Zápočtová písemka cvičení Algebra I
podzim 1999/2000, 1. termín, skupina B

1. Následující tabulku lze jediným způsobem doplnit na tabulku násobení v pologrupě $\mathcal{S} = (\{i, j, k, l, m, n\}, \cdot)$.

$\cdot$	i	j	k	l	m	n
i	i	j	k	l	m	n
j	j	i	m			l
k	k	k	k	l	k	l
l	k	k	k	l	k	l
m	m	m	m	n	m	n
n	m	m	m	n	m	n

   (a) Popište doplnění tabulky na násobení v pologrupě a zdůvodněte.

   (b) Vypište všechny idempotenty $\mathcal{S}$.

   (c) Vypište všechny levé jednotky $\mathcal{S}$.

   (d) Vypište všechny pravé jednotky $\mathcal{S}$.

   (e) Vypište všechny podpologrupy $\mathcal{S}$, ve kterých je k levá nula.

   (Podpologrupa pologrupy $\mathcal{S} = (S, \cdot)$ je podmnožina S uzavřená na operaci $\cdot$.)

2. Rozložte následující permutace množiny $\{1, \ldots, 12\}$ na součin cyklů tvaru $(k, 2, 3)$, kde $k \in \{1, 4, 5, \ldots, 12\}$:

   (a) $(5, 1, 4, 2, 3)$, (b) $(4, 3, 5, 1)$.

   Pokud takový rozklad neexistuje, napište to a zdůvodněte.
   Nápověda: Využijte rovnost $(1, 2, 3) \circ (1, 2, 4) \circ (1, 2, 4) = (1, 3) \circ (1, 4)$.

3. Víme, že
$$\mathcal{G} = (\{\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ v & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid u, v \in \mathbb{Q},\ u \neq 0\}, \cdot) \text{ a}$$
$$\mathcal{H} = (\{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \mid x, y, z \in \mathbb{Q},\ xz \neq 0\}, \cdot),$$
   kde $\cdot$ je operace násobení matic, jsou grupy. Ukažte, že předpis
$$(\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ v & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)) \mapsto zu$$
   definuje surjektivní homomorfismus z grupy $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ do $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$. Spočtěte jeho jádro. Doplňte vztah mezi grupami $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ a $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, který takto dostáváme: $\cdots / \cdots \cong \cdots$.

4A. Nalezněte podgrupu $(\mathbb{S}_{10}, \circ)$ generovanou množinou

$$\{(2,4,5,1,6)\circ(2,3,6,5),(3,6,1,4)\circ(2,3,6,5)\}.$$

5A. (a) Vypište všechny normální podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +)$. U každé z nich vypište všechny její prvky.

(b) Které grupě tvaru $(\mathbb{Z}_{k_1}, +) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{k_n}, +)$, $n, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, je izomorfní grupa $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$? Popište příslušný izomorfismus.

4B. Buď $\mathcal{L} = (L, \cdot)$ grupa, R podmnožina L splňující

$$(\forall a \in R)(\forall b \in L)\ [b^{-1}, a^{-1}] \in R.$$

Dokažte, že normální podgrupa grupy $\mathcal{L}$ generovaná R je rovna

$$\{m_1^{\alpha_1} \cdots m_n^{\alpha_n} \mid n \in \mathbb{N}_0,\ m_i \in R,\ \alpha_i \in \{1, -1\} \text{ pro } i = 1, \ldots, n\}\,.$$

(Připomeňme definici $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$.)

5B. Označme $\mathcal{G}$ grupu $(G, \circ)$, kde G je množina všech spojitých bijekcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňujících $f(0) = 0$ a $\circ$ je operace kompozice. Uvažujte postupně následující podmnožiny H množiny G:

(a) $H = \{f \in G \mid (f \circ f)(x) = x\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

(b) $H = \{f \in G \mid (f \circ f)(x) = x\ \&\ \mathrm{sgn}(f(x)) = \mathrm{sgn}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

(c) $H = \{f \in G \mid |f(x)| = |x|\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

(d) $H = \{f \in G \mid \mathrm{sgn}(f(x)) = \mathrm{sgn}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

V každém případě rozhodněte, zda je H podgrupa $\mathcal{G}$, dále určete, je-li normální podgrupa $\mathcal{G}$, a pokud ano, popište (až na izomorfismus) faktorovou grupu $\mathcal{G}/H$. Vše dokažte.
($\mathrm{sgn}(0) = 0$ a $\mathrm{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$ pro $x \neq 0$)

Bodování:
1. 7 bodů (2,±1,±1,±1,2); 2. 5 bodů; 3. 6 bodů (3,2,1); 4A. 5 bodů;
5A. 5 bodů (2,3); 4B. 5 bodů; 5B. 10 bodů.

Požadovaný zisk: 10 bodů.

Podle vlastního uvážení si zvolte, má-li vám být do celkového hodnocení započítán výsledek úlohy 4A nebo 4B (resp. 5A nebo 5B). Odevzdáte-li u příkladu 4 nebo 5 část A i B a nebude-li vaše volba jasně vyznačena, bude započítán výsledek části A. (Opraveny však budou všechny odevzdané úlohy.) Nepřejete-li si, aby byly vaše výsledky zveřejněny, uveďte u svého podpisu 'nezveřejňovat'.