Zápočtová písemka cvičení Algebra I
podzim 1999/2000, 1. termín, skupina A

1. Následující tabulku lze jediným způsobem doplnit na tabulku násobení v pologrupě $\mathcal{S} = (\{k, l, m, n, o, p\}, \cdot)$.

$\cdot$	k	l	m	n	o	p
k	k	l	k	k	l	k
l	k	l	k	k	l	k
m	m	o	m	m	o	m
n		o	k	p		n
o	m	o	m	m	o	m
p	k	l	m	n	o	p

   (a) Popište doplnění tabulky na násobení v pologrupě a zdůvodněte.

   (b) Vypište všechny idempotenty $\mathcal{S}$.

   (c) Vypište všechny levé jednotky $\mathcal{S}$.

   (d) Vypište všechny pravé jednotky $\mathcal{S}$.

   (e) Vypište všechny podpologrupy $\mathcal{S}$, ve kterých je m levá nula.

   (Podpologrupa pologrupy $\mathcal{S} = (S, \cdot)$ je podmnožina S uzavřená na operaci $\cdot$.)

2. Rozložte následující permutace množiny $\{1, \dots, 14\}$ na součin cyklů tvaru $(3, k, 2)$, kde $k \in \{1, 4, 5, \dots, 14\}$:

   (a) $(4, 5, 6, 3)$, (b) $(4, 2, 5, 6, 3)$.

   Pokud takový rozklad neexistuje, napište to a zdůvodněte.
   Nápověda: Využijte rovnost $(1, 2, 3) \circ (1, 2, 4) \circ (1, 2, 4) = (1, 3) \circ (1, 4)$.

3. Víme, že

$$\mathcal{G} = (\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{Q},\ ab \neq 0\}, \cdot) \text{ a}$$
$$\mathcal{H} = (\{\left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ d & e \end{smallmatrix}\right) \mid c, d, e \in \mathbb{Q},\ ce \neq 0\}, \cdot),$$

   kde $\cdot$ je operace násobení matic, jsou grupy. Ukažte, že předpis

$$(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ d & e \end{smallmatrix}\right)) \mapsto bc$$

   definuje surjektivní homomorfismus z grupy $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ do $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$. Spočtěte jeho jádro. Doplňte vztah mezi grupami $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ a $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, který takto dostáváme: $\cdots / \cdots \cong \cdots$.

4A. Nalezněte podgrupu $(\mathbb{S}_8, \circ)$ generovanou množinou

$$\{(4,5,2,1) \circ (4,6,3,1,5,2), (4,5,2,1) \circ (4,5,6) \circ (2,1,3)\}.$$

5A. (a) Vypište všechny normální podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_8, +)$. U každé z nich vypište všechny její prvky.

(b) Které grupě tvaru $(\mathbb{Z}_{k_1}, +) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{k_n}, +)$, $n, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, je izomorfní grupa $(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$? Popište příslušný izomorfismus.

4B. Buď $\mathcal{K} = (K, \cdot)$ grupa, P podmnožina K splňující

$$(\forall a \in K)(\forall b \in P)\ [a^{-1}, b^{-1}] \in P.$$

Dokažte, že normální podgrupa grupy $\mathcal{K}$ generovaná P je rovna

$$\{m_1^{\alpha_1} \cdots m_n^{\alpha_n} \mid n \in \mathbb{N}_0,\ m_i \in P,\ \alpha_i \in \{1, -1\} \text{ pro } i = 1, \ldots, n\}.$$

(Připomeňme definici $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$.)

5B. Označme $\mathcal{G}$ grupu $(G, \circ)$, kde G je množina všech spojitých bijekcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňujících $f(0) = 0$ a $\circ$ je operace kompozice. Uvažujte postupně následující podmnožiny H množiny G:

(a) $H = \{f \in G \mid (f \circ f)(x) = x\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

(b) $H = \{f \in G \mid (f \circ f)(x) = x\ \&\ \operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

(c) $H = \{f \in G \mid |f(x)| = |x|\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

(d) $H = \{f \in G \mid \operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

V každém případě rozhodněte, zda je H podgrupa $\mathcal{G}$, dále určete, je-li normální podgrupa $\mathcal{G}$, a pokud ano, popište (až na izomorfismus) faktorovou grupu $\mathcal{G}/H$. Vše dokažte.
($\operatorname{sgn}(0) = 0$ a $\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$ pro $x \neq 0$)

Bodování:
1. 7 bodů (2,±1,±1,±1,2); 2. 5 bodů; 3. 6 bodů (3,2,1); 4A. 5 bodů;
5A. 5 bodů (2,3); 4B. 5 bodů; 5B. 10 bodů.

Požadovaný zisk: 10 bodů.

Podle vlastního uvážení si zvolte, má-li vám být do celkového hodnocení započítán výsledek úlohy 4A nebo 4B (resp. 5A nebo 5B). Odevzdáte-li u příkladu 4 nebo 5 část A i B a nebude-li vaše volba jasně vyznačena, bude započítán výsledek části A. (Opraveny však budou všechny odevzdané úlohy.) Nepřejete-li si, aby byly vaše výsledky zveřejněny, uveďte u svého podpisu 'nezveřejňovat'.