Zápočtová písemka cvičení Algebra I
podzim 1999/2000, 2. termín, skupina C

1. Nalezněte podgrupu grupy $(\mathbb{S}_5, \circ) \times (\mathbb{S}_4, \circ)$ generovanou množinou M.
   a) $M = \{[\mathrm{id}, (2,4)]\}$,
   b) $M = \{[(3,5,4), (1,4)]\}$,
   c) $M = \{[(2,4), (1,2)], [(1,2), (1,2)]\}$. (5 bodů)

2. Rozhodněte, zda v grupě $(\mathbb{Z}_{35}^*, \cdot)$ existuje prvek řádu
   a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6.
   Pokud ano, nějaký uveďte. (±5 bodů)

3. Na množině $S = K \cup L$, kde $K \cap L = \emptyset$, definujeme operaci $\cdot$ takto: pro $k_1, k_2 \in K$, $l_1, l_2 \in L$ platí
   $$k_1 \cdot k_2 = k_2, \quad k_1 \cdot l_1 = k_1, \quad l_1 \cdot k_1 = k_1, \quad l_1 \cdot l_2 = l_2.$$
   a) Dokažte, že $\mathcal{S} = (S, \cdot)$ je pologrupa.
   V závislosti na velikosti množin K a L určete
   b) levé neutrální prvky $\mathcal{S}$,
   c) pravé neutrální prvky $\mathcal{S}$,
   d) levé nulové prvky $\mathcal{S}$,
   e) pravé nulové prvky $\mathcal{S}$,
   f) idempotentní prvky $\mathcal{S}$,
   g) kdy je operace $\cdot$ komutativní. (10 bodů)

4. Víme, že $\mathcal{G} = (G, \cdot)$, kde $G = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_5, ac \neq 0\}$ a $\cdot$ je obvyklé násobení matic, je grupa. Definujme $\varphi : G \to \mathbb{Z}_5^*$ vztahem $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right)\right) = ac^3$.
   a) Určete, kolik prvků má grupa $\mathcal{G}$.
   b) Dokažte, že φ je surjektivní homomorfismus $\mathcal{G}$ do $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$.
   c) Určete jádro homomorfismu φ a uveďte aspoň 3 jeho prvky.
   d) Spočtěte, kolik prvků má toto jádro. (5 bodů)

5. Ukažte, že normální podgrupa $(\mathbb{S}_8, \circ)$ generovaná prvkem $(2,4) \circ (1,7)$ obsahuje prvek
   a) $(2,5,7)$ b) $(2,5,6,7)$.
   Není-li tomu tak, zdůvodněte proč. (5 bodů)
   Nápověda: Využijte rovnost $((1,3) \circ (4,5)) \circ ((1,2) \circ (4,5)) = (1,2,3)$.

Požadovaný zisk: 10 bodů.