Zadání domácích úkolů - Algebra II 98/99

1. (2 b.) Popište ideál generovaný podmnožinou M komutativního okruhu R. Dokažte.
2. (1 b.) Uveďte popis $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, v němž je každý prvek vyjádřen jednoznačně. Vše dokažte.

P1. (2 b.) Popište $\mathbb{Z}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$. (Nápověda: Ukažte, že obsahuje prvky $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$ a $2\sqrt{6}$.)

3. (2 b.) Rozhodněte, pro která $k \geq 2$ a $n \geq 0$ je množina

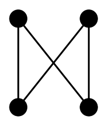
$$\{f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x] \mid k | a_m \text{ pro } m \geq n\}$$

podokruhem $\mathbb{Z}[x]$. Dokažte.

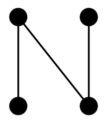
4. (2 b.) Popište prvky ideálu $(x^2+1, y-2)$ v okruhu $\mathbb{Q}[x,y]$. Rozhodněte, zda je hlavní a zda je prvoideál. Vše dokažte.
5. (3 b.) Popište okruh $\mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$ (až na izomorfismus) jako konečné rozšíření tělesa $\mathbb{Q}$ a své tvrzení dokažte
   i. přímo z definice faktorového okruhu.
   ii. pomocí věty o homomorfismu okruhů.
6. (2 b.) Určete stupeň rozšíření $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ nad $\mathbb{Q}$.
7. (2 b.) Určete minimální polynom $\sqrt[4]{3} - \sqrt{3}$ nad $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. (Nápověda: Spočtěte stupeň rozšíření $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}$.)

P2. (3 b.) Dokažte, že každý ireducibilní polynom nad tělesem charakteristiky 0 má ve svém rozkladovém tělese pouze jednoduché kořeny. Ukažte, že toto tvrzení neplatí pro polynom $t^2 - x$ (zde je proměnná t) nad tělesem $Q(\mathbb{Z}_2(x))$ (tj. podílové těleso okruhu polynomů nad $\mathbb{Z}_2$).

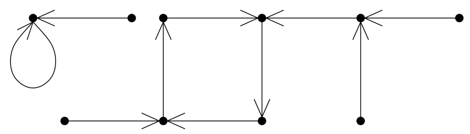
8. (3 b.) Nechť kořeny polynomu x^3+ax^2+bx+c jsou x_1, x_2, x_3. Algoritmicky nalezněte polynom, jehož kořeny jsou $x_1^2+x_2x_3$, $x_1x_2+x_3^2$ a $x_1x_3+x_2^2$.
9. (3 b.) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4$ chápeme postupně jako aditivní grupu, vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$ a okruh. Popište svazy jeho podgrup, podprostorů, podokruhů a ideálů. ($\mathbb{F}_4$ je čtyřprvkové těleso)
10. (1 b.) Popište svaz podsvazů svazu N_5. (N_5 je pětiprvkový nemodulární svaz)
11. (1 b.) Ukažte, že svaz podprostorů libovolného vektorového prostoru je modulární, ale nemusí být distributivní.
12. (1 b.) Rozhodněte, pro které množiny A je svaz ekvivalencí na A modulární.
13. (2 b.) Popište svaz kongruencí svazu, který je součinem 2-prvkového a 3-prvkového řetězce.
14. (1 b.) Popište volný svaz nad uspořádanou množinou



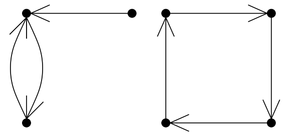
15. (3 b.) Popište volný modulární a volný distributivní svaz nad uspořádanou množinou



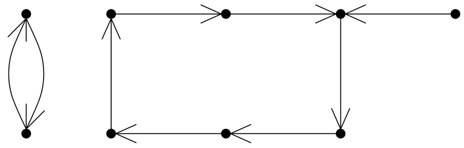
16. (1 b.) Popište svaz podalgeber monounární algebry



17. (3 b.) Popište svaz kongruencí monounární algebry

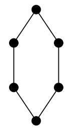


18. (2 b.) Vyjádřete monounární algebru



jako podpřímý součin podpřímo nerozložitelných algeber.

19. (1 b.) Vyjádřete svaz



jako podpřímý součin podpřímo nerozložitelných svazů.

P3. (2 b.) Nalezněte všechny (až na izomorfismus) podpřímo nerozložitelné homomorfní obrazy monounární algebry $(\mathbb{Z}, \mathrm{succ})$ celých čísel s operací následníka. Vyjádřete tuto algebru jako podpřímý součin podpřímo nerozložitelných algeber.

20. (3 b.) Chápejme okruh $\mathfrak{R}$ jako algebru v jazyce $(+, -, 0, \cdot, 1; 2, 1, 0, 2, 0)$. Nalezněte bijekci $\phi : \mathrm{Id}(\mathfrak{R}) \to \mathrm{Con}(\mathfrak{R})$ mezi množinou všech ideálů v $\mathfrak{R}$ a množinou všech kongruencí na $\mathfrak{R}$ takovou, že $\forall\, I \in \mathrm{Id}(\mathfrak{R}) : \mathfrak{R}/I = \mathfrak{R}/\phi(I)$. Vše dokažte.

21. (1 b.) Pro která $n \geq 3$ a $k \geq 1$ splňuje dihedrální grupa $\mathbb{D}_n$ identitu $x^k = 1$? Dokažte.

22. (3 b.) Pologrupa se nazývá rectangulární band, splňuje-li identitu $xyx = x$.
   i. Ukažte, že pologrupa je rectangulární band právě tehdy, když splňuje identity $x^2 = x$ a $xyz = xz$.
   ii. Popište volný rectangulární band nad libovolnou množinou. Vše dokažte.

Na závěr si dovolím přidat problém pro ty, kterým se všechny dosavadní úkoly zdály příliš umělé a kteří se chtějí seznámit s nějakou netriviální přirozenou algebraickou strukturou.

P4. (0 b.) Lieova algebra je vektorový prostor nad tělesem K opatřený bilineární operací $\cdot$ splňující identity $x \cdot y + y \cdot x = 0$ a $(x \cdot y) \cdot z + (y \cdot z) \cdot x + (z \cdot x) \cdot y = 0$. Popište volnou Lieovu algebru nad libovolnou množinou.