

Logika

Logika se zabývá (logickým) vyplýváním a jeho převáděním na řetězce elementárních odvození {inferencí}, které jsou „významem“ určitých slůvek jazyka.

Logika studuje a standardizuje inferenční strukturu jazyka.

1 Klasický výrokový počet

1.1 Syntax

1.1.1 Abeceda výrokového počtu

1. $a, b, c, \dots, a_1, a_2, a_3, \dots$ atomické výroky {výrokové proměnné}
2. $\neg, \rightarrow$ (výrokové) operátory {spojky, výrokovtorné funktory}
3. $(,)$ levá a pravá závorka

1.1.2 Definice výroků

- (i) Každý atomický výrok je výrok.
- (ii) Je-li A výrok, je i $\neg A$ výrok.
- (iii) Jsou-li A, B výroky, je i $(A \rightarrow B)$ výrok.
- (iv) Nemá jiných výroků.

Symbole A, B nejsou symbole výrokového počtu; jsou to metasymbole, kterým budeme říkat parametry.

Příklady výroků: $a, b, \neg a, (b \rightarrow a), ((b \rightarrow a) \rightarrow \neg a), (\neg((b \rightarrow a) \rightarrow \neg a) \rightarrow (b \rightarrow a)), \dots$

Výrok si lze představovat jako oznamovací větu, o níž má smysl říci, že je pravdivá nebo nepravdivá.

Symbol $\neg A$ se nazývá *negace* výroku A . Je ho možno číst: „Není pravda, že A “, „neplatí A “, „ne A “.

Symbol $A \rightarrow B$ se nazývá *implikace* s *antecedentem* {předpokladem} A a *konsekvencí* {důsledkem} B . Lze ho číst „Z A plyne B “, „jestliže A pak B “, „když A tak B “.

1.1.3 Konvence zjednodušující zápis

- Vnější závorky budeme vynechávat, tj. budeme psát $b \rightarrow a, (b \rightarrow a) \rightarrow \neg a$ a podobně.
- Zavedeme nové spojky (symbol := čteme „je definováno jako“)
 - $A \vee B := \neg A \rightarrow B$ (inkluzivní) disjunkce, alternativa; „ A nebo B “
 - $A \mid B := A \rightarrow \neg B$ neslučitelnost; „ A je neslučitelné s B “
 - $A \wedge B := \neg(A \rightarrow \neg B)$ konjunkce, „ A a B “, „současně platí A i B “
 - $A \leftrightarrow B := (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ ekvivalence, „ A právě tehdy, když B “
 - $A \nleftrightarrow B := \neg(A \leftrightarrow B)$ exkluzivní disjunkce, nonekvivalence, „buď A anebo B “
 - $A \nrightarrow B := \neg(A \rightarrow B)$ inhibice
 - $A \downarrow B := \neg A \wedge \neg B$ „ani A ani B “

1.2 Axiomatika

1.2.1 Axiomy výrokového počtu

- (1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- (2) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
- (3) $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
- (4) $\neg\neg A \rightarrow A$

1.2.2 Odvozování a důkazy

- Odvozovací pravidlo modus ponens: z výroků $A \rightarrow B$ a A plyne výrok B .

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

- Odvození výroku A z výroků $A_1, A_2, \dots, A_n$: konečná posloupnost výroků, jejímž posledním členem je výrok A a jejíž každý člen je buď axiomem, některým z výroků $A_1, A_2, \dots, A_n$, nebo plyne z výroků vyskytujících se před ním pomocí pravidla modus ponens.
 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vdash A$ — „výrok A lze odvodit z výroků $A_1, A_2, \dots, A_n$ “
- Důkaz výroku A : odvození výroku A bez předpokladů, z prázdné množiny předpokladů.
 $\vdash A$ — existuje důkaz výroku A {výrok A je dokazatelný}
Teorém je výrok, ke kterému existuje důkaz, dokazatelný výrok.
- Věta o dedukci: jestliže výrok B lze odvodit z výroku A , pak výrok $A \rightarrow B$ je teorémem.

$$\{A\} \vdash B \Rightarrow \vdash A \rightarrow B$$

(Metasymbol $\Rightarrow$ čteme „plyne“, „jestliže ..., pak ...“. Jedná se tedy o implikaci; nikoliv ale o implikaci v jazyce výrokové logiky, ale „v jazyce, kterým mluvíme“.)

Obecněji: Jestliže výrok A lze odvodit z výroků $A_1, A_2, \dots, A_n$, pak výrok $A_n \rightarrow A$ lze odvodit z výroků $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$.

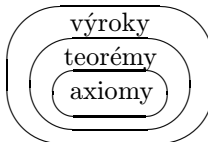
$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vdash A \Rightarrow \{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\} \vdash A_n \rightarrow A$$

Obecně:

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vdash A \Rightarrow \vdash A_1 \rightarrow (\dots (A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow A)) \dots)$$

Odvození výroku B z výroku A lze považovat za důkaz výroku $A \rightarrow B$.

Teorém lze považovat za zkratku pro nějakou posloupnost výroků v odvození nebo důkazu. Vše, co je dokázáno, lze použít při dalším dokazování.



Příklady odvození a důkazů: V komentářích ke krokům důkazu budeme používat symboly typu

$(\alpha), D \mapsto E$ — „byl použit axiom α a v něm byl výrok D nahrazen výrokem E “

$\gamma. \delta.$ — „na řádky γ a δ bylo použito pravidlo modus ponens“

1) $\{A, \neg A\} \vdash B$ (Ex imposibili sequitur quodlibet)

1. A
2. $\neg A$
3. $A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$
4. $\neg B \rightarrow A$
5. $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B)$
6. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B$
7. $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
8. $\neg B \rightarrow \neg A$
9. $\neg \neg B$
10. $\neg \neg B \rightarrow B$
11. B

předpoklad
předpoklad
(1), $B \mapsto \neg B$
1. 2.
(2), $A \mapsto \neg B$, $B \mapsto A$
4. 5.
(1), $A \mapsto \neg A$, $B \mapsto \neg B$
2. 7.
6. 8.
(4), $A \mapsto B$
9. 10.

2) $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \vdash A \rightarrow C$ (Tranzitivita implikace)

1. $A \rightarrow B$
2. $B \rightarrow C$
3. $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
4. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
5. $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
6. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$
7. $A \rightarrow C$

předpoklad
předpoklad
(1), $A \mapsto B \rightarrow C$, $B \mapsto A$
2. 3.
(3)
4. 5.
1. 6.

3) $\vdash A \rightarrow A$

1. $A \rightarrow (A \rightarrow A)$
2. $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$
3. $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$
4. $((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$
5. $A \rightarrow A$

(1), $B \mapsto A$
(1), $B \mapsto A \rightarrow A$
(3), $B \mapsto A \rightarrow A$, $C \mapsto A$
2. 3.
1. 4.

Tentýž výsledek lze dokázat podstatně úsporněji. Udvození $\{A\} \vdash A$ má jediný člen, výrok A . Z věty o dedukci pak plyne $\vdash A \rightarrow A$.

4) $\vdash A \rightarrow \neg \neg A$

Ukážeme $\{A\} \vdash \neg \neg A$; dokazované tvrzení pak plyne z věty o dedukci.

1. A
2. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$
3. $\neg A \rightarrow A$
4. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg A)$
5. $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg A$
6. $\neg A \rightarrow \neg A$
7. $\neg \neg A$

předpoklad
(1), $B \mapsto \neg A$
1. 2.
(2), $A \mapsto \neg A$, $B \mapsto A$
3. 4.
teorém 3), $A \mapsto \neg A$
5. 6.

1.2.3 Transformační pravidla

Pokud $\{A\} \vdash B$ a současně $\{B\} \vdash A$ (což lze ekvivalentně zapsat „ $\vdash A \rightarrow B$ a současně $\vdash B \rightarrow A$ “), pak lze výrok A nahradit výrokem B a naopak. Symbolicky:

$$\{A\} \vdash B, \{B\} \vdash A \Rightarrow A \sim B$$

Metasymbol $\sim$ čteme „lze nahradit“, „je logicky ekvivalentní“

Důležitá transformační pravidla:

$$\neg \neg A \sim A$$

$$\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$$

de Morganova pravidla

$$\neg(A \rightarrow B) \sim A \wedge \neg B$$

$$A \rightarrow B \sim \neg B \rightarrow \neg A \sim \neg A \vee B \sim \neg(A \wedge \neg B)$$

$$A \vee B \sim B \vee A, A \wedge B \sim B \wedge A$$

komutativní zákony

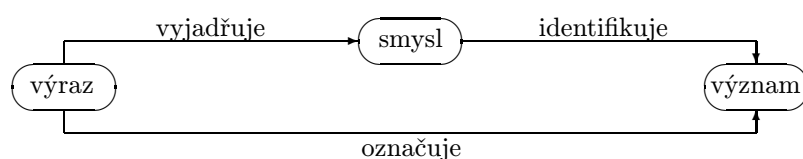
$$(A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C), (A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C)$$

asociativní zákony

$$(A \vee B) \wedge C \sim (A \wedge C) \vee (B \wedge C), (A \wedge B) \vee C \sim (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

distributivní zákony

1.3 Sémantika



Význam výroku: právě jedna z dvojice hodnot „pravda“, „nepravda“; nebo **P,N**; nebo 0,1. Tzv. *pravdivostní hodnota*.

1.3.1 Interpretace jazyka klasického výrokového počtu

Přiřazení významu každému výroku tak, že

- (i) Význam negace $\neg A$ je **P** právě tehdy, když význam výroku A je **N**.
- (ii) Význam implikace $A \rightarrow B$ je **N** právě tehdy, když význam výroku A je **P** a význam výroku B je **N**.

Význam výroku je spočitatelný z významů atomických výroků, které ho tvoří, podle tabulek:

A	$\neg A$	A	B	$A \rightarrow B$	$A \vee B$	$A \downarrow B$	$A \wedge B$	$A \leftrightarrow B$
N	P	N	N	P	N	P	N	P
N	P	N	P	P	P	P	N	N
P	N	P	N	N	P	P	N	N
P	N	P	P	P	P	N	P	P

Při užívání pravdivostních hodnot 0, 1 a označení pravdivostní hodnoty výroku A symbolem $|A|$, lze význam výroků spočítat podle formulí:

$$|\neg A| = 1 - |A|$$

$$|A \rightarrow B| = \begin{cases} 1, & |A| \leq |B| \\ 0, & |A| > |B|, \end{cases} \quad \text{tj. } |A \rightarrow B| = \max\{1 - |A|, |B|\}$$

$$|A \vee B| = \max\{|A|, |B|\}$$

$$|A \downarrow B| = \max\{1 - |A|, 1 - |B|\}$$

$$|A \wedge B| = \min\{|A|, |B|\}$$

$$|A \leftrightarrow B| = \min\{\max\{1 - |A|, |B|\}, \max\{|A|, 1 - |B|\}\}$$

$$|A \downarrow B| = 1 - \max\{|A|, |B|\}$$

1.3.2 Další pojmy související s interpretací

- *Tautologie* — výrok, který má při každé interpretaci význam **P**
- *Kontradikce* — výrok, který má při každé interpretaci význam **N**
- Výrok A *vyplývá* z výroků $A_1, A_2, \dots$ (konečně nebo spočetně¹ mnoha) — při každé interpretaci v níž je význam každého z výroků $A_1, A_2, \dots$ roven **P**, je význam výroku A také **P**.
- Výroky $A_1, A_2, \dots$ jsou *sémanticky konzistentní* — existuje interpretace, která všem přiřadí význam **P**.

Tautologie vyplývá z prázdné množiny výroků.

Množina výroků je *sémanticky konzistentní* právě tehdy, když neobsahuje nějaký výrok spolu s jeho negací.

1.3.3 Významné tautologie

$A \vee \neg A, \neg(A \wedge \neg A)$	zákon vyloučení třetího
$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B), (A \wedge \neg A) \rightarrow B$	zákon Dunse Scota
$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$	transitivita implikace
$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$	modus ponens
$(\neg B \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow \neg A$	modus tollens
$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	nepřímý důkaz
$((A \wedge \neg B) \rightarrow (C \wedge \neg C)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	důkaz sporem
$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	reductio ad absurdum
$((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$	dedukce

1.3.4 Vlastnosti klasického výrokového počtu

- *Korektnost* — každý teorém je tautologií (co lze dokázat, je pravda).
- *Úplnost* — každá tautologie je teorém (co je pravda, lze dokázat).
- *Rozhodnutelnost* — o každém výroku lze rozhodnout, zda je tautologií nebo ne (zda je pravdivý nebo ne).
- *Kompaktnost* — Pokud výrok vyplývá z nějaké množiny výroků, pak vyplývá z nějaké její konečné podmnožiny.
- Výrok A vyplývá z výroků $A_1, A_2, \dots, A_n$ právě tehdy, když výrok A lze odvodit z výroků $A_1, A_2, \dots, A_n$

2 Predikátový počet

2.1 Syntax

2.1.1 Abeceda predikátového počtu

1. Konečně nebo spočetně mnoho znaků pro objekty (tzv. individuové proměnné),
2. konečný počet znaků pro predikáty,
3. výrokové operátory $\neg, \rightarrow (\vee, \mid, \wedge, \leftrightarrow, \Leftrightarrow, \Rightarrow, \Downarrow)$,
4. obecný kvantifikátor $\forall$,

¹Sousloví „spočetně mnoho“ znamená „přesně tolik, kolik je přirozených čísel“, tj. čísel 1, 2, 3, ...

5. konečný počet znaků pro individua („pojmenované objekty“, tzv. konstanty),
6. závorky (,).

Predikát je nějaká vlastnost, kterou objekt nebo skupina objektů může mít. Každý predikát má *místnost* (*aritu*); údaj, kolika objektů se týká — jednomístný (unární) predikát vypovídá o jednom objektu, dvómístný (binární) o dvou objektech, trojmístný (ternární) o třech objektech atd. U vícemístných predikátů záleží na pořadí, v jakém jsou objekty, k nimž se predikát vztahuje, uvedeny. Obvykle zapisujeme:

symbol n -árního predikátu (první objekt, druhý objekt, ..., n -tý objekt);

speciální predikáty však mají zvláštní způsob zápisu.

Obecný kvantifikátor zastupuje slůvka „pro všechny“, „každý objekt“.

Podobně jako v případě výrokové logiky byly operátory $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\downarrow$ zavedeny pomocí operátorů $\neg$ a $\rightarrow$ (a proto nejsou součástí základní abecedy výrokového počtu), lze pomocí obecného kvantifikátoru $\forall$ a negace $\neg$ definovat existenční kvantifikátor $\exists$,

$$(\exists a) := \neg(\forall a)\neg ;$$

ten zastupuje slůvka „pro nějaký“, „existuje (aspoň jeden) objekt“.

Příklady objektů a predikátů:

- Objekty — kuličky v plátěném pytlíku
 Predikáty — unární: $\mathcal{H}$ („je hliněná“), $\mathcal{S}$ („je skleněná“)
 binární: $\mathcal{V}$ („je vzácnější“)
 $\mathcal{H}(a)$ — „kulička a je hliněná“, $\mathcal{S}(b)$ — „kulička b je skleněná“, $\mathcal{V}(a, b)$ — „kulička a je vzácnější než kulička b “, $\mathcal{V}(\mathcal{S}(a), \mathcal{H}(a))$ — „skleněná kulička je vzácnější než hliněná“
- Objekty — čísla
 Binární predikát — $<$ („je menší než“)
 $<(a, b)$ — „číslo a je menší než číslo b “; obvyklejší způsob zápisu je $a < b$.
- Objekty — jedinci z nějaké bisexuální populace
 Ternární predikát — $\mathcal{R}$ („jsou matkou a otcem jedince“)
 $\mathcal{R}(a, b, x)$ — „ a je matkou a b je otcem jedince x “, „jedinec x má matku a a otce b “

2.1.2 Slova predikátového počtu

- *Slovo*: libovolná konečná posloupnost znaků z abecedy predikátového počtu.
- Individuová proměnná x je *vázaná* ve slově φ : posloupnost znaků $\forall x$ nebo $\exists x$ je částí slova φ .
- Individuová proměnná x je *volná* ve slově φ : proměnná x není ve slově φ vázaná.
- Individuová proměnná x je *podstatně volná* ve slově φ : proměnná x je částí slova φ a je volná ve slově φ .
- Slova φ a ψ jsou *slučitelná*: žádná proměnná, která je podstatně volná v jednom ze slov φ , ψ není vázaná ve druhém z nich.

Příklady:

- $(\forall x)\mathcal{R}(x, y)$ je slovo; proměnná x je v něm vázaná, proměnné y a z jsou v něm volné, proměnná y je v něm podstatně volná.
- Slova $(\forall x)\mathcal{R}(x, y)$ a $(\exists y)\mathcal{Q}(y)$ nejsou slučitelná.
- Slova $(\forall x)\mathcal{R}(x, y)$ a $(\exists z)\mathcal{Q}(z)$ jsou slučitelná.

2.1.3 Formule predikátového počtu

- *Atomická formule (primitivní predikát)*: Je-li $\mathcal{P}$ znak pro n -místný predikát a $t_1, t_2, \dots, t_n$ jsou individuové proměnné nebo konstanty, pak $\mathcal{P}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je atomická formule.
- Definice formule:
 - (i) Každá atomická formule je formule.
 - (ii) Je-li φ formule, pak také $\neg(\varphi)$ je formule.
 - (iii) Jsou-li φ a ψ formule, pak také $(\varphi) \rightarrow (\psi)$ je formule.
 - (iv) Je-li φ formule a individuová proměnná x není ve slově φ vázaná, pak také $(\forall x)\varphi$ je formule.
 - (v) Není jiných formulí.

Formule se nazývá *uzavřená*, nevyskytuje-li se v ní podstatně volná proměnná. Každé dvě uzavřené formule jsou slučitelné.

Příklady formulí predikátového počtu:

Predikáty jsou stejné jako v 2.1.1

- $(\forall a)\mathcal{V}(\mathcal{S}(a), \mathcal{H}(a))$ — „každá skleněná kulička je vzácnější než hliněná“.
- $(\forall x)(\exists y)x < y$ — „ke každému číslu x existuje číslu y , že x je menší než y “, „ke každému číslu existuje číslu větší“, „neexistuje největší číslo“; poslední formulaci je také možno formálně zapsat jako $\neg((\exists y)(\forall x)x < y)$.
- $(\forall x)(\exists a)(\exists b)\mathcal{R}(a, b, x)$ — „každý jedinec z bisexuální populace má svou matku a svého otce“

2.2 Axiomatika

2.2.1 Axiomy predikátového počtu

$$(V1) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(V2) \quad (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$$

$$(V3) \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \vartheta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \vartheta))$$

$$(V4) \quad \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$$

(R1) Je-li x individuová proměnná nebo konstanta, pak $x = x$ je axiom.

(R2) Jsou-li $x_1, x_2, \dots, x_n$ a $t_1, t_2, \dots, t_n$ individuové proměnné nebo konstanty a $\mathcal{P}$ je n -místný predikát, pak

$$(x_1 = t_1 \wedge x_2 = t_2 \wedge \dots \wedge x_n = t_n \wedge \mathcal{P}(x_1, x_2, \dots, x_n)) \rightarrow \mathcal{P}(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

je axiom.

(S) Je-li $\varphi(x)$ formule, v níž je individuová proměnná x podstatně volná a t je konstanta nebo individuová proměnná, která není ve formuli $\varphi(x)$ vázaná ani podstatně volná, pak

$$(\forall x)\varphi(x) \rightarrow \varphi(t)$$

je axiom.

(D) Je-li φ formule, v níž proměnná x není podstatně volná a ψ je formule, v níž není proměnná x vázaná, pak

$$(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$$

je axiom.

Axiomy (V1)–(V4) jsou axiomy klasického výrokového počtu, axiomy (R1) a (R2) se nazývají *axiomy rovnosti*, axiom (S) se nazývá *axiom specifikace* a axiom (D) se nazývá *axiom distribuce*.

2.2.2 Odvozovací pravidla a důkazy

- Pravidlo modus ponens: z formulí $\varphi \rightarrow \psi$ a φ plyne formule ψ .

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi}$$

- Pravidlo generalizace: Je-li φ formule, v níž je proměnná x volná, pak z formule φ plyne formule $(\forall x)\varphi$.

$$\frac{\varphi}{(\forall x)\varphi}$$

- Odvození formule φ z formulí $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$: konečná posloupnost formulí, jejímž posledním členem je formule φ a jejíž každý člen je buď axiomem predikátového počtu, některou z formulí $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, nebo plyne z formulí vyskytujících se před ní pomocí pravidla modus ponens nebo pravidla generalizace.

$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi$ — „formuli φ lze odvodit z formulí $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ “

- Důkaz formule φ : odvození formule φ bez předpokladů, z prázdné množiny předpokladů.
 $\vdash \varphi$ — „existuje důkaz formule φ “ {„formule φ je dokazatelná“}
 Dokazatelná uzavřená formule se nazývá *teorém*.

3 Axiomatická teorie

Vytvořit teorii $\mathcal{T}$ znamená

1. vymezit objekty, které mohou být symbolicky zapsány individuovými proměnnými nebo konstantami {stanovit *universum objektů*};
2. zvolit konkrétní predikáty;
3. zvolit *axiomy teorie* — uzavřené formule, které prohlásíme za pravdivé.

Důkaz formule φ v teorii $\mathcal{T}$ je odvození formule φ z axiomů teorie $\mathcal{T}$. Formule *dokazatelná v teorii $\mathcal{T}$* je formule, k níž existuje důkaz.

$\mathcal{T} \vdash \varphi$ — formule φ je dokazatelná v teorii $\mathcal{T}$.

Formule φ je *rozhodnutelná v teorii $\mathcal{T}$* , pokud $\mathcal{T} \vdash \varphi$ nebo $\mathcal{T} \vdash \neg\varphi$. V opačném případě se formule nazývá *nerozhodnutelná*.

Teorie $\mathcal{T}$ je *sporná*, pokud existuje formule φ taková, že $\mathcal{T} \vdash \varphi$ a současně $\mathcal{T} \vdash \neg\varphi$. V opačném případě se teorie nazývá *bezesporná*.

Teorie $\mathcal{T}$ je *úplná*, pokud je v ní každá uzavřená formule rozhodnutelná.

Platí:

- Je-li teorie $\mathcal{T}$ sporná, pak je v ní každá formule dokazatelná.
 Toto tvrzení plyne z toho, že ve výrokovém počtu platí $\{A, \neg A\} \vdash B$.
- Pokud v teorii $\mathcal{T}$ existuje nerozhodnutelná formule, pak je tato teorie bezesporná, tj. pokud teorie $\mathcal{T}$ není úplná, pak je bezesporná.
 Jedná se o obrácení předchozího tvrzení.

Gödelova věta o neúplnosti (volná formulace): Pokud je teorie $\mathcal{T}$ bezesporná a tak obsáhlá, že zahrnuje aritmetiku přirozených čísel, pak není úplná.