MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Bakalářská práce

Brno 2018 **Miloslav Štěpán**

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Homogenní C*-algebry

Bakalářská práce

Miloslav Štěpán

Vedoucí práce: Mgr. David Kruml, Ph.D. **Brno 2018**

Bibliografický záznam

Autor:	Miloslav Štěpán Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Homogenní C*-algebry
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika
Vedoucí práce:	Mgr. David Kruml, Ph.D.
Akademický rok:	2017/2018
Počet stran:	xiii + 34
Klíčová slova:	Operátorová algebra; C*-algebra; Reprezentace; Fibrovaný prostor; Algebraický bandl; Homotopie

Bibliographic Entry

Author:	Miloslav Štěpán Faculty of Science, Masaryk University Department of mathematics and statistics
Title of Thesis:	Homogeneous C*-algebras
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Pure mathematics
Supervisor:	Mgr. David Kruml, Ph.D.
Academic Year:	2017/2018
Number of Pages:	xiii + 34
Keywords:	Operator algebra; C*-algebra; Representation; Fibre bundle; Algebraic bundle; Homotopy

Abstrakt

V práci studujeme n-homogenní C*-algebry — to jsou ty, jejichž každá ireducibilní reprezentace má dimenzi n. Nejprve uvedeme čtenáře do teorií fibrovaných prostorů a C*-algeber, následně se podrobněji zaměříme na to, jak spolu souvisí. Nakonec pomocí homotopií studujeme konkrétní příklady n-homogenních C*-algeber.

Abstract

In this thesis we study n-homogeneous C*-algebras — the ones for which every irreducible representation is n-dimensional. First we introduce the reader to the theory of fibre bundles and C*-algebras, then we study the relationship betweeen them. Finally we use some homotopy theory to study specific examples of n-homogeneous C*-algebras.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2017/2018

Ústav: Ústav matematiky a statistiky

Student: Miloslav Štěpán

Program: Matematika

Obor: Obecná matematika

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce: Homogenní C*-algebry

Název práce anglicky: Homogeneous C*-algebras

Oficiální zadání:
Dle doporučené literatury studujte homogenní C*-algebry a jejich klasifikace pomocí vektorových a algebraických bandlů. Věnujte pozornost netriviálním algebrám, jejich charakteristikám a konstrukcím.

Literatura: P. Niemiec, Elementary approach to homogeneous C*-algebras, arXiv:1203.0857

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: Mgr. David Kruml, Ph.D.

Datum zadání práce: 1. 6. 2017

V Brně dne: 6. 11. 2017

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

Štěpán 21.11.17 — Miloslav Štěpán, **student**

David Kruml — Mgr. David Kruml, Ph.D., **vedoucí práce**

v. z. — prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc., **ředitel Ústavu matematiky a statistiky**

Poděkování

Děkuji svému vedoucímu Mgr. Davidu Krumlovi, Ph.D. za návrh tématu a za cenné připomínky k práci.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 29. května 2018

. . . .

Miloslav Štěpán

Obsah

Úvod

Homogenní C*-algebry představují třídu nejjednodušších C*-algeber. Klasickým výsledkem je, že každé homogenní C*-algebře odpovídá nějaký fibrovaný prostor a dvě homogenní C*-algebry jsou izomorfní právě tehdy, když jsou jejich fibrované prostory slabě ekvivalentní.

Práce je členěna do čtyř kapitol. První dvě sekce první kapitoly slouží jako úvod do teorie fibrovaných prostorů, ve třetí se věnujeme jejímu vztahu s teorií homotopií.

Druhá kapitola má čtyři sekce — první dvě seznámí čtenáře se základními vlastnostmi C*-algeber a jejich reprezentací. V třetí sekci rozvineme poněkud neobvyklý přístup k některým C*-algebrám, který demonstrujeme v poslední sekci, která také slouží jako úvod do teorie homogenních C*-algeber.

Ve třetí kapitole zkoumáme věty popisující vzájemný vztah homogenních C*-algeber a fibrovaných prostorů a v poslední kapitole uvádíme některé příklady týkajícící se sfér a suspenzí topologických prostorů.

Kapitola 1

Fibrované prostory

1.1 Definice a příklady

Koncept fibrovaného prostoru nachází široké uplatnění v matematice i ve fyzice. Jedná se o prostor, který je lokálně homeomorfní součinu topologických prostorů. Tento homeomorfismus je zprostředkován tzv. souřadnými zobrazeními, jejichž vzájemný vztah je popsán jistou grupou homeomorfismů.

My si zavedeme nejprve provizorní definici.

Definice 1. *Bandl* je uspořádaná čtveřice $\gamma = (E, p, X, Y)$ topologických prostorů E, X, které nazýváme *totální prostor* a *báze*, spojitého zobrazení p mezi nimi, kterému říkáme *projekce*, a potom topologického prostoru Y s vlastností, že pro každé $b \in B$ je $p^{-1}(b)$ homeomorfní Y. Množinám $p^{-1}(b)$ říkáme *vlákno* nebo *fíbr*.

Spojité zobrazení $f : B \to E$ nazveme (globálním) *řezem*, pokud $p \circ f = id_X$. Tj. pokud následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "id"'] & & B \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Příklad 1. *Součin topologických prostorů $E \times Y$ je bandl $\gamma = (E \times Y, pr_1, E, Y)$, kde pr_1 je projekce na první složku. Zřejmě je $pr^{-1}(b)$ homeomorfní Y.*

O výše uvedeném bandlu také říkáme, že je *triviální*.

Definice 2. Nechť $\zeta = (E, p, X, Y)$, $\zeta' = (E', p', X', Y)$ jsou bandly. *Homomorfismus bandlů* $h : \zeta \to \zeta'$ je spojité zobrazení $h : E \to E'$, které přenáší každé vlákno $p^{-1}(x), x \in X$ homeomorfně na jiné vlákno $p'^{-1}(x')$ pro nějaké $x' \in X'$. Indukuje tím spojité zobrazení $\overline{h}(x) := x'$, pro které komutuje následující diagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ X \arrow[r, "\overline{h}"'] & X' \end{tikzcd}$$

Tedy platí:

$$p'h = \overline{h}p$$

.

Definice 3. Bandly $\zeta = (E, p, X, Y)$, $\zeta' = (E', p', X, Y)$ jsou *izomorfní*, pokud je zobrazení $\overline{h}$ identitou, tedy pokud komutuje následující diagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

V první provizorní definici jsme zatím nijak nezachytili fakt, že požadujeme, aby byl prostor „lokálně homeomorfní“ součinu topologických prostorů. Konkrétně se jedná o tento požadavek:

Definice 4. Bandl $\zeta = (E, p, X, Y)$ nazveme *lokálně triviálním*, pokud pro každé $x \in X$ existuje jeho okolí U a homeomorfismus ϕ takový, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} V \times Y \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & p^{-1}(V) \arrow[dl, "p"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Pokud je bandl ζ lokálně triviální, množiny U z výše uvedené definice tvoří pokrytí prostoru X, označme toto pokrytí jako $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ pro nějakou indexovou množinu I. Označme ϕ_α příslušnou funkci ϕ z předchozího diagramu pro okolí U_α. Zobrazením ϕ_α říkejme *souřadná zobrazení.*

Nyní si ke konceptu bandlu přidejme výše zmiňovanou grupu:

Definice 5. *Topologická grupa* G je grupa společně s topologií takovou, že operace $(g_1, g_2) \mapsto g_1^{-1}g_2$ je spojité zobrazení z $G \times G$ do G.

Definice 6. Nechť Y je topologický prostor. *Levou akcí* grupy G na Y myslíme spojité zobrazení $\eta : G \times Y \to Y$, pro které platí:

1. $\eta(e, y) = y$, kde e je neutrální prvek grupy G,
2. $\eta(g_1g_2, y) = \eta(g_1, \eta(g_2, y))$ pro všechna $g_1, g_2 \in G$.

Místo $\eta(g, y)$ budeme psát $g \cdot y$.

Definice 7. Levou akci nazveme *efektivní*, pokud $(\forall y \in Y)(g \cdot y = y)$ implikuje $g = e$.

Pokud je akce efektivní, zobrazení tvaru $y \mapsto g \cdot y$ jsou (různé) homeomorfismy pro každé $g \in G$. Grupu G můžeme tedy vložit do grupy všech homeomorfismů na Y.

Definice 8. Nechť $\zeta = (B, p, X, Y)$ je lokálně triviální bandl a nechť G je grupa mající efektivní levou akci na Y.

Definujme si zobrazení:

$$\phi_{j,x}(y) := \phi_j(x, y)$$

a předpokládejme, že navíc platí:

1. Zobrazení $\phi_{j,x}^{-1}\phi_{j,x} : Y \to Y$ je zobrazením $y \mapsto g \cdot y$ pro nějaké g (tedy odpovídá nějakému prvku $g \in G$).
2. Zobrazení $g_{ij} : V_i \cap V_j \to G$ dané $g_{ij}(x) = \phi_{j,x}^{-1}\phi_{i,x}$ je spojité.

Grupu G pak nazveme *strukturní grupou* bandlu ζ. Bandl se strukturní grupou G označme pěticí $\zeta = (E, p, X, Y, G)$, případně sedmicí $\zeta = (E, p, X, Y, G, U_\alpha, \phi_\alpha)$. Množinu dvojic (V_j, g_{ij}) nazvěme *souborem souřadných transformací.* Funkcím $\{g_{ij}\}$ říkáme *přechodové funkce* a souboru (U_α, ϕ_α), které splňuje výše uvedené vlastnosti, říkáme *atlas.*

Poznámka. V první podmínce je g určeno jednoznačně — plyne to z efektivity akce.

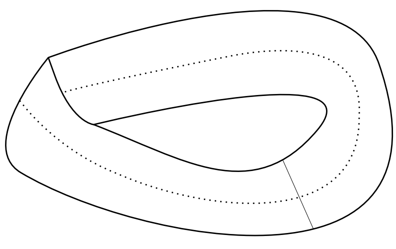
Pod slovem „bandl“ tedy odteď budeme myslet lokálně triviální bandl s nějakou strukturní grupou G. Ilustrujme si nyní neprůhlednou definici na jednom triviálním a na jednom netriviálním příkladu.

Příklad 2. *Triviální bandl $\gamma = (E \times Y, pr_1, E, Y)$ je zřejmě lokálně triviální, navíc si za jeho strukturní grupu můžeme zvolit triviální grupu $G = \{e\}$.*

Příklad 3. *Představme si bandl, který má jako totální prostor Möbiovu pásku (která je znázorněná dole na obrázku). Jeho báze je prostor S^1, který chápejme jako tečkovanou čáru jdoucí uprostřed Möbiovy pásky. Krátká kolmá úsečka pak znázorňuje vlákno, které je homeomorfní intervalu $[0, 1]$. Projekce p funguje tak, že vezme bod na Möbiově pásce a zobrazí jej „nejkratší cestou“ na bázi S^1 (například body na vyznačeném vlákně zobrazí na bod, ve kterém se báze s tímto vláknem protíná).*

Uvažme grupu $\mathbb{Z}_2$ s akcí definovanou předpisy $(0+2\mathbb{Z}) \cdot t := t$, $(1+2\mathbb{Z}) \cdot t := 1-t$ pro $t \in [0, 1]$ - tato akce je efektivní. Pokryjme nyní S^1 dvěma otevřenými množinami V_1, V_2. Není pak těžké ověřit, že zobrazení ϕ_1, ϕ_2 jsou homeomorfismy a že platí i zbývající podmínky.

Celkem Möbiova páska představuje nejjednodušší netriviální bandl (tj. bandl s netriviální strukturní grupou).



Obrázek 1.1: Möbiova páska

Do definice homomorfismu bandlů se společnou grupou G nyní přidejme i požadavek, který musí tato grupa splňovat.

Definice 9. Nechť $\zeta = (E, p, X, Y, G), \zeta' = (E', p', X', Y, G)$ jsou bandly. Pod *homomorfismem* $h : \zeta \to \zeta'$ myslíme homomorfismus bandlů ζ, ζ', pro který navíc platí:

1. Pokud $x \in V_j \cap \overline{h}^{-1}(V'_k)$, zobrazení:

$$\overline{g}_{kj}(x) = \phi'^{-1}_{k,\overline{h}(x)} h|_{p^{-1}(x)} \phi_{j,x}$$

je zobrazením $y \mapsto g \cdot y$ pro nějaké $g \in G$.

2. zobrazení $\overline{g}_{kj} : V_j \cap \overline{h}^{-1}(V'_k) \to G$ je spojité

Definice 10. Nechť $\zeta = (E, p, X, Y, G), \zeta' = (E', p, X, Y, G)$ jsou bandly a (U_α, ϕ_α), (U'_β, ϕ_β) jsou jejich atlasy pro indexové množiny I, I'. Pokud je soubor $\{U_\alpha\} \cup \{U_\beta\}$, $\{\phi_\alpha\} \cup \{\phi'_\beta\}$ opět atlasem pro nějaký bandl se strukturní grupou G, řekneme, že jsou bandly ζ, ζ' jsou *silně ekvivalentní*.

Být ekvivalentní je relací ekvivalence — plyne to z vlastností funkcí $\{g_{ij}\}$.

Definice 11. Pokud je $\zeta = (E, p, X, Y, G)$ bandl, pod *fibrovaným prostorem* myslíme třídu ekvivalence bandlů silně ekvivalentních s bandlem ζ. Značíme jej opět symbolem ζ.

Poznámka. Množinu všech atlasů na daném bandlu lze částečně uspořádat — řekneme, že pro dva atlasy $\mathcal{T} = (U_\alpha, \phi_\alpha)$, $\mathcal{T}' = (U'_\beta, \phi'_\beta)$ platí $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$, pokud je pokrytí $\{U'_\beta\}$ zjemněním pokrytí $\{U_\alpha\}$ a každé zobrazení ϕ_α patří do množiny $\{\phi'_\beta\}$. Na fibrovaný prostor lze potom nahlížet jako na bandl, jehož atlas je maximální vzhledem k tomuto uspořádání.

Lze ověřit, že pokud je ζ fibrovaný prostor, jeho funkce $g_{ji} : V_i \cap V_j \to G$ splňují pro všechny indexy i, j, k následující:

$$g_{kj}(x) g_{ji}(x) = g_{ki}(x),\ x \in V_i \cap V_j \cap V_k. \tag{1.1}$$

Několikrát využijeme následující tvrzení, které nám říká, že je fibrovaný prostor nad X svými funkcemi $\{g_{ij}\}$ a grupou G až na ekvivalenci jednoznačně určen.

Věta 1.1. *Pokud G je grupa mající efektivní akci na topologickém prostoru Y a $(\{V_j\}, g_{ij})$ je systém spojitých zobrazení splňujících rovnici 1.1, pak existuje až na ekvivalenci bandl ζ s bazí X, vláknem Y, strukturní grupou G a s funkcemi g_{ij}.*

Důkaz. [13, Theorem 3.2] □

Definice 12. Řekneme, že fibrované prostory $\zeta = (B, p, X, Y, G), \zeta' = (B', p', X, Y, G)$ jsou *ekvivalentní*, pokud existuje homomorfismus $h : \zeta \to \zeta'$, který indukuje identické zobrazení $\overline{h} = \mathrm{id}_X$.

Následující tvrzení nám popisuje, za jakých podmínek je možné sestrojit homomorfismus mezi bandly.

Lemma 1.2. *Nechť $\zeta = (E, p, X, Y, G), \zeta' = (E', p', X', Y, G)$ jsou dva bandly a $\overline{h}$ je spojité zobrazení $X \to X'$. Nechť $\overline{g}_{kj} : V_j \cap \overline{h}^{-1} \to G$ jsou spojitá zobrazení splňující:*

$$\begin{aligned} \overline{g}_{kj}(x) g_{ji}(x) &= \overline{g}_{ki}(x), \text{ pro } x \in V_i \cap V_j \cap \overline{h}^{-1}(V'_k) \\ g'_{lk}(\overline{h}(x)) \overline{g}_{kj}(x) &= \overline{g}_{lj}(x), \text{ pro } x \in V_j \cap \overline{h}^{-1}(V'_k \cap V'_l) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Pak existuje jediný homomorfismus $h : E \to E'$ indukující $\overline{h}$ a funkce $\overline{g}_{jk}$ splňují podmínky z definice 9.

Důkaz. [13, Lemma 2.6] □

1.2 Asociované fibrované prostory, slabá ekvivalence

U každého fibrovaného prostoru ζ lze přirozeným způsobem zvolit jeho asociovaný hlavní fibrovaný prostor $\widetilde{\zeta}$, který má o něco jednodušší strukturu a který nám dokáže o původním prostoru ζ něco nového říct — například se kterými fibrovanými prostory je ekvivalentní.

Definice 13. Nechť $\zeta = (E, p, X, Y, G)$ je fibrovaný prostor. Pod *asociovaným hlavním fibrovaným prostorem*[1] prostoru ζ rozumíme fibrovaný prostor $\widetilde{\zeta}$, který vznikne z konstrukční věty 1.1 pro grupu G, $(\{V_j\}, g_{ij})$ z prostoru ζ, a pro vlákno G (místo Y), na kterém máme levou akci danou násobením prvku zleva.

Věta 1.3. *Dva fibrované prostory ζ, ζ' jsou ekvivalentní právě tehdy, když jsou jejich asociované hlavní fibrované prostory ekvivalentní.*

Důkaz. Plyne ihned z lemmatu [13, Lemma 2.8], které říká, že je ekvivalence fibrovaných prostorů určena algebraickým vztahem mezi zobrazeními $\{g_{ij}\}$, $\{g'_{ij}\}$ prostorů ζ, ζ'. □

Věta 1.4. *Nechť $\zeta = (E, p, X, Y, G, \{V_i\}, \{\phi_\alpha\})$ je bandl a $\widetilde{\zeta}$ asociovaný hlavní fibrovaný prostor. Pak je $\widetilde{\zeta}$ triviální právě tehdy, když obsahuje nějaký řez.*

Důkaz. [13, Odstavec 8.3]. □

Pro charakteristiku homogenních C*-algeber ve třetí kapitole si nevystačíme s ekvivalencí fibrovaných prostorů — bude nutné definovat si pojem slabší — tzv. slabou ekvivalenci. Jak však zmiňují autoři v původní práci [14], řadu známých tvrzení týkajících se ekvivalenci fibrovaných prostorů lze formulovat a dokázat i pro slabou ekvivalenci.

Definice 14. Fibrovaný prostor ζ je *slabě ekvivalentní* fibrovanému prostoru ζ' se stejnou bazí X a grupou G, pokud mezi nimi existuje homomorfismus h, jehož indukované zobrazení $\overline{h} : X \to X$ je homeomorfismem.

[1]Pokud někdo zná tzv. hlavní fibrovaný prostor (také principal bundle), lze dokázat že jím ζ skutečně je.

Pokud $\zeta' = (B', p, X', Y, G, \{U_j\}, \{\phi_j\})$ je fibrovaný prostor s přechodovými funkcemi $\{g_{ij}\}$ a $f : X \to X'$ je spojité zobrazení, položme $U_i := f^{-1}(U_i')$ a definujme přechodové funkce $g_{ij} : V_i \cap V_j \to G$ předpisem $g_{ji}(x) = g'_{ij}(f(x))$ pro $x \in V_i \cap V_j$

Definice 15. *Indukovaným fibrovaným prostorem* $f^*(\zeta)$ (také *pullback* fibrovaného prostoru) myslíme fibrovaný prostor, který vznikne z věty 1.1 pro přechodové funkce $\{g_{ij}\}$ pro pokrytí $\{U_i\}$.

Vlastnost „být slabě ekvivalentní“ mezi fibrovanými prostory ζ, ζ' lze charakterizovat tak, že jeden z nich je ekvivalentní pullbacku toho druhého podle nějakého homeomorfismu.

1.3 Homotopické grupy a suspenze

Následující teorii využijeme ke konci práce při charakterizování některých n-homogenních C*-algeber. Začněme s homotopickými grupami a jejich souvislostí s fibrovanými prostory.

Definice 16. V prostoru S^n si zvolme nějaký bod x_0. Nechť X je topologický prostor a nechť $y_0 \in X$. Symbolem $\pi_n(X, x_0)$ značíme třídy homotopické ekvivalence funkcí $f : S^n \to X$, pro které $f(x_0) = y_0$[2].

Poznámka. Pokud jsou X, Y topologické prostory a $f : X \to Y$ spojité zobrazení, označme symbolem f_* zobrazení $\pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ zadané předpisem $[g] \mapsto [f \circ g]$, kde $[-]$ značí třídu homotopické ekvivalence příslušné funkce g. Je korektně definováno a říká se mu *indukované zobrazení.*

Důležité je, že pokud máme zadaný nějaký fibrovaný prostor, homotopické grupy v něm tvoří exaktní posloupnost:

Věta 1.5. *Nechť $\zeta = (E, p, X, Y, G)$ je fibrovaný prostor a $b_0 \in Y$ nějaký bod a $j : Y \to E$ je homeomorfismus $Y \cong p^{-1}(y_0)$ a následně vložení do E. Pak pro každé k existují homeomorfismy $d_k : \pi_k(X) \to \pi_{k-1}(Y)$ takové, že následující posloupnost je exaktní:*

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \pi_k(Y) \arrow[r, "j_*"] & \pi_k(E) \arrow[r, "p_*"] & \pi_k(X) \arrow[dll, "d_k"'] & \\
 & \pi_{k-1}(Y) \arrow[r, "j_*"'] & \pi_{k-1}(E) \arrow[r, "p_*"'] & \pi_{k-1}(X) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \pi_1(Y) \arrow[r, "j_*"] & \pi_1(E) \arrow[r, "p_*"] & \pi_1(X) \arrow[dll, "d_1"'] \\
 & \pi_0(Y) \arrow[r, "j_*"'] & \pi_0(E) \arrow[r, "p_*"'] & \pi_0(X)
\end{tikzcd}$$

[2] Také se jim říká *homotopické grupy* a jedná se skutečně o grupy. Důkaz lze nalézt v kterékoliv knize o teorii homotopií.

Důkaz. [13, 17.4] □

Definice 17. Pro topologický prostor X definujme *suspenzi* SX jako prostor $X \times \times [-1,1]$, u kterého "slepíme" $\{(x,-1), x \in X\}$ do jednoho bodu a $\{(x,1), x \in X\}$ do jiného bodu. Pro $Y \subseteq X, J \subseteq [0,1]$ označme YJ obraz $Y \times J$ v kanonické projekci $pr : X \to SX$.

Suspenze mají využití v podoblasti teorie homotopií (v tzv. *stable homotopy theory*), která zkoumá, které vlastnosti homotopických grup prostorů zůstanou zachovány, pokud na ně aplikujeme několikanásobně suspenzi. Následující sekce slouží k popisu vlastností bandlů, jejichž báze je suspenze nějakého kompaktního topologického prostoru.

Označme dále:

1. $U_+ = X(-1,1]$,
2. $U_- = X[-1,1)$,
3. $U = U_+ \cap U_-$,
4. $\epsilon X = X[0]$.

Všimněme si, že prostory $U_\pm$ jsou *stažitelné* (tj. jsou homotopicky ekvivalentní jednobodovému prostoru) — jedná se o topologické kužely. Také platí $\epsilon X \cong X$.

Nechť X je nyní kompaktní a $\zeta = (E, p, SX, Y, G)$ je fibrovaný prostor s obloukově souvislou grupou G. Označme $E_\pm = p^{-1}(U_\pm)$. Pak jsou fibrované prostory $\zeta_\pm = (E_\pm, p, U_\pm, Y, G)$ triviální (plyne to z lemmatu 4.3 formulovaného v poslední kapitole), existují tedy dle definice 12 zobrazení $\phi_\pm$, pro která následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} E_\pm \arrow[dr, "p"'] & & U_\pm \times Y \arrow[ll, "\phi_\pm"'] \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U_\pm & \end{tikzcd}$$

Vezměme si opět fibrovaný prostor ζ nyní ale s atlasem $\{U_+, U_-\}$ (bandl s tímto atlasem je původnímu bandlu silně ekvivalentní[3]. Pro množinu U pak existuje jediná přechodová funkce $g_{12} : U \to G$. Označme jako c_ζ restrikci g_{12} na množinu $X[0]$.

Platí pro ni, že následující diagram komutuje ($\phi_\pm$ jsou zúžením na příslušné podprostory):

$$\begin{tikzcd} & \epsilon X \times Y \arrow[dl, "\phi_+"'] \\ p^{-1}(\epsilon X) & \\ & \epsilon X \times Y \arrow[ul, "\phi_-"] \arrow[uu, "H"'] \end{tikzcd}$$

Kde $H : (u,x) \mapsto (u, c_\zeta(u) \cdot x)$.

[3]Pro sféru dokázáno v [13, odstavec 18.1]. Obecný důkaz se provede analogicky.

Z definice zobrazení c_ζ jakožto přechodové funkce totiž plyne následující vztah:

$$\begin{aligned} \phi_+(x,-)^{-1} \circ \phi_-(x,y) &= c_\zeta(x)(y) \\ \phi_-(x,y) &= \phi_+(x,-) \circ c_\zeta(x)(y) \\ \phi_-(x,y) &= \phi_+(x, c_\zeta(x)(y)) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Navíc $c_\zeta(x)(y)$ lze zapsat jako $c_\zeta(x) \cdot y$, kde $\cdot$ je levá efektivní akce grupy G na Y.

Definice 18. Spojitému zobrazení c_ζ říkáme *charakteristické zobrazení* fibrovaného prostoru ζ.

Věta 1.6. *Nechť G je obloukově souvislá grupa. Pak existuje bijekce mezi po dvou neizomorfními fibrovanými prostory nad SX s grupou G a homotopickými třídami $[c_\zeta]$ zobrazení $c_\zeta : U \to G$.*

Důkaz. [8, Theorem 8.3] □

Důležitým důsledkem je následující tvrzení:

Důsledek 1.1. *Nechť G je obloukově souvislá grupa. Pak existuje bijekce mezi po dvou neizomorfními fibrovanými prostory ζ nad S^n s grupou G a prvky $[c_\zeta] \in \pi_{n-1}(G)$.*

Důkaz. Plyne to z faktu že $SS^{n-1} = S^n$. □

Kapitola 2

C*-algebry

2.1 Definice a některé vlastnosti

V této části zmíníme definici a některé základní vlastnosti C*-algeber, které budeme potřebovat, a jejichž důkazy lze snadno najít téměř v kterékoliv knize o C*-algebrách.

Definice 19. *C*-algebra* $\mathcal{A}$ je Banachova algebra nad $\mathbb{C}$ (tedy algebra s normou, která zadává úplný metrický prostor a platí $||x \cdot y|| \leq ||x|| \cdot ||y||$) spolu s operací $^* : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$, která splňuje pro každá $x, y \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}$:

1. $(x + y)^* = x^* + y^*$,
2. $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$,
3. $x^{**} = x$,
4. $(xy)^* = y^* x^*$,
5. $||x^*|| = ||x||$.

Navíc pro každé $x \in \mathcal{A}$ platí: $||x||^2 = ||x^* \cdot x||$.

Pokud nebude řečeno jinak, budeme předpokládat, že C*-algebra má jednotku, tj. neutrální prvek vůči násobení.

Příklad 4. *Nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor. Pak prostor $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ohraničených operátorů $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ je C*-algebra. Pro operátory T, S se definuje $T \cdot S$ jako jejich složení a T^* jako adjungovaný operátor, tj. operátor jednoznačně určený podmínkou:*

$$\langle Th_1, h_2 \rangle = \langle h_1, T^* h_2 \rangle, \text{ pro všechna } h_1, h_2 \in \mathcal{H}$$

Normu definujeme následovně: $||T|| = \sup\limits_{||x|| \leq 1} ||Tx||$.

Příklad 5. *Speciálním případem je pro $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ prostor $\mathcal{M}_n$ komplexních matic typu $n \times n$.*

Příklad 6. *Nechť $\mathcal{A}$ je C*-podalgebra[1] $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Algebra $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ matic, které mají hodnoty nějaké C*-algebře $\mathcal{A}$, je C*-algebrou. Přesněji — platí $\mathcal{B}(\mathcal{H}^n) \cong \mathcal{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, lze proto prvky $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ ztotožnit s operátory $\mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n$.*

[1] Podalgebra, která je navíc C*-algebrou.

Nechť je nyní $\mathcal{A}$ libovolná C-algebra. Je známým tvrzením, že je izomorfní nějaké C*-algebře operátorů na vhodném Hilbertově prostoru. Lze pro ni tedy také korektně definovat C*-algebru $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$.*

Příklad 7. *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorfův prostor. Označme $C_0(X)$ prostor spojitých komplexních funkcí $f : X \to \mathbb{C}$, pro které je*

$$\{x \in X, |f(x)| > r\}, r \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

kompaktní (anglicky se těmto funkcím říká „functions vanishing at infinity"). Definujme operace $+$, $\cdot$ po složkách a položme $f^*(x) := \overline{f(x)}$ pro každé $x \in X$. Normu definujme předpisem:

$$||f|| := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Potom je $C_0(X)$ C-algebrou, která má jednotku právě tehdy, když je X kompaktní.*

Definice 20. Pod **-homomorfismem ϕ* C*-algeber $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ myslíme homomorfismus algeber $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, který splňuje:

$$\phi(x^*) = (\phi(x))^*, \text{ pro } x \in \mathcal{A}$$

Pod *izomorfismem* C*-algeber pak myslíme *-homomorfismus, který je bijektivní.

Věta 2.1. *Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou C*-algebry (zde je nutné, že mají jednotku) a $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je *-homomorfismus. Pak je ϕ spojitý. Pokud je ϕ injektivní, je izometrický.*

Důsledek 2.1. *Každá C*-algebra má jedinou normu.*

Důkaz. Stačí vzít identický izomorfismus $\mathrm{id} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. □

Strukturu komutativních C*-algeber popisuje následující důležitá věta.

Věta 2.2 (Gelfand–Naimark)**.** *Nechť $\mathcal{A}$ je komutativní C*-algebra (ne nutně s jednotkou) a označme symbolem $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ prostor *-homomorfismů $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Tento prostor je lokálně kompaktní a je kompaktní právě tehdy, když má $\mathcal{A}$ jednotku.*
*Platí že $\mathcal{A}$ je izometricky *-izomorfní C*-algebře $C_0(\mathfrak{M}_{\mathcal{A}})$.*

Věta 2.3. *Nechť $\mathcal{A}$ je C*-algebra a I je její oboustranný ideál, který je uzavřený (tj. uzavřený vzhledem k topologii generované normou). Pak je algebra $\mathcal{A}/I$ vzniklá faktorizací $\mathcal{A}$ podle ideálu I C*-algebrou, jejíž norma je daná vztahem:*

$$||a||_I = ||a + I|| := \inf\{a + b, b \in I\}.$$

Nadcházející věta popisuje zvláštní souvislost mezi topologickým a algebraickým pojmem v teorii operátorů — konkrétněji v teorii tzv. von Neumannových algeber. Jedná se o jistý speciální druh C*-algeber, které byly studovány poprvé v pracích Johna von Neumanna od roku 1929.

Definice 21. *Von Neumannova algebra* (také *W*-algebra*) je *-podalgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (kde $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor), která je uzavřená ve slabé operátorové topologii a která obsahuje identický operátor I.

Slabá operátorová topologie je nejmenší topologie na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ taková že lineární zobrazení $T \mapsto \langle Tx, y\rangle$ jsou pro každá $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ spojitá (kde $\langle -, -\rangle$ je skalární součin na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$). *Silná operátorová topologie* je nejmenší topologie na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ taková že zobrazení $T \mapsto Tx$ jsou pro každé $x \in \mathcal{H}$ spojitá. Poznamenejme, že v případě, že $\dim\mathcal{H} < \infty$, jsou obě tyto topologie stejné a splývají s topologií generovanou normou.
Pokud $\mathcal{C}$ je podalgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, označme symbolem $\mathcal{C}'$ ty operátory $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, pro které:

$$ST = TS$$

Pro všechna $S \in \mathcal{C}$.

Věta 2.4 (von Neumann)**.** *Nechť $\mathcal{C}$ *-podalgebra*[2] *$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ pro Hilbertův prostor $\mathcal{H}$. Pak je $\mathcal{C}$ uzavřená ve slabé operátorové topologii v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ právě tehdy, když je to von Neumannova algebra. To je právě tehdy, když $\mathcal{C}'' = \overline{\mathcal{C}}^{WOT} = \overline{\mathcal{C}}^{SOT}$, kde zkratky v horním indexu znamenají slabou a silnou operátorovou topologii.*

Poznámka (Tenzorové součiny C*-algeber)*.* Pokud jsou $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *-algebry, lze snadno vytvořit algebraický tenzorový součin, kde definujeme operace $\cdot,^*$ na tenzorovém součinu vektorových prostorů $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} (a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') &:= aa' \otimes bb', \\ (a \otimes b)^* &:= a^* \otimes b^*, \end{aligned} \tag{2.2}$$

pro prvky $a, a', b, b' \in \mathcal{A}$.

Příklad 8. *Nechť $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ je *-algebra matic s hodnotami v C*-algebře $\mathcal{A}$. Jakožto *-algebra je *-izomorfní *-algebře $\mathcal{A} \otimes \mathcal{M}_n$. Pokud jsou $\mathcal{A}, \mathcal{M}_n$ C*-algebry, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{M}_n$ je bez problému také C*-algebrou — máme u ní jedinou normu přejatou z $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$. U tenzorových součinů obecných C*-algeber často neexstuje jednoznačná norma*[3]*.*

Označme E_{ij} matici, která má na místě (i, j) jedničku a všude jinde nuly. Cílem další části je popsat některé prvky C*-algebry, které vůči sobě mají podobný vztah, který mají vůči sobě prvky E_{ij}.
Projekce je prvek p C*-algebry $\mathcal{A}$, pro který $p^* = pp = p$[4]. Řekneme, že projekce p, q jsou *navzájem kolmé*, pokud $pq = qp = 0$ a že jsou *ekvivalentní*, pokud existuje parciální izometrie $u \in A$ t.ž. $u^*u = p, uu^* = q$. *Parciální izometrií* myslíme prvek $u \in \mathcal{A}$, pro který $u^*uu^* = u^*$. Projekci p nazveme *abelovskou*, pokud je $p\mathcal{A}p$ komutativní.

---

[2] *-algebra je algebra s operací *, která splňuje první 4 podmínky v definici 19

[3] Těm, u kterých existuje, říkáme *nukleární*. Více k tomuhle zajímavému tématu lze najít např. v [2][Sekce II.9.].

[4] Pokud je například $\mathcal{A}$ von Neumannovou algebrou, je lineární operátor p, který splňuje tuto vlastnost, projekcí na podprostor $\mathrm{Im}(p) \subseteq \mathcal{H}$.

Definice 22. Nechť $\mathcal{R}$ je C*-algebra. Soubor *maticových jednotek* $\{e_{ij}\}$ je množina prvků $e_{ij}, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, pro které:

1. $e_{11} + \cdots + e_{nn} = 1$,
2. $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, kde δ_{jk} je Kroneckerovo delta,
3. $e_{ij}^* = e_{ji}$.

Příklad 9. *Nechť $\mathcal{A}$ je C*-algebra a $\{p_i\}$ soubor n navzájem kolmých projekcí, pro které platí $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ a pro každý index i existuje parciální izometrie u_i taková že $u_i^*u_i = p_i, u_iu_i^* = p_1$. Položme $e_{ij} := u_i^*u_j$. Soubor $\{e_{ij}\}$ je pak souborem maticových jednotek.*

Věta 2.5. *Nechť $\mathcal{A}$ je C*-algebra a $\{e_{ij}\}$ je soubor maticových jednotek. Pak $\mathcal{A}$ je izomorfní $\mathcal{M}_n(e_{11}\mathcal{A}e_{11})$.*

Důkaz. V [3, Lemma 2.52] dokázáno pro algebru (pro systém maticových jednotek bez 3. podmínky). Není však těžké po přidání podmínky 3. ukázat, že příslušný algebraický izomorfismus respektuje i operaci *. □

2.2 Reprezentace, spektrum

Definice 23. Nechť $\mathcal{A}$ je C*-algebra a $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor. *Reprezentací C*-algebry* $\mathcal{A}$ na prostoru $\mathcal{H}$ myslíme *-homomorfismus $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. *Dimenzí* reprezentace π myslíme dimenzi prostoru $\mathcal{H}$. Podprostor K Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ nazveme *invariantním* vůči $\pi(\mathcal{A})$, pokud $\pi(a)(K) \subseteq K$ pro všechny prvky $a \in \mathcal{A}$.

Definice 24. Dvě reprezentace C*-algebry $\mathcal{A}$ π, π' na $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ jsou (unitárně) ekvivalentní, pokud existuje unitární operátor[5] $\rho : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, takový, že:

$$\rho\pi(a)\rho^* = \pi'(a)$$

pro všechna $a \in \mathcal{A}$. Relace „být unitárně ekvivalentní“ je relace ekvivalence.

Lemma 2.6. *Pro C*-algebru $\mathcal{A}$ a její reprezentaci π na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *Jediné uzavřené invariantní podprostory $\mathcal{H}$ vzhledem k $\pi(\mathcal{A})$ jsou $\{0\}$ a $\mathcal{H}$,*
2. *Prvky $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ komutující s $\pi(\mathcal{A})$ jsou právě násobky identického operátoru I.*

Důkaz. „$\Uparrow$“:
Nechť K je uzavřený podprostor $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ invariantní pod $\pi(\mathcal{A})$. Vezměme si kolmou projekci P_K na K. Jelikož P_K komutuje s $\pi(\mathcal{A})$, je násobkem identického operátoru I. Tím pádem je buď $P_K = 0$ nebo $P_K = I$. Jinými slovy je $K = \{0\}$ nebo $K = \mathcal{H}$.
„$\Downarrow$“:
Nemělo by být těžké ověřit, že uzavřený podprostor K je invariantní pod π právě

[5] Tedy takový operátor, pro který je $\rho\rho^* = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$, $\rho^*\rho = \mathrm{id}_{\mathcal{H}'}$.

tehdy, když $P_K \in \pi(\mathcal{A})'$. Jediné projekce v $\pi(\mathcal{A})'$ jsou tedy skalární násobky identického operátoru I. $\pi(\mathcal{A})'$ je ale von Neumannovou algebrou - o těch je známo, že jsou generované svými projekcemi. Tedy $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C} \cdot I$. □

Definice 25. O reprezentaci C*-algebry řekneme, že je *topologicky ireducibilní*, pokud splňuje první výše uvedenou ekvivalentní podmínku.

Poznámka. Algebraicky ireducibilní reprezentace je ta, která neobsahuje žádné (at už uzavřené či ne) invariantní podprostory. Podle [5, důsledek 2.8.4.] je každá topologicky ireducibilní reprezentace C*-algebry také algebraicky ireducibilní, proto budeme tyto pojmy dále označovat jen slovem *ireducibilní*.

Poznámka. Dále zmiňme, že pokud je $\mathcal{D}$ „jen“ algebra, máme pro ni také zavedeny pojmy reprezentace/ireducibilní reprezentace. Pokud je $\mathcal{D}$ zároven C*-algebrou, dá se (např. [5, důsledek 2.9.6.]) ukázat, že algebraicky ireducibilní reprezentace algebry $\mathcal{D}$ na komplexním vektorovém prostoru je algebraicky ekvivalentní ireducibilní reprezentaci C*-algebry $\mathcal{D}$ na nějakém Hilbertově prostoru.

Příklad 10. *Pro libovolnou C*-algebru $\mathcal{A}$ je zřejmě 1-dimenzionální reprezentace ireducibilní.*

Definujme nyní další pojem používaný v algebraické geometrii, který našel uplatnění v teorii C*-algeber.

Definice 26. *Primitivní ideál* algebry $\mathcal{A}$ je oboustranný ideál, který je jádrem některé její algebraicky ireducibilní reprezentace na nějakém vektorovém prostoru. Označme $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ soubor všech primitivních ideálů v $\mathcal{A}$. Říkáme mu *primitivní spektrum.*

Poznámka. Pokud je $\mathcal{A}$ zároven C*-algebrou, její oboustranné primitivní ideály jsou právě jádra topologicky ireducibilních reprezentací C*-algebry $\mathcal{A}$ na nějakém Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Plyne to z [5, odstavec 2.9.7].

Protože je každá reprezentace C*-algebry spojitá, je každý primitivní ideál uzavřený vzhledem k topologii určené normou.
Zaveďme nyní na $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ topologii — pro podmnožinu $T \subseteq \mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ definujme její uzávěr $\overline{T}$:

$$\overline{T} := \{P \in \mathrm{Prim}(\mathcal{A}), P \supseteq \bigcap_{J \in T} J\}.$$

Jsou přitom splněny následující axiomy:

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
2. $T \subseteq \overline{T}$,
3. $\overline{T \cup T'} = \overline{T} \cup \overline{T'}$,
4. $\overline{\overline{T}} = \overline{T}$.

Jedná se o tzv. *Kuratowského uzávěrové axiomy*, které určují na zadané množině topologii. Podmnožinu $T \subseteq \mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ tedy prohlásíme za uzavřenou, pokud je rovna svému uzávěru. Nastane to když je T **právě** množina primitivních ideálů obsahujících nějakou zvolenou podmnožinu $A \subseteq \mathcal{A}$.

Všimněme si, že takto definovaná topologie zaručuje, že je splněn axiom T_0.

Věta 2.7. *Průnik všech primitivních ideálů je* $\{0\}$.

Důkaz. [2, II.6.4.9.] □

Věta 2.8. *Pokud* $\{J_i\}$ *je nějaká kolekce ideálů a* $J = \bigcap J_i$. *Pak platí následující:*

$$||x||_J = \sup_i ||x||_{J_i}.$$

Ve spojení s předchozí větou dostáváme zejména vztah $||x|| = \sup_i ||x||_{J_i}$, pokud $\{J_i\}$ je složeno ze všech primitivních ideálů. Tento vztah má navíc pěkný důsledek: pro nenulový prvek x najdeme vždy nějaký ideál J_x a příslušnou ireducibilní reprezentaci π_x takovou, že $\pi_x(x) \neq 0$.

Pokud označíme $\hat{x} : \mathrm{Prim}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}^+$ funkci $J \mapsto ||x||_J$, z [2, II. 6.5.8.] plyne, že pokud je $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ Hausdorffův, je $\hat{x}$ spojitá.

Důležitou vlastností primitivního spektra je jeho lokální kompaktnost[6], případně kompaktnost, pokud je C*-algebra jednotková:

Věta 2.9. *Každý prvek* $P \in \mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ *má bázi okolí složenou z kompaktních množin. Pokud má* $\mathcal{A}$ *jednotku (což vlastně stále předpokládáme), je* $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ *kompaktní.*

Důkaz. [2, II. 6.5.6.] □

Věta 2.10. *Pokud je* J *uzavřený ideál C*-algebry* $\mathcal{A}$, *platí:*

$$\mathrm{Prim}(\mathcal{A}/J) = \{P \in \mathrm{Prim}(\mathcal{A}) \mid J \subseteq K\}$$

Důkaz. [2, II.6.5.4] □

Definice 27. Označme symbolem $\hat{\mathcal{A}}$ třídy unitární ekvivalence ireducibilních reprezentací C*-algebry $\mathcal{A}$. Dále označme ${}_n\hat{\mathcal{A}}$ třídy unitární ekvivalence ireducibilních reprezentací mající dimenzi $\leq n$ a $\hat{\mathcal{A}}_n$ ty, které mají dimenzi n.

Máme k dispozici kanonické zobrazení $P : \hat{\mathcal{A}} \to \mathrm{Prim}(\mathcal{A})$, které třídě unitárně ekvivalentních ireducibilních reprezentaci přiřadí její jádro (unitárně ekvivalentní reprezentace mají totiž stejná jádra).

Definice 28. *Spektrum* (nesprávně také *duální prostor*) C*-algebry $\mathcal{A}$ je množina $\hat{\mathcal{A}}$ spolu s topologií generovanou množinami $P^{-1}(T)$, kde $T \subseteq \mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ je otevřená.

Příklad 11. *Pro C*-algebru* $C(X)$ *komplexních funkcí na kompaktním prostoru* X *je spektrum homeomorfní* X.

Věta 2.11. *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *Spektrum* $\hat{\mathcal{A}}$ *splňuje axiom* T_0,
2. *Dvě ireducibilní reprezentace* $\mathcal{A}$ *se stejným jádrem jsou ekvivalentní,*

[6] Primitivní spektrum jako topologický nemusí být nutně Hausdorffovo, existuje pro něj tedy více neekvivalentních definic lokální kompaktnosti. To, jakou z nich máme na mysli, popisujeme v následující větě.

3. Kanonické zobrazení P je homeomorfismem.

Důkaz. 1. $\Rightarrow$ 2.: Nechť π, π' jsou dvě ireducibilní reprezentace se stejným jádrem. Každá otevřená podmnožina $\hat{\mathcal{A}}$, která obsahuje π, obsahuje také π'. Tedy (díky axiomu T_0) odpovídají π, π' jedinému prvku v $\hat{\mathcal{A}}$, tedy jsou ekvivalentní.
2. $\Rightarrow$ 3.: Je zřejmé.
3. $\Rightarrow$ 1.: Zřejmé, protože $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ splňuje axiom T_0. □

2.3 C*-algebry vektorových polí

Na některé C*-algebry se můžeme dívat jako na C*-algebry spojitých funkcí $f : X \to \to \{A(x)\}_{x\in X}$, pro které $\forall x \in X : f(x) \in A(x)$ pro nějaký lokálně kompaktní prostor X a soubor C*-algeber $\{A(x)\}_{x\in X}$. Jedná se tedy o C*-algebru „vektorových polí“ (nebo „operátorových polí“). Tento přístup při popisu n-homogenních C*-algeber lze najít v práci J.M.G. Fella [7] z roku 1961 nebo v práci [15] N.B. Vasileva z roku 1964. V této sekci výjimečně nevyžadujeme, aby měla C*-algebra jednotku.

Definice 29. Pro lokálně kompaktní prostor X a soubor C*-algeber $\{A(x)\}_{x\in X}$ je *C*-algebra vektorových polí A* (značíme $A = \mathrm{VF}(X, \{A(x)\})$) soubor spojitých funkcí $f : X \to \{A(x)\}$, pro které $\forall x \in X : f(x) \in A(x)$ a pro které platí:

1. Pro každý prvek $a_x \in A(x)$ existuje funkce $a \in A$ taková že $a(x) = a_x$,
2. $||a(x)||$ je spojitá a ohraničená funkce $X \to \mathbb{R}$ pro každé $a \in A$,
3. A je *-algebra vzhledem k operacím definovaným po složkách a je úplná vzhledem k normě
$$||a|| := \sup_{x\in X} ||a(x)||$$

Příklad 12. *Pokud je $\mathcal{A}$ C*-algebra, jejíž ireducibilní reprezentace mají dimenze menší nebo rovny n (je tzv. subhomogenní), tuto roli splní soubor*

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} {}_i\hat{\mathcal{A}}$$

(na jednotlivých ${}_i\hat{\mathcal{A}}$ lze zavést tzv. topologii bodové konvergence[7]). Můžeme tedy tuto C-algebru považovat za C*-algebru vektorových polí z X do $\{\mathcal{M}_{n_\pi}\}_{\pi\in X}$ daných předpisem $\pi \mapsto \pi(a)$ pro $a \in \mathcal{A}$.*

Ireducibilní reprezentace C*-algebry vektorových polí jdou „hezky“ popsat, jak ukazuje následující věta z [7][Theorem 1.1].

Věta 2.12. *Nechť $A = VF(X, \{A(x)\}_{x\in X})$ je C*-algebra vektorových polí a nechť π je její ireducibilní reprezentace. Pak existuje prvek $s \in X$ a ireducibilní reprezentace π_s na C*-algebře $A(s)$ taková že:*

$$\pi(x) = \pi_s(x(s)),\ \textit{pro}\ x \in A.$$

[7]Pokud je F soubor funkcí $f : X \to Y$, lze na něm uvažovat topologii, kdy jej chápeme jako podprostor prostoru Y^X, na kterém máme topologii součinu topologických prostorů Y

Příklad 13. *Nechť $A = C(X, \mathcal{M}_n)$. Zřejmě je to C*-algebra vektorových polí. Je známým tvrzením, že každá ireducibilní reprezentace $\mathcal{M}_n$ je unitárně ekvivalentní identitě. Můžeme tedy (po případné změně báze) ireducibilní reprezentaci π napsat ve tvaru:*

$$\pi(f) = f(s), \text{ pro } f \in C(X, \mathcal{M}_n),$$

pro vhodné $s \in X$.

Formulujme zobecnění Stoneovy–Weierstrassovy věty pro C*-algebry vektorových polí (existuje i její zobecnění pro libovolné C*-algebry). Definujme pro C*-algebru vektorových polí A množinu $A(x; y)$ jako $\{(a(x), a(y)), a \in A\}$. Pokud je $A(x; y) \neq \{a(x), a \in A\} \times \{a(y), a \in A\})$, říkáme také, že je C*-algebra *separabilní*[8].

Věta 2.13 (Stone–Weierstrass)**.** *Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou C*-algebry vektorových polí na nějakém kompaktním prostoru X mající hodnoty ve stejném souboru C*-algeber $\{A(x)\}$. Nechť $\mathcal{B}$ je C*-podalgebra $\mathcal{A}$ a nechť platí $\mathcal{A}(x; y) = \mathcal{B}(x; y)$ pro všechny $x, y \in \mathcal{A}$. Pak $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.*

Důkaz. [15, Theorem po VF3] □

Následující lemma ukazuje, že pokud máme pro nějaké $x_0 \in X$ systém maticových jednotek $e_{ij}(x)$, lze jej „rozšířit“ na nějaké okolí U bodu x_0.

Lemma 2.14. *Uvažujme $\mathcal{A} = VF(X, \{A(x)\})$ a nechť $e_{ij} \in \mathcal{A}$ jsou prvky takové, že $e_{ij}(x_0)$ tvoří soubor maticových jednotek v $A(x_0)$. Pak existují prvky $\widetilde{e_{ij}} \in \mathcal{A}$ a okolí V prvku x_0 takové, že $\widetilde{e_{ij}}(y)$ tvoří soubor maticových jednotek v $A(y)$ pro každé $y \in V$. Navíc $\widetilde{e_{ij}}(x_0) = e_{ij}(x_0)$.*

Důkaz. Obecněji v [15, VF7]. Srovnej také s [7, lemma 3.1]. □

2.4 Homogenní C*-algebry

Definice 30. C*-algebra $\mathcal{A}$ je *n-homogenní*, pokud má každá její ireducibilní reprezentace dimenzi n.

Jedná se tedy o reprezentace na Hilbertově prostoru $\mathbb{C}^n$. Dokonce platí, že $\pi(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_n$, jak ukazuje následující věta:

Věta 2.15. *Nechť $\mathcal{A}$ je C*-algebra a π její nenulová ireducibilní konečnědimenzionální reprezentace na prostoru $\mathcal{H}$. Pak je π surjektivní.*

Důkaz. V prostoru konečné dimenze je slabá operátorová topologie rovna té silné, a ta je rovna topologii indukované normou. Protože π je ireducibilní, je $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C} \cdot I$, odtud $\pi(\mathcal{A})'' = \mathcal{M}_n$. Z von Neumannovy věty je $\pi(\mathcal{A})'' = \overline{\pi(\mathcal{A})}$ ve slabé operátorové topologii. Je známým tvrzením, že *-homomorfní obraz C*-algebry je uzavřený. Dohromady máme $\pi(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_n$. □

[8] Nejedná se o separabilnost ve smyslu že existuje spočetná množina, která je v topologickém prostoru hustá.

Příklad 14. *„Nejjednodušší" n-homogenní C*-algebry mají tvar $C(X, \mathcal{M}_n)$ pro některý kompaktní Hausdorffův prostor X.*

Důkaz. Brzy. □

Dokažme si nyní jednoduchý příklad:

Příklad 15. *Libovolná komutativní C*-algebra $\mathcal{A}$ je 1-homogenní.*

Důkaz. Uvažme ireducibilní reprezentaci π na $\mathcal{H}$. Protože platí:

$$\pi(a)\pi(b) = \pi(ab) = \pi(ba) = \pi(b)\pi(a).$$

Je $\pi(\mathcal{A})$ komutativní. Protože $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C} \cdot I$, je $\pi(\mathcal{A})'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tedy je podle von Neumannovy věty 2.4 $\pi(\mathcal{A})$ hustá v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve slabé operátorové topologii. Vezměme si nyní operátory $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a sítě $\pi(s_\lambda), \pi(t_\lambda)$, které k nim v této topologii konvergují. Pak platí:

$$ST = \lim_\lambda \pi(s_\lambda)\pi(t_\lambda) = \lim_\lambda \pi(t_\lambda)\pi(s_\lambda) = TS.$$

Tedy $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je komutativní. Není těžké ověřit, že $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je komutativní pouze když $\dim\mathcal{H} = 1$. □

Dejme si nyní dohromady n-homogenní C*-algebry a C*-algebry vektorových polí z předchozí sekce.

Příklad 16. *Nechť $\mathcal{A}$ je n-homogenní C*-algebra. Označme $\mathcal{A}_0$ prostor funkcí f_a z $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ do $\mathcal{M}_n$ daných předpisem $P \mapsto a(P)$ (kde $a(P)$ je obraz prvku a v kanonické projekci $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/P$). Definujme operace $+, \cdot, ^*$ po složkách a zaveďme normu předpisem:*

$$||f_a|| := \sup_{P \in \mathrm{Prim}(\mathcal{A})} ||a(P)||.$$

Potom je $\mathcal{A}_0$ C-algebrou. Z diskuze pod větou 2.8 není těžké ověřit, že je to C*-algebra vektorových polí. Navíc je izomorfní C*-algebře $\mathcal{A}$.*

Poznámka. Komutativní C*-algebra je podle 2.2 C*-algebra komplexních funkcí na kompaktním Hausdorffově prostoru. Její množina $\hat{\mathcal{A}}$ je pak totožná s $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ a je rovna prostoru $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ všech *-homomorfismů $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Naopak u obecných C*-algeber se mohou prostory $\hat{\mathcal{A}}$ a $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ výrazně lišit. U n-homogenních C*-algeber jsou však tyto prostory homeomorfní — v tomto ohledu jsou si s komutativními C*-algebrami velmi blízké.

Věta 2.16. *Pro n-homogenní C*-algebru $\mathcal{A}$ je $\hat{\mathcal{A}}$ Hausdorffův.*

Důkaz. [6, Corollary 2, Theorem 2.2] □

Zejména platí axiom T_0. Podle věty 2.11 jsou pro n-homogenní C*-algebru $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ a $\hat{\mathcal{A}}$ homeomorfní.

Poznámka (alternativní důkaz). *CCR* (také *liminal*) C*-algebry jsou ty, pro které je pro každou jejich ireducibilní reprezentaci π operátor $\pi(x)$ kompaktní. *GCR* (také *postliminal*) C*-algebry jsou ty, pro které existuje kompaktní operátor v $\pi(\mathcal{A})$. Pro čtenáře, který ví, že operátor na prostorech konečné dimenze je kompaktní, není těžké si uvědomit, že n-homogenní C*-algebra je CCR a tedy GCR. Je známým tvrzením (např. [5, Theorem 4.3.7]), že u GCR C*-algeber jsou $\hat{\mathcal{A}}$ a $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ homeomorfní.

Kapitola 3

Homogenní C*-algebry a fibrované prostory

3.1 Klasické grupy

Stručně si připomeňme některé poznatky ohledně klasických grup, které budeme potřebovat. Na množině $\mathcal{M}_n$ všech matic nad komplexními čísly uvažujme topologii prostoru $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Symbolem $U(n)$ značíme grupu unitárních matic. Je to kompaktní podprostor $\mathcal{M}_n$. Symbolem $PU(n)$ pak značíme grupu $U(n)/Z(U(n))$ (je to tzv. *projektivní unitární grupa*). Není těžké se přesvědčit, že $Z(U(n)) = \{\lambda \cdot I, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$. Pod symbolem $SU(n)$ pak myslíme uzavřenou podgrupu $U(n)$ matic, které mají determinant roven jedné.

Důležitou roli bude hrát grupa všech *-automorfismů *-algebry $\mathcal{M}_n$ nad $\mathbb{C}$ (kde pro matici A definujeme $A^* := \overline{A}^T$). Budeme ji značit symbolem $\mathfrak{U}$. Zabývejme se chvíli tím, jak vypadá.

Věta 3.1. *Grupa $\mathfrak{U}$ je grupa *-automorfismů tvaru $A \mapsto UAU^{-1}$, kde $U \in U(n)$. Navíc je izomorfní grupě $PU(n)$.*

Důkaz. Okruh $\mathcal{M}_n$ je *jednoduchý* — tj. neobsahuje žádné vlastní netriviální oboustranné ideály. Podle věty Skolema a Noetherové je jakýkoliv automorfismus jednoduchých okruhů tvaru $\Delta : A \mapsto TAT^{-1}$, kde T je invertibilní. Dále protože Δ zachovává operaci *:

$$(\Delta(A^*)) = TA^*T^{-1} = (\Delta(A))^* = (T^{-1})^*A^*T^*.$$

Hlavně $T^*TA^* = A^*T^*T$, tedy T^*T patří do centra grupy $\mathcal{M}_n$, tedy je roven $\lambda \cdot I$, kde I je identická matice a $\lambda \in \mathbb{C}$ (toto plyne z jednoduchosti $\mathcal{M}_n$). Bez újmy na obecnosti (vynásobením $\lambda\lambda^{-1}$) předpokládejme, že je T unitární.

Nechť $g_U \in \mathfrak{U}, g_U(A) = UAU$, kde U_g je unitární. Uvažme homomorfismus $U(n) \to G$ daný $U \mapsto g_U$. Jádrem tohoto homomorfismu je právě $Z(U(n))$, tedy $U(n)/Z(U(n)) \cong \mathfrak{U}$. $\square$

Lze ukázat, že tento izomorfismus je navíc homeomorfismem, pokud na $\mathfrak{U}$ zavedeme topologii bodové konvergence a na $PU(n)$ faktorovou topologii z $U(n)$. Na $U(n)$ máme topologii podprostoru $\mathcal{M}_n$.

Věta 3.2. *Grupy $U(n), PU(n)$ jsou obloukově souvislé.*

Důkaz. Vezměme si dvě unitární matice U, V. U můžeme psát jako $U = S \operatorname{diag}(e^{i\phi_1}, \ldots, e^{i\phi_n})\, S^{-1}$ pro jinou unitární matici S. Zobrazení $t \mapsto S \operatorname{diag}(e^{it\phi_1}, \ldots, e^{it\phi_n})\, S^{-1}$ je pak cestou z U do I a podobně můžeme vytvořit cestu z I do V, tedy $U(n)$ je obloukově souvislý. Prostor $PU(n)$ je jako faktorizace obloukově souvislého prostoru sám obloukově souvislý. □

3.2 Homogenní C*-algebry a fibrované prostory

V této části se seznámíme se vzájemnou korespondencí mezi n-homogenními C*-algebrami a fibrovanými prostory. Věnujme se následujícím tvrzením formulovaným v [14], [15], [7]:

- Každá n-homogenní C*-algebra zadává fibrovaný prostor.
- Každá n-homogenní C*-algebra je izomorfní C*-algebře všech řezů na fibrovaném prostoru, který zadává.
- Dvě n-homogenní C*-algebry jsou izomorfní právě tehdy, když jsou jejich odpovídající fibrované prostory slabě ekvivalentní.
- Každý fibrovaný prostor s kompaktní bazí, s vláknem $\mathcal{M}_n$ a grupou $PU(n)$ zadává n-homogenní C*-algebru $\mathcal{A}$, jejíž fibrovaný prostor $\zeta_{\mathcal{A}}$ je původnímu fibrovanému prostoru ekvivalentní.

Poznámka. O bandlu s vláknem $\mathcal{M}_n$ a grupou $PU(n)$ také říkáme, že je *algebraický*.

Důležité bude následující lemma, které bude odpovídat lokální trivialitě příslušných fibrovaných prostorů. Pro $U \subseteq \operatorname{Prim}(\mathcal{A})$ označme $\mathcal{A}(U)$ C*-algebru $\mathcal{A}$, kterou faktorizujeme podle ideálu $\bigcap\limits_{J \in U} J$.

Všimněme si, že platí následující ekvivalence:

$$\forall P \in U : a(P) = 0 \Leftrightarrow \forall P \in U : a \in P \Leftrightarrow a \in \bigcap_{P \in U} P \Leftrightarrow a(U) = 0 \tag{3.1}$$

Lemma 3.3. *Nechť $\mathcal{A}$ je n-homogenní C*-algebra. Pro každý prvek $P \in \operatorname{Prim}(\mathcal{A})$ existuje jeho okolí U takové, že: $\mathcal{A}(U) \cong C(\overline{U}, \mathcal{M}_n)$*

Důkaz. Chápejme $\mathcal{A}$ jako vhodnou algebru vektorových polí $VF(\hat{\mathcal{A}}, \{\mathcal{M}_n\})$ (viz 16). Víme, že $\mathcal{A}(P) \cong \mathcal{M}_n$ pro $P \in \operatorname{Prim}(\mathcal{A})$. Nechť $P_0 \in \operatorname{Prim}(\mathcal{A})$ a nechť $e_{ij}(P_0)$ tvoří soubor maticových jednotek $\mathcal{M}_n$. Pro algebru vektorových polí lze podle lemmatu

2.14 najít prvky $\{\widetilde{e_{ij}}\}, i, j = 1, \ldots, n$, pro které $\widetilde{e_{ij}}(P)$ tvoří soubor maticových jednotek pro každé $P \in U$ a pro které navíc $\widetilde{e_{ij}}(P_0) = e_{ij}(P_0)$. Kromě toho je zřejmě $e_{11}\mathcal{A}(P)e_{11}(P)$ komutativní pro každé $P \in U$. Není těžké s pomocí 3.1 ověřit, že $\widetilde{e_{ij}}(U)$ nyní tvoří soubor maticových jednotek pro $\mathcal{A}(U)$ a že $e_{11}\mathcal{A}e_{11}(U)$ je komutativní. Podle 2.5 je $\mathcal{A}(U) \cong \mathcal{M}_n(S)$ pro $S = e_{11}(U)\mathcal{A}(U)e_{11}(U)$. S je C*-algebra. Navíc protože S je komutativní, platí pro něj $\hat{S} \cong \mathrm{Prim}(S) \cong \mathfrak{M}_S$. Všimněme si, že spektrum $\mathcal{A}(U)$ je homeomorfní s $\overline{U}$, to plyne z definice topologie a z 2.10.

C*-algebra S je *dědičná* (angl. *hereditary*); u těchto C*-algeber je známo, že pokud je π ireducibilní reprezentace na $\mathcal{A}$, její zúžení na S je opět ireducibilní[1]. Dále platí, že primitivní ideály $\mathcal{A}$, které neobsahují S jsou v bijekci s primitivními ideály S. Tato bijekce je zprostředkována homeomorfismem $P \mapsto P \cap S$ (toto tvrzení lze nalézt v [9, Lemma 4.1]). Odtud dostáváme, spolu s dědičností S, že spektrum S je homeomorfní $\overline{U}$. Ale protože S je komutativní, je izomorfní C*-algebře $C(\overline{U})$.

Tedy celkem je $\mathcal{A}(U) \cong \mathcal{M}_n(C(\overline{U}))$, navíc ji lze zřejmě ztotožnit s $C(X, \mathcal{M}_n)$. □

Poznámka. Vzhledem k poznámce o tenzorových součinech C*-algeber je $\mathcal{A}(U)$ izomorfní $C(\overline{U}) \otimes \mathcal{M}_n$.

Věta 3.4. *Nechť $\mathcal{A}$ je n-homogenní C*-algebra, pak $\mathcal{A}$ zadává fibrovaný prostor s bazí* $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$*, vláknem $\mathcal{M}_n$ (které chápeme jako C*-algebru) a s grupou $PU(n)$.*

Důkaz. Označme $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ pokrytí $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ z předchozího lemmatu.

Položme

$$E := \coprod_{P \in \mathrm{Prim}(\mathcal{A})} \mathcal{A}(P)$$

a definujme zobrazení $p : B \to \mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ předpisem $a(P) \mapsto P$.

Dále definujme $\phi_\alpha : U_\alpha \times \mathcal{M}_n \to p^{-1}(U_\alpha)$ takto:

$$\phi_\alpha(P, (\lambda_{ij})) = \sum_{ij} \lambda_{ij} e^\alpha_{ij}(P)$$

toto zobrazení zřejmě splňuje vztah $p\phi_\alpha(P, (\lambda_{ij})) = P$ a je bijekcí.

Na množině E zavedeme „topologii atlasu“: Množinu $U \subseteq B$ prohlásíme za otevřenou, pokud je $\phi_\alpha^{-1}(U \cap p^{-1}(U_\alpha))$ otevřená pro všechny $\alpha \in I$.

Z definice zadané topologie jsou ϕ_α spojitá a posílají otevřené množiny na otevřené, tedy jsou to homeomorfismy. Není těžké ověřit, že p je také spojité. Navíc je $p^{-1}(P) = \{a(P), a(P) \in \mathcal{A}(P)\} \cong \mathcal{M}_n$.

Tedy je zatím $\zeta = (E, p, \mathrm{Prim}(\mathcal{A}), \mathcal{M}_n)$ bandlem.

Definujme levou akci $PU(n) \times \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$; pro $\mathfrak{u} \in PU(n), A \in \mathcal{M}_n$:

$$\mathfrak{u} \cdot A := U^{-1} A U$$

[1] Viz například [2, sekce II.3.4.]

Kde $\mathrm{pr}(U) = \mathfrak{u}$ v kanonické projekci $U(n) \to PU(n)$. Tato akce je efektivní.

Pro okolí U_α z předchozího lemmatu lze každý prvek $a(U_\alpha) \in \mathcal{A}(U_\alpha)$ napsat jako součet:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\alpha}(U_\alpha) e_{ij}^{\alpha}(U_\alpha)$$

a lze jej chápat jako matici $(a_{ij}^{\alpha}(U_\alpha))$ tvořenou spojitými funkcemi na $\overline{U_\alpha}$.
Z posloupnosti ekvivalencí 3.1 pro prvek $a \in \mathcal{A}$ platí:

$$a(U_\alpha \cap U_\beta) = \sum_{ij} a_{ij}^{\alpha}(U_\alpha \cap U_\beta) e_{ij}^{\alpha}(U_\alpha \cap U_\beta) = \sum_{ij} a_{ij}^{\beta}(U_\alpha \cap U_\beta) e_{ij}^{\beta}(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{3.2}$$

Zejména tato rovnice platí, pokud faktorizujeme podle jednoho $P \in U_\alpha \cap U_\beta$.
Definujme:

$$g_{\beta\alpha}(P)((a_{ij}^{\alpha}(P))) := (a_{ij}^{\beta}(P))$$

Z jednoznačnosti koeficientů $a_{ij}^{\alpha}, a_{ij}^{\beta}$ plyne, že toto zobrazení je *-automorfismus algebry $\mathcal{M}_n$. Tedy je prvkem grupy $\mathfrak{U} \cong PU(n)$.
Lze ověřit, že platí:

$$\phi_\alpha(P, (a_{ij}^{\alpha}(P))) = \phi_\beta(P, g_{\beta\alpha}(P)((a_{ij}^{\beta}(P)))$$

A tedy že $\phi_{\alpha,x}^{-1}\phi_{\beta,x}$ odpovídá prvku z $g_{\beta\alpha}(P)$.

Navíc lze (pomocí konvergencí) dokázat, že je zobrazení $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to PU(n)$ dané předpisem $P \mapsto g_{\beta\alpha}(P)$ spojité.

Vzpomeňme si na definici strukturní grupy bandlu — pro grupu $PU(n)$ je splněna. Pokud je $\zeta'_{\mathcal{A}} = (B, p, \mathrm{Prim}(\mathcal{A}), \mathcal{M}_n, PU(n))$ jiný bandl s grupou $PU(n)$, s jiným pokrytím $\{U'_\alpha\}$ z lemmatu 3.3 a s jiným souborem funkcí $\{\phi'_\alpha\}$, předchozí diskuze ukazuje, že je s $\zeta_{\mathcal{A}}$ silně ekvivalentní. Celkem tedy máme fibrovaný prostor jako třídu ekvivalence všech těchto bandlů a důkaz je hotov. □

Budeme tento fibrovaný prostor značit symbolem $\varsigma_{\mathcal{A}}$.

Věta 3.5. *Nechť $\mathcal{A}$ je n-homogenní C*-algebra. Pak je izomorfní C*-algebře $\mathcal{A}_0$ všech řezů ve fibrovaném prostoru $\varsigma_{\mathcal{A}}$.*

Důkaz. Je snadné ověřit, že $\mathcal{A}$ je izomorfní C*-algebře $\mathcal{A}_0$ funkcí tvaru $P \mapsto a(P)$ pro různá $a \in \mathcal{A}$ — jedná se vlastně o řezy fibrovaného prostoru $\varsigma_{\mathcal{A}}$. $\mathcal{A}_0$ je C*-algebra vektorových polí, která je podalgebrou C*-algebry $\mathcal{B}$ **všech** řezů fibrovaného prostoru $\varsigma_{\mathcal{A}}$. Protože $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ je homeomorfní prostoru ireducibilních reprezentací, lze dokázat, že je $\mathcal{A}_0$ separabilní, tj. že pro všechna $x, y \in \mathcal{A}$ platí, že $\mathcal{A}(x; y) = \mathcal{A}(x) \times \mathcal{A}(y)$. Podle zobecněné Stoneovy–Weierstrassovy věty je pak $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ a důkaz je hotov. □

Věta 3.6. *Nechť $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ jsou dvě n-homogenní C*-algebry. Pak z $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ jsou izomorfní právě tehdy, když jsou fibrované prostory $\zeta_{\mathcal{A}_1} = (B_1, p_1, \mathrm{Prim}(\mathcal{A}_1), \mathcal{M}_n, G, U_\alpha, \phi_\alpha)$, $\zeta_{\mathcal{A}_2} = (B_2, p_2, \mathrm{Prim}(\mathcal{A}_2), \mathcal{M}_n, G, U'_\gamma, \phi'_\gamma)$ slabě ekvivalentní.*

Idea důkazu. „⇒“:
Nechť $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ jsou izomorfní C*-algebry řezů ve fibrovaných prostorech $\zeta_{\mathcal{A}_1}$, $\zeta_{\mathcal{A}_2}$ a π je příslušný izomorfismus. Pokud $P \in \mathrm{Prim}(\mathcal{A}_2)$, je $\pi^{-1}(P)$ primitivní ideál v $\mathcal{A}_1$. Uvažme zobrazení $\overline{h} : \mathrm{Prim}(\mathcal{A}_2) \to \mathrm{Prim}(\mathcal{A}_1)$, $h : B_2 \to B_1$ zadaná předpisy:

$$\begin{aligned} \overline{h}(P) &= \pi^{-1}(P) \\ h(b(P)) &= \pi^{-1}(b)(\overline{h}(P)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Zobrazení $\overline{h}$ je homeomorfismem. Dále platí:

$$p_1 h = \overline{h} p_2$$

Tedy je h zobrazením mezi bandly $\zeta_{\mathcal{A}_1}, \zeta_{\mathcal{A}_2}$.

Položme dále:

$$\overline{g}_{\gamma\alpha}(P)((\lambda_{ij})) := (\phi'^{-1}_{\gamma,h(P)} \circ h \circ \phi_{\alpha,P})((\lambda_{ij})), \text{ pro } (\lambda_{ij}) \in \mathcal{M}_n$$

toto zobrazení je *-automorfismus algebry $\mathcal{M}_n$, tedy $\overline{g}_{\gamma\alpha}(P) \in G$. Lze navíc dokázat, že je zobrazení $\overline{g}_{\gamma\alpha} : U_\alpha \cap \overline{h}^{-1}(U'_\gamma) \to PU(n)$ spojité. Podle 1.2 pak je h zobrazení mezi fibrovanými prostory a $\mathrm{Prim}(\mathcal{A}_2)$, $\mathrm{Prim}(\mathcal{A}_1)$ jsou slabě ekvivalentní.

„⇐“:
Chápejme nyní C*-algebry $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ jako C*-algebry všech řezů na svých příslušných fibrovaných prostorech a předpokládejme, že existuje zobrazení $h : \zeta_{\mathcal{A}_2} \to \zeta_{\mathcal{A}_1}$ mající indukované zobrazení $\overline{h}$, které je homeomorfismus. Protože je h spojitou bijekcí mezi kompaktním a Hausdorffovým prostorem, je jeho inverze h^{-1} spojitá. Aplikací tvrzení [13, Lemma 2.7] dostáváme, že je h^{-1} homomorfismus fibrovaných prostorů $\zeta_{\mathcal{A}_1}, \zeta_{\mathcal{A}_2}$.

Pokud f_a je řezem v $\zeta_{\mathcal{A}_1}$, položme:

$$\pi(f_a)(P) := h^{-1}(a(\overline{h}(P))), \text{ pro } P \in \mathrm{Prim}(\mathcal{A}_2)$$

Je jednoduché ověřit, že je $\pi(f_a)$ řezem v $\zeta_{\mathcal{A}_2}$ a že je injektivní. Ze zobecněné Stoneovy–Weierstrassovy věty lze dokázat, že je i surjektivní. Celkem jsou $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ izomorfní a tvrzení je dokázáno.

Důkaz. [14, Corollary, Theorem 6] □

Věta 3.7. *Nechť X je kompaktní Hausdorfův prostor a nechť $\zeta = (B, p, X, \mathcal{M}_n, G, U_\alpha, \phi_\alpha)$ je fibrovaný prostor. Pak existuje n-homogenní C*-algebra $\mathcal{A}$ taková že její fibrovaný prostor ζ_A je slabě ekvivalentní ζ.*

Idea důkazu. Označme $\mathcal{A}_0$ C*-algebru všech řezů v ζ s operacemi definovanými po složkách s normou:

$$||f|| := \sup_{x \in X} ||f(x)||$$

Je to C*-algebra vektorových polí, označme $VF(X, \{p^{-1}(x)\}_{x \in X})$. Z [15, VF2] plyne, že všechny ireducibilní reprezentace $\mathcal{A}_0$ mají tvar $a \mapsto a(x)$ — zřejmě jsou pak dimenze n. Navíc platí $\mathrm{Prim}(\mathcal{A}_0) \cong X$ pro nějaký homeomorfismus $\overline{h}$.

Nechť $\zeta_{\mathcal{A}_0} = (B', p', X, \mathcal{M}_n, G, U'_\gamma, \phi'_\gamma)$ je fibrovaný prostor příslušný $\mathcal{A}_0$. Je potom snadné ověřit, že pro $b \in p^{-1}(x)$ existuje řez a takový, že $a(x) = b$. Položme:

$$h(b) = a(x)$$

Navíc platí $p' \circ h = \overline{h} \circ p$, tedy je h zobrazení mezi bandly ζ, $\zeta_{\mathcal{A}_0}$.

Položme nyní:

$$\overline{g}_{\gamma\alpha}(x) = \phi'_{\gamma,\overline{h(x)}} \circ h \circ \phi_{\alpha,x},$$

pro $x \in U_\alpha \cap \overline{h}^{-1}(U'_\gamma)$.

Lze dokázat, že jsou splněny předpoklady lemmatu 1.2 — odtud pak plyne, že jsou fibrované prostory $\zeta_{\mathcal{A}_0}$, ζ slabě ekvivalentní.

Důkaz. První část důkazu je v [15, Theorem 2], druhá část je podrobněji v [14, Theorem 7]. □

Kapitola 4

Příklady homogenních C*-algeber

Charakterizujme nyní n-homogenní C*-algebry podle toho, čemu je homeomorfní jejich spektrum. U některých popíšeme i konkrétně, jak vypadají. Prvně se věnujme těm, jejichž fibrovaný prostor je ekvivalentní tomu triviálnímu.

4.1 Triviální homogenní C*-algebry

Definice 31. n-homogenní C*-algebru $\mathcal{A}$ nazveme *triviální*, pokud je $\zeta_{\mathcal{A}}$ slabě ekvivalentní triviálnímu fibrovanému prostoru.

Jak vlastně vypadají? Odpověd poskytuje následující věta.

Věta 4.1. *Triviální n-homogenní C*-algebra $\mathcal{A}$ je tvaru $C(X, \mathcal{M}_n)$ pro nějaký kompaktní Hausdorffův prostor X.*

Idea důkazu. Definujme si:

1. $Y(\mathcal{A})$ jako množinu surjektivních *-homomorfismů $\mathcal{A} \to \mathcal{M}_n$ s topologií bodové konvergence,
2. Zobrazení $\widetilde{p} : Y(\mathcal{A}) \to \operatorname{Prim}(\mathcal{A})$ dané předpisem $\widetilde{p} : \varphi \mapsto \varphi^{-1}(0)$,
3. Zobrazení $\widetilde{\phi_\alpha} : U_\alpha \times G \to \widetilde{p}^{-1}(U_\alpha)$ dané předpisem:

$$\widetilde{\phi_\alpha}(P, g)(a) = g^{-1}((a_{ij}^\alpha(P)))$$

Lze ukázat, že $\widetilde{\varsigma_{\mathcal{A}}} = (Y(A), \widetilde{p}, \operatorname{Prim}(\mathcal{A}), G, G, \{U_\alpha\}, \widetilde{\phi_\alpha})$ je fibrovaný prostor a že je dokonce hlavním asociovaným fibrovaným prostorem fibrovaného prostoru $\varsigma_{\mathcal{A}}$.

Dokažme si prvně následující: *n-homogenní C*-algebra $\mathcal{A}$ je tvaru $C(X, \mathcal{M}_n)$ pro nějaký kompaktní Hausdorffův prostor X právě tehdy, když hlavní asociovaný fibrovaný prostor $\widetilde{\zeta_{\mathcal{A}}}$ obsahuje nějaký řez.*

- Předpokládejme, že $\widetilde{\zeta_{\mathcal{A}}}$ má nějaký řez f. Definujme pro $a \in \mathcal{A}$ zobrazení:

$$\overline{a}(P) := f(P)(a)$$

toto zobrazení je zřejmě spojité. Navíc je zobrazení dané předpisem $a \mapsto \overline{a}$ *-homomorfismus $\mathcal{A} \to C(\operatorname{Prim}(\mathcal{A}), \mathcal{M}_n)$. Pokud $\overline{a}(P) = 0$ pro všechna

$P \in \mathrm{Prim}(\mathcal{A})$, pak $a \in \ker f(P)$ pro všechna P. Protože je f řez, patří a do všech primitivních ideálů (a jejich průnik je $\{0\}$ podle věty 2.7), proto je $a = 0$. Tedy $a \mapsto \overline{a}$ je injektivní. Jde navíc ukázat, že je i surjektivní. Celkem jsou $\mathcal{A}$ a $C(\mathrm{Prim}(\mathcal{A}), \mathcal{M}_n)$ izomorfní.

- Nyní předpokládejme, že $\mathcal{A} \cong C(X, \mathcal{M}_n)$. Lze ukázat, že $\mathrm{Prim}(\mathcal{A}) \cong X$.

  Pro každý prvek $P \in \mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ máme surjektivní *-homomorfismus $\theta_P : \mathcal{A} \to \mathcal{M}_n$ (prvek $Y(\mathcal{A})$) definovaný předpisem:

$$\theta_P(a) := a(P), \text{ pro } a \in \mathcal{A}.$$

  Definujme zobrazení $f : \mathrm{Prim}(\mathcal{A}) \to Y(\mathcal{A})$:

$$f(P) := \theta_P$$

  Není těžké ověřit, že je spojité, a že $\widetilde{p} \circ f(P) = P$. Celkem je tedy f řezem.

Podle věty 1.4 je C*-algebra triviální právě tehdy, když asociovaný fibrovaný prostor jejího fibrovaného prostoru obsahuje nějaký řez. To je podle uvedeného tvrzení právě, když je tvaru $C(X, \mathcal{M}_n)$ — důkaz je nyní hotov.

Důkaz. Tvrzení o tvaru hlavního fibrovaném prostoru [14, Theorem 4], zbytek v [14, Theorem 9]. □

Příklad 17. *Pokud je C*-algebra 1-homogenní, je triviální (a tedy i komutativní). Plyne to ihned z toho, že $PU(1)$ je triviální grupa — s pomocí lemmatu [13, Lemma 2.8] lze totiž snadno ověřit, že fibrovaný prostor s triviální grupou je ekvivalentní triviálnímu fibrovanému prostoru.*

Triviální C*-algebry lze rovněž charakterizovat algebraicky pomocí takzvané Amitsurovy–Levitzkého polynomiální identity (jak zmiňují autoři v [1]):

Věta 4.2. *C*-algebra $\mathcal{A}$ je izomorfní $C(X, \mathcal{M}_n)$ pro kompaktní prostor X právě tehdy, když:*

1. *Pro všechny prvky $a_1, a_2, \ldots, a_{2n} \in \mathcal{A}$ je:*

$$\sum_{\sigma \in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(2n)} = 0,$$

   kde S_m je grupa symetrií na množině m.
2. *Existuje podalgebra $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ se stejnou jednotkou, která je izomorfní algebře $\mathcal{M}_n$.*

Formulujme lemma, které nám popisuje, jak vypadají fibrované prostory se stažitelnou bazí.

Lemma 4.3. *Nechť ζ je fibrovaný prostor s bazí X, kde X je stažitelný a navíc je typu C_σ (tj. z každého pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí). Pak ζ je ekvivalentní triviálnímu fibrovanému prostoru.*

Důkaz. [13, Corollary 11.6] □

Důsledek 4.1. *Nechť X je kompaktní topologický prostor, který je navíc stažitelný. Pak existuje až na izomorfismus n-homogenní C*-algebra taková že* $\mathrm{Prim}(\mathcal{A}) \cong X$.

Důkaz. Podle 4.3 je fibrovaný prostor ζ ekvivalentní triviálnímu fibrovanému prostoru. Tedy $\mathcal{A} = C(X, \mathcal{M}_n)$ je jediná n-homogenní C*-algebra s požadovanou vlastností. □

Poznámka. U W*-algeber máme podobný pojem W*-algebry typu I_λ, což je taková W*-algebra, která obsahuje λ navzájem kolmých ekvivalentních abelovských projekcí, jejichž součet je 1 (v literatuře se také označují jako *homogenní*). V [12, 2.3.3.] je dokázáno, že W*-algebra typu I_λ je izomorfní $C(X) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pro vhodné X. Navíc $\dim \mathcal{H} = \lambda$. Teorie homogenních W*-algeber pro přirozené λ je tedy „triviální“.

Na druhou stranu, netriviálních homogenních C*-algeber je „dostatek“ - věta [14, Theorem 10] říká, že pro každé n existuje nějaká netriviální n-homogenní C*-algebra. Její důkaz spočívá v nalezení fibrovaných prostorů s grupou $PU(n)$, kompaktní bazí X a s vláknem $\mathcal{M}_n$, které nejsou ekvivalentní triviálnímu fibrovanému prostoru.

Poznámka. Podle [2, IV.1.4.6] platí, že C*-algebra $\mathcal{A}$ je n-homogenní právě tehdy, když je Von Neumannova algebra $\mathcal{A}^{**}$ typu I_n (kde ** označuje druhý duální prostor Banachova prostoru[1].

4.2 C*-algebry nad suspenzí

Popišme, jak vypadají triviální a netriviální n-homogenní C*-algebry, jejichž spektrum je homeomorfní suspenzi SX některého kompaktního topologického prostoru X.
Pro funkci $f : SX_+ \amalg SX_- \to \mathcal{M}_n$ označme $f_\pm$ zúžení na $SX_\pm$

Věta 4.4. *Nechť $\mathcal{A}$ n-homogenní C*-algebra, jejíž spektrum je homeomorfní suspenzi SX některého kompaktního topologického prostoru. Pak je izomorfní C*-algebře $C_g(SX_+ \amalg SX_-, \mathcal{M}_n)$ spojitých funkcí*

$$f : SX_+ \amalg SX_- \to \mathcal{M}_n, \tag{4.1}$$

pro které $f_+(x) = g(x) \cdot f_-(x)$, $x \in \epsilon X$ pro nějakou spojitou funkci $g : \epsilon X \to PU(n)$ (zde připomeňme, že $\cdot$ značí levou efektivní akci grupy $PU(n)$ na $\mathcal{M}_n$). Navíc pokud je g' homotopní g, je $\mathcal{A}$ izomorfní $C_{g'}(SX_+ \amalg SX_-, \mathcal{M}_n)$.

Idea důkazu. Lze dokázat, že pokud je $\zeta_\mathcal{A}$ fibrovaný prostor nad SX, je zobrazení α, které řezu f v ζ přiřadí prvek z $C_{c_\zeta}(SX_+ \amalg SX_-, \mathcal{M}_n)$ zadaný jako

$$\alpha(f) = \begin{cases} \mathrm{pr}_2 \phi_+ f_+, \text{ pro } x \in SX_+ \subset SX_+ \amalg SX_- \\ \mathrm{pr}_2 \phi_- f_-, \text{ pro } x \in SX_- \subset SX_+ \amalg SX_- \end{cases}$$

[1] Lze skutečně dokázat, že je druhý duální prostor C*-algebry von Neumannovou algebrou. Anglicky se jí říká *enveloping Von Neumann algebra.*

korektně definované a navíc je izomorfismus (zde c_ζ značí charakteristickou funkci fibrovaného prostoru ζ ze sekce 1.3). $\mathcal{A}$ je izomorfní řezům ve fibrovaném prostoru $\zeta_{\mathcal{A}}$ podle věty 3.5, odtud plyne první část tvrzení.
Pokud je g homotopicky ekvivalentní c_ζ, podle věty 1.6 se jedná o C*-algebry řezů na ekvivalentních fibrovaných prostorech — tedy jsou podle věty 3.6 izomorfní.

Důkaz. [10, 2.5] □

4.3 C*-algebry nad sférou

Použijme nyní znalosti homotopií z třetí sekce první kapitoly k popisu těch n-homogenních C*-algeber $\mathcal{A}$, pro které je $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ homeomorfní S^n pro různá n.

Věta 4.5. *Pro homotopické grupy $PU(n)$ platí:*

$$\pi_k(PU(n)) \cong \begin{cases} 0 & \text{pokud } k = 0, \\ \mathbb{Z}_n & \text{pokud } k = 1, \\ \pi_k(U(n)) \cong \pi_k(SU(n)) & \text{pokud } k \geq 2. \end{cases}$$

Důkaz. Dokažme si tvrzení pro $k = 0, 1$ (kompletní důkaz lze nalézt v [10, Lemma 2.7 (iii)]). Pro $k = 0$ plyne výsledek z obloukové souvislosti $PU(n)$.

Pro $k = 1$ uvažme následující exaktní posloupnost:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_n \xrightarrow{j} SU(n) \xrightarrow{p} SU(n)/Z(SU(n)) \longrightarrow 0$$

Kde j je vložení dané předpisem $j(k+n\mathbb{Z}) = e^{2\pi \cdot i \frac{k}{n}} \cdot I_n$, kde I_n je identická matice a p je kanonická projekce. Je navíc známým tvrzením, že $PU(n) \cong SU(n)/Z(SU(n))$ a také, že $SU(n)$ je jednoduše souvislý[2]. Zobrazení p je pak tzv. *univerzálním nakrytím* $PU(n)$ pro $n \geq 2$ — odtud platí, že je fundamentální grupa $PU(n)$ rovna jádru p, což je právě $\mathbb{Z}_n$. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé.

□

Věta 4.6. *Existuje jediná n-homogenní C*-algebra $\mathcal{A}$, pro kterou* $\mathrm{Prim}(\mathcal{A}) \cong S^1$.

Důkaz. Z obloukové souvislosti $PU(n)$ víme, že je grupa $\pi_0(PU(n))$ triviální. Podle důsledku 1.1 jsou prvky této grupy v bijekci s po dvou neekvivalentními bandly — existuje tedy jediný (triviální) bandl s bazí S^1 a grupou $PU(n)$, a tedy i jediná daná (triviální) n-homogenní C*-algebra. □

Věta 4.7. *Existuje n po dvou neizomorfních n-homogenních C*-algeber, pro které je* $\mathrm{Prim}(\mathcal{A}) \cong S^2$.

Důkaz. Výsledek plyne z analogické úvahy jako v předchozí větě a také z toho, že $\pi_1(PU(n)) = \mathbb{Z}_n$. □

[2] Je souvislý a každou smyčku lze spojitě deformovat do jediného bodu.

Věnujme se konkrétnímu popisu těchto C*-algeber. Chápejme $S^2_\pm$ jako podmnožiny $\mathbb{C}$ a S^1 jako množinu $\{z \in \mathbb{C}, z\overline{z} = 1\}$.

Věta 4.8. *Každá n-homogenní C*-algebra, pro kterou je* $\operatorname{Prim}(\mathcal{A}) \cong S^2$*, je izomorfní pro některé* $k = 0, 1, \dots, n-1$ *C*-algebře* A_k *funkcí* $f : S^2_+ \amalg S^2_- \to \mathcal{M}_n$*, pro které platí:*

$$f_+(z) = g'_k(z) \cdot f_-(z) = \operatorname{diag}(z^k, 1, \dots, 1) \cdot f_-(z) \cdot \operatorname{diag}(\overline{z}^k, 1, \dots, 1)$$

Kde $z \in S^2_+ \cap S^2_- = S^1$

Důkaz. Uvažme bandl $\zeta = (U(n), q, PU(n), S^1)$, kde q je kanonická projekce. Lze ověřit, že je skutečně $q^{-1}(x) \cong S^1$ a že má ζ strukturu fibrovaného prostoru. S pomocí věty 1.5 dostáváme exaktní posloupnost:

$$\pi_1(S^1) \xrightarrow{j_*} \pi_1(U(n)) \xrightarrow{q_*} \pi_1(PU(n)) \xrightarrow{d_1} \pi_0(S^1)$$

Je známým tvrzením, že můžeme provést následující ztotožnění: $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(U(n)) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_0(S^1) = 0$. Navíc jsme dokázali, že $\pi_1(PU(n)) \cong \mathbb{Z}_n$.

Z exaktnosti posloupnosti ihned plyne, že $\ker q_* \cong n\mathbb{Z}$ — odtud $\operatorname{im} j_* \cong n\mathbb{Z}$. Protože 1 je generátor $\pi_1(S^1)$, musí být $j_*(1) = \pm n$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme že $j_*(1) = n$.

Lze ověřit, že determinant $\det : U(n) \to S^1$ indukuje izomorfismus na homotopických grupách $\pi_1(U(n))$, $\pi_1(S^1)$. Vezměme si zobrazení $f_k : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^k$, pro $k \in \mathbb{Z}$, které zřejmě v izomorfismu $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ odpovídá prvku k. Nyní si vezměme prvek $\det_*^{-1} f_k \in \pi_1(U(n))$, lze jej reprezentovat např. homotopickou třídou zobrazení $z \mapsto \operatorname{diag}(z^k, 1, \dots, 1)$.

Položme $f'_k = q \circ f_k$. Není teď těžké ověřit, že pro $k = 0, \dots, n-1$ třídy homotopických ekvivalencí zobrazení $\{f'_k\}$ jsou právě různé prvky $\pi_1(PU(n)) \cong \mathbb{Z}_n$.

Z vět 4.4 a 1.6 nyní plyne tvrzení. □

Věta 4.9. *Existuje jediná n-homogenní C*-algebra* $\mathcal{A}$*, pro kterou* $\operatorname{Prim}(\mathcal{A}) \cong S^3$.

Důkaz. Protože je $\pi_2(SU(n)) = 0$, existuje jediná (triviální) homogenní C*-algebra. □

V práci [10] lze rovněž najít konkrétní popisy C*-algeber se spektrem S^4, S^5.

4.4 Další homogenní C*-algebry

Homogenním C*-algebrám, jejichž spektrem je torus (neboli prostor $S^1 \times S^1$), se věnují Disney a Raeburn v práci [4] z roku 1985. Využívají přitom mimo jiné teorii C*-dynamických systémů a kovariantních reprezentací.

Označme pro matici H symbolem Ad H k ní adjungovanou matici.

Věta 4.10. *Nechť* $U : S^1 \to U(n)$ *je spojité zobrazení. Označme*

$$A_U := \{a \in C(I \times S^1, \mathcal{M}_n), a(1, z) = Ad\ U(z)(z)(a(0, z)), z \in S^1\}.$$

Pak je každá n-homogenní C-algebra* $\mathcal{A}$*, pro kterou* $\operatorname{Prim}(\mathcal{A}) \cong S^1 \times S^1$*, je izomorfní* A_U *pro nějaké* $U \in U(n)$.

Důkaz. [4, Proposition 2.7] □

Homogenní C*-algebry s tímto spektrem jsou navíc úzce spjaty s *C*-algebrami racionálních rotací* — každá n-homogenní C*-algebra se spektrem $(S^1)^2$ je izomorfní tenzorovému součinu C*-algebry racionálních rotací a C*-algebry matic. Dále platí, že n-homogenní C*-algebra se spektrem homeomorfním $(S^1)^3$ je izomorfní $B \otimes C(S^1)$, kde B je homogenní, jejíž spektrum je homeomorfní $S^1 \times S^1$. Autoři práce končí poznámkou, že existuje nekonečně mnoho vzájemně neizomorfních C*-algeber se spektrem homeomorfním $(S^1)^4$.

Závěr

Konceptu fibrovaných prostorů se při popisu n-homogenních C*-algeber lze vyhnout (a zavést místo nich něco jiného), použijeme-li přístup Piotra Niemce v práci [11] z roku 2012.

Takzvaný n-space $(X, .)$ je dvojice lokálně kompaktního Hausdorffova prostoru X a spojité volné (ne nutně tranzitivní) akce grupy $PU(n)$ na něm. Označme $C^*(X, .)$ ty prvky $f \in C_0(X, \mathcal{M}_n)$, pro které:

$$f(\mathfrak{u}.x) = U^{-1} f(x) U, \text{ pro } x \in X, \mathfrak{u} \in PU(n),$$

kde $\mathrm{pr}(U) = \mathfrak{u}$ v kanonické projekci.

Lze pak ukázat, že každá n-homogenní C*-algebra je izomorfní C*-algebře $C^*(X, .)$ pro vhodný n-space $(X, .)$.

Poznámka. Tento přístup by se dal možná využít k charakterizaci některých triviálních a netriviálních n-homogenních C*-algeber — pokud bude člověk schopný popsat některé volné akce grupy $PU(n)$ na vhodných prostorech.

Celkem jsme se v práci seznámili se základními vlastnostmi fibrovaných prostorů a jejich souvislosti s teorií homotopií, například že vlákno, báze a totální prostor tvoří exaktní posloupnost. Také jsme se seznámili s C*-algebrami — s vlastnostmi jejich primitivního spektra nebo s vlastnostmi jejich reprezentací. Mimo jiné jsme také elementárně dokázali, že komutativní C*-algebry jsou 1-homogenní. Potom jsme se věnovali tvrzením, která například popisují, že ke každé n-homogenní C*-algebře lze zvolit fibrovaný prostor, a že n-homogenní C*-algebry jsou izomorfní právě tehdy, když jsou tyto fibrované prostory slabě ekvivalentní. V poslední kapitole jsme si dokázali, jaký mají triviální homogenní C*-algebry tvar, následně jsme se věnovali C*-algebrám, jejichž spektrum je suspenze kompaktního topologického prostoru nebo k-dimenzionální sféra.

Prací o homogenních C*-algebrách je několik a často je u nich nutná hlubší znalost C*-algeber nebo operátorových algeber. Autor se domnívá, že tento text by mohl sloužit jako úvod do dané problematiky.

Seznam použité literatury

[1] Anatoly Antonevich and Naum Krupnik. On trivial and non-trivial n-homogeneous C^* algebras. *Integral Equations Operator Theory*, 38(2):172–189, 2000.

[2] Bruce Blackadar. *Operator algebras theory of C^*-algebras and von Neumann algebras*. 2017. [Dostupné online na https://wolfweb.unr.edu/homepage/bruceb/Cycr.pdf, cit. 15.5.2018].

[3] Matej Brešar. *Introduction to noncommutative algebra*. Universitext. Springer, Cham, 2014.

[4] Shaun Disney and Iain Raeburn. Homogeneous C^*-algebras whose spectra are tori. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 38(1):9–39, 1985.

[5] Jacques Dixmier. *C^*-algebras*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam--New York-Oxford, 1977. Translated from the French by Francis Jellett, North--Holland Mathematical Library, Vol. 15.

[6] J. M. G. Fell. The dual spaces of C^*-algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 94:365–403, 1960.

[7] J. M. G. Fell. The structure of algebras of operator fields. *Acta Math.*, 106:233–280, 1961.

[8] Dale Husemoller. *Fibre bundles*, volume 20 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1994.

[9] Irving Kaplansky. The structure of certain operator algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 70:219–255, 1951.

[10] Fritz Kraußand Terry C. Lawson. Examples of homogeneous C^*-algebras. pages 153–164. Mem. Amer. Math. Soc., No. 148, 1974.

[11] Piotr Niemiec. Elementary approach to homogeneous C^*-algebras. *Rocky Mountain J. Math.*, 45(5):1591–1630, 2015.

[12] Shôichirô Sakai. *C^*-algebras and W^*-algebras*. Springer-Verlag, New York--Heidelberg, 1971. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 60.

[13] Norman Steenrod. *The topology of fibre bundles.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999. Reprint of the 1957 edition, Princeton Paperbacks.

[14] Jun Tomiyama and Masamichi Takesaki. Applications of fibre bundles to the certain class of C^*-algebras. *Tôhoku Math. J. (2)*, 13:498–522, 1961.

[15] N. B. Vasilev. C^*-algebras with finite-dimensional irreducible representations. *Uspehi Mat. Nauk*, 21(1 (127)):135–154, 1966.