Zápočtová písemka cvičení Algebra I
podzim 1999/2000, 2. termín, skupina D

1. Nalezněte podgrupu grupy $(\mathbb{S}_4, \circ) \times (\mathbb{S}_5, \circ)$ generovanou množinou M.

   a) $M = \{[\mathrm{id}, (2,3)]\}$,

   b) $M = \{[(2,4), (1,2,3)]\}$,

   c) $M = \{[(1,4), (4,5)], [(2,4), (4,5)]\}$. (5 bodů)

2. Rozhodněte, zda v grupě $(\mathbb{Z}_{39}^*, \cdot)$ existuje prvek řádu

   a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6.

   Pokud ano, nějaký uveďte. (± 5 bodů)

3. Na množině $S = K \cup L$, kde $K \cap L = \emptyset$, definujeme operaci $\cdot$ takto: pro $k_1, k_2 \in K$, $l_1, l_2 \in L$ platí

   $$k_1 \cdot k_2 = k_1, \quad k_1 \cdot l_1 = l_1, \quad l_1 \cdot k_1 = l_1, \quad l_1 \cdot l_2 = l_1.$$

   a) Dokažte, že $\mathcal{S} = (S, \cdot)$ je pologrupa.

   V závislosti na velikosti množin K a L určete

   b) levé neutrální prvky $\mathcal{S}$,

   c) pravé neutrální prvky $\mathcal{S}$,

   d) levé nulové prvky $\mathcal{S}$,

   e) pravé nulové prvky $\mathcal{S}$,

   f) idempotentní prvky $\mathcal{S}$,

   g) kdy je operace $\cdot$ komutativní. (10 bodů)

4. Víme, že $\mathcal{G} = (G, \cdot)$, kde $G = \{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \mid x, y, z \in \mathbb{Z}_5, xz \neq 0\}$ a $\cdot$ je obvyklé násobení matic, je grupa. Definujme $\varphi : G \to \mathbb{Z}_5^*$ vztahem $\varphi(\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)) = xz^2$.

   a) Určete, kolik prvků má grupa $\mathcal{G}$.

   b) Dokažte, že φ je surjektivní homomorfismus $\mathcal{G}$ do $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$.

   c) Určete jádro homomorfismu φ a uveďte aspoň 3 jeho prvky.

   d) Spočtěte, kolik prvků má toto jádro. (5 bodů)

5. Ukažte, že normální podgrupa $(\mathbb{S}_7, \circ)$ generovaná prvkem $(3,5) \circ (1,6)$ obsahuje prvek

   a) $(3,4,6)$ b) $(3,4,5,6)$.

   Není-li tomu tak, zdůvodněte proč. (5 bodů)
   Nápověda: Využijte rovnost $((1,3) \circ (4,5)) \circ ((1,2) \circ (4,5)) = (1,2,3)$.

Požadovaný zisk: 10 bodů.