „zakladatelem rodu“, tj. náhodná veličina nabývá jediné hodnoty $N(0) = 1$ a proto je její rozptyl nulový,

$$z(0) = \operatorname{var} N(0) = 0.$$

Odtud a z předchozí rovnosti dostáváme, že rozptyl velikosti rodové linie v čase t je řešením počáteční úlohy pro lineární nehomogenní rovnici prvního řádu

$$z(t+1) = R_0^2 z(t) + R_0^{t-1} \operatorname{var} K, \qquad z(0) = 0.$$

Podle věty 16 a jejího důsledku 2 je řešení této úlohy dáno rovností

$$z(t) = \sum_{i=0}^{t-1} \left(R_0^2\right)^{t-i-1} R_0^{i-1} \operatorname{var} K = R_0^{2t-3} \frac{1 - R_0^{-t}}{1 - R_0^{-1}} \operatorname{var} K = R_0^{2t-2} \frac{1 - R_0^{-t}}{R_0 - 1} \operatorname{var} K \tag{6.70}$$

pro $R_0 \neq 1$ a

$$z(t) = t \operatorname{var} K \tag{6.71}$$

pro $R_0 = 1$.

Z tohoto vyjádření plyne, že pro relativní variabilitu velikosti rodové linie, tj. pro podíl její směrodatné odchylky a střední hodnoty, platí

$$\frac{\sqrt{z(t)}}{y(t)} = \begin{cases} \dfrac{1}{R_0}\sqrt{\dfrac{1 - R_0^{-t}}{R_0 - 1} \operatorname{var} K}, & R_0 \neq 1, \\ \sqrt{t \operatorname{var} K}, & R_0 = 1, \end{cases}$$

takže

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{z(t)}}{y(t)} = \begin{cases} \dfrac{1}{R_0}\sqrt{\dfrac{\operatorname{var} K}{R_0 - 1}}, & R_0 > 1, \\ \infty, & R_0 \leq 1. \end{cases}$$

Tento výsledek je jen jinou formulací výsledku již známého. Pokud střední počet R_0 potomků jedince nepřesahuje 1, pak rodová linie v konečném čase jistě vymře. Je-li $R_0 > 1$, tj. pokud očekávaná velikost rodové linie roste jako geometrická posloupnost, je i v dostatečně vzdálené generaci jistá nenulová pravděpodobnost jejího vymření. Tato pravděpodobnost roste s rostoucí variabilitou počtu bezprostředních potomků a klesá s rostoucí rychlostí růstu rodové linie.

Z vyjádření (6.70), (6.71) rozptylu $z(t)$ velikosti $N(t)$ rodové linie v t-té generaci můžeme ještě snadno vypočítat, že

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\operatorname{var} N(t+1)}{\operatorname{var} N(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{z(t+1)}{z(t)} = \begin{cases} R_0^2, & R_0 > 1, \\ R_0, & R_0 \le 1. \end{cases}$$

Pokud tedy rodová linie může dlouhodobě přežívat, pak rozptyl její velikosti asymptoticky roste jako geometrická posloupnost s kvocientem R_0^2. Jinak řečeno, směrodatná odchylka velikosti rodové linie roste stejně rychle jako její střední hodnota.

Příklad 3. Uvažujme rod, v němž každý dospělý muž má s pravděpodobností $p_1 \ge 0$ syna, který se dožije dospělosti, má dva takové syny s pravděpodobností $p_2 > 0$, a s pravděpodobností $p_0 > 0$ se žádný z jeho synů dospělosti nedožije; přitom $p_0 + p_1 + p_2 = 1$. Určete pravděpodobnost, že tento rod dlouhodobě přežívá. Dále vypočítejte očekávaný počet mužských příslušníků tohoto rodu a jeho směrodatnou odchylku.

Střední počet synů, kteří se v takovém rodu dožijí dospělosti, je

$$R_0 = 0p_0 + 1p_1 + 2p_2 = p_1 + 2p_2.$$

Pokud tedy $p_1 + 2p_2 \le 1$, tj. $p_1 + 2p_2 \le p_0 + p_1 + p_2$ neboli $p_2 \le p_0$, pak rod vymře jistě. Nechť nyní $p_2 > p_0$.

Pravděpodobnost $x(t)$, že takový rod vymře nejpozději v t-té generaci, je dána rekurentně rovnostmi (6.53), (6.48). V našem konkrétním případě je $f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$, takže posloupnost x je řešením autonomní diferenční rovnice

$$x(t+1) = p_0 + p_1 x(t) + p_2 x(t)^2.$$

Rovnovážné body x^* této rovnice jsou řešením (algebraické) kvadratické rovnice

$$p_2 x^2 + p_1 x + p_0 = x, \quad \text{tj.} \quad p_2 x^2 + (p_1 - 1)x + p_0 = 0,$$

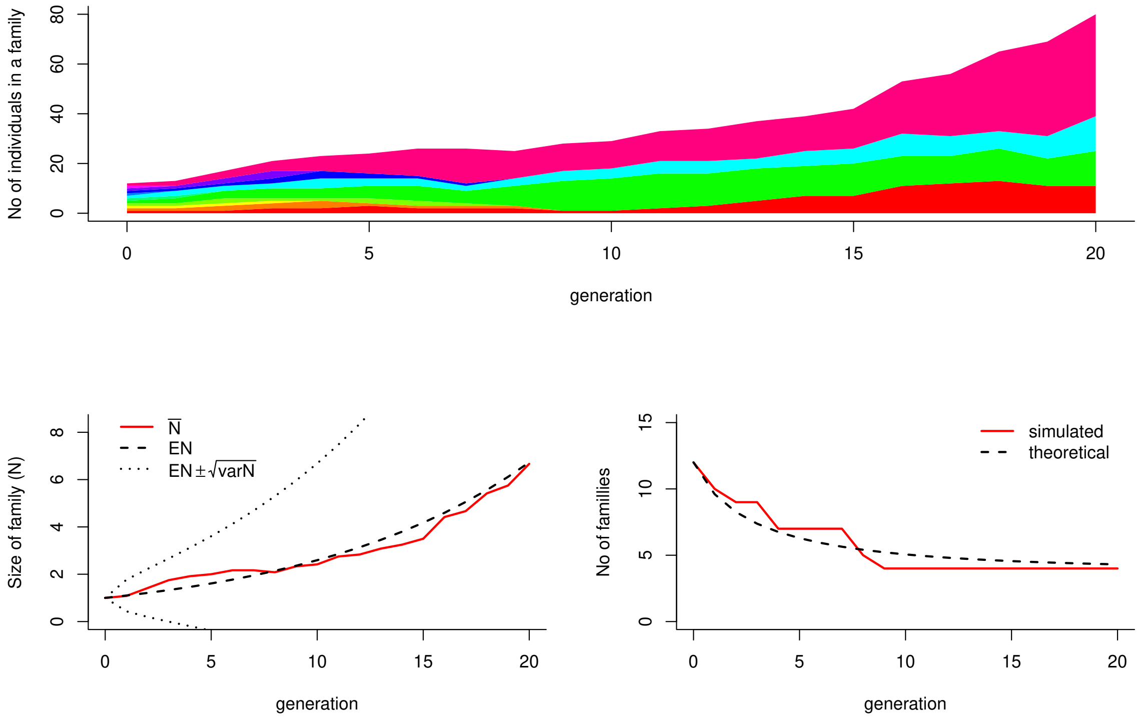
tedy

$$x_{1,2}^* = \frac{1 - p_1 \pm \sqrt{(1-p_1)^2 - 4p_0p_2}}{2p_2} = \frac{p_0 + p_2 \pm \sqrt{p_0^2 - 2p_0p_2 + p_2^2}}{2p_2} =$$
$$= \frac{p_0 + p_2 \pm (p_0 - p_2)}{2p_2} = \begin{cases} p_0/p_2, \\ 1. \end{cases}$$

Podle předpokladu $p_0 < p_2$ odtud plyne, že $\lim_{t\to\infty} x(t) = \dfrac{p_0}{p_2} < 1$.

Celkem můžeme uzavřít, že pravděpodobnost dlouhodobého přežití rodu je rovna

$$\max\left\{1 - \frac{p_0}{p_2}, 0\right\}.$$



Obrázek 6.4: Ilustrace výsledků Příkladu 3. Simulace vývoje dvaceti generací populace, kterou založilo $N(0) = 12$ rodin. Přitom ve všech rodinách jsou stejné pravděpodobnost, že žádný syn se nedožije dospělosti $p_0 = \frac{1}{5}$, že se právě jeden dožije dospělosti $p_1 = \frac{1}{2}$ a že se právě dva synové dožijí dospělosti $p_2 = \frac{3}{10}$. **Nahoře:** Počet mužských příslušníků populace v jednotlivých generacích; každé rodině odpovídá jedna barva. Po dvaceti generacích přežívají čtyři rodiny. **Dole vlevo:** Vývoj velikosti $N(t)$ jedné rodiny. Černá čárkovaná čára vyjadřuje očekávanou velikost rodiny $y(t) = \mathrm{E}\, N(t) = \left(\frac{11}{10}\right)^t$, černá tečkovaná čára vyjadřuje rozpětí směrodatné odchylky velikosti rodiny v jednotlivých generacích kolem její střední hodnoty $y(t) \pm \sqrt{z(t)}$. Červená plná čára je průměr ze simulovaných velikostí rodin. **Dole vpravo:** Počet rodin v populaci v jednotlivých generací. Červená čára je počet simulovaných rodin s nenulovou velikostí (přežívajících), černá čárkovaná čára vyjadřuje teoretický počet $x(t)N(t)$ přežívajících rodin.

Náhodná veličina K vyjadřující počet synů, kteří se dožijí dospělosti, má střední hodnotu

$$\mathrm{E}\,K = R_0 = p_1 + 2p_2 = 1 - p_0 + p_2$$

a rozptyl

$$\operatorname{var} K = \mathrm{E}\,K^2 - (\mathrm{E}\,K)^2 = p_1 + 4p_2 - (1 - p_0 + p_2)^2 = p_0 + p_2 - (p_0 - p_2)^2.$$

Očekávaný počet mužských příslušníků rodu v t-té generaci je tedy podle (6.67) roven

$$y(t) = (1 - p_0 + p_2)^t$$

a jeho směrodatná odchylka je podle (6.70) rovna

$$\sqrt{z(t)} = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - p_0 + p_2}\sqrt{\dfrac{(1 - p_0 + p_2)^{2t} - (1 - p_0 + p_2)^t}{p_2 - p_0}}, & p_2 \neq p_0, \\ \sqrt{2tp_2}, & p_2 = p_0. \end{cases}$$

Volme konkrétně $p_0 = \frac{1}{5}$, $p_1 = \frac{1}{2}$ a $p_3 = \frac{3}{10}$. Pak je střední hodnota počtu potomků $R_0 = \frac{11}{10}$, pravděpodobnost vyhynutí rodové linie $x^* = \frac{2}{3}$ a pravděpodobnost jejího dlouhodobého přežití $1 - x^* = \frac{1}{3}$. Velikost populace tvořená takovými rodovými liniemi tedy bude pomalu růst (jako geometrická posloupnost s kvocientem 1,1) a dlouhodobě v ní bude přežívat asi třetina rodin zakladatelů. Na obr. 6.4 jsou výsledky jedné simulace vývoje populace, kterou založilo 12 rodin; tyto výsledky jsou v dobrém souladu s rozvíjenou teorií.

Ještě si můžeme všimnout, že situace popsaná v příkladu 1 je speciálním případem situace popisované nyní; stačí položit $p_0 = p_2 = \frac{1}{2}$, $p_1 = 0$. ■