Zápočtová písemka cvičení Algebra I
podzim 1999/2000, 2. termín, skupina A

1. Nalezněte podgrupu grupy $(\mathbb{S}_4, \circ) \times (\mathbb{S}_5, \circ)$ generovanou množinou M.
   a) $M = \{[\mathrm{id}, (2,5)]\}$,
   b) $M = \{[(2,3), (2,3,4)]\}$,
   c) $M = \{[(2,3), (2,4)], [(2,3), (2,3)]\}$. (5 bodů)

2. Rozhodněte, zda v grupě $(\mathbb{Z}_{27}^*, \cdot)$ existuje prvek řádu

   a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6.

   Pokud ano, nějaký uveďte. ($\pm$5 bodů)

3. Na množině $S = A \cup B$, kde $A \cap B = \emptyset$, definujeme operaci $\cdot$ takto: pro $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ platí

   $$a_1 \cdot a_2 = a_2, \quad a_1 \cdot b_1 = b_1, \quad b_1 \cdot a_1 = b_1, \quad b_1 \cdot b_2 = b_2.$$

   a) Dokažte, že $\mathcal{S} = (S, \cdot)$ je pologrupa.
   V závislosti na velikosti množin A a B určete
   b) levé neutrální prvky $\mathcal{S}$,
   c) pravé neutrální prvky $\mathcal{S}$,
   d) levé nulové prvky $\mathcal{S}$,
   e) pravé nulové prvky $\mathcal{S}$,
   f) idempotentní prvky $\mathcal{S}$,
   g) kdy je operace $\cdot$ komutativní. (10 bodů)

4. Víme, že $\mathcal{G} = (G, \cdot)$, kde $G = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_5, ac \neq 0\}$ a $\cdot$ je obvyklé násobení matic, je grupa. Definujme $\varphi : G \to \mathbb{Z}_5^*$ vztahem $\varphi(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)) = a^2 c$.
   a) Určete, kolik prvků má grupa $\mathcal{G}$.
   b) Dokažte, že φ je surjektivní homomorfismus $\mathcal{G}$ do $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$.
   c) Určete jádro homomorfismu φ a uveďte aspoň 3 jeho prvky.
   d) Spočtěte, kolik prvků má toto jádro. (5 bodů)

5. Ukažte, že normální podgrupa $(\mathbb{S}_9, \circ)$ generovaná prvkem $(4,5) \circ (2,7)$ obsahuje prvek

   a) $(2,4,6)$ b) $(2,4,5,6)$.

   Není-li tomu tak, zdůvodněte proč. (5 bodů)
   Nápověda: Využijte rovnost $((1,3) \circ (4,5)) \circ ((1,2) \circ (4,5)) = (1,2,3)$.

Požadovaný zisk: 10 bodů.