Zápočtová písemka cvičení Algebra I
podzim 2000/01, 2. termín, skupina D

1. (4 body) Udejte příklad prvku grupy $(\mathbb{S}_8, \circ)$, který má řád (a) 6, (b) 12, (c) 13. Pokud takový prvek neexistuje, zdůvodněte proč. Dále dejte příklad prvku, který má největší možný řád ze všech prvků $(\mathbb{S}_8, \circ)$.

2. (6 bodů) Uvažujme grupu $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ všech regulárních 2×2-matic nad $\mathbb{Z}_3$ s operací násobení.

(a) Určete řád prvku $\begin{pmatrix} [0]_3 & [1]_3 \\ [1]_3 & [2]_3 \end{pmatrix}$ v $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$.

(b) Spočtěte inverzi prvku $\begin{pmatrix} [2]_3 & [2]_3 \\ [2]_3 & [0]_3 \end{pmatrix}$ v $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$.

(c) Nechť $A = \left\{ \begin{pmatrix} [1]_3 & k \\ l & m \end{pmatrix} \mid k, l, m \in \mathbb{Z}_3,\ kl \neq m \right\}$ a $B = \left\{ \begin{pmatrix} k & [0]_3 \\ l & m \end{pmatrix} \mid k, l, m \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.
Pro každou z množin A, B a $A \cap B$ rozhodněte, zda tvoří podgrupu, případně normální podgrupu, grupy $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ a vše dokažte.

3. (5 bodů)

(a) Nechť $m \geq 2$ je přirozené číslo. Ukažte, že předpis $\varphi(([x]_m, [y]_m)) = [xy]_m$, pro $x, y \in \mathbb{Z}$, definuje korektně zobrazení $\varphi : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$. Rozhodněte, zda je toto zobrazení homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_m, +) \times (\mathbb{Z}_m, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_m, +)$ a svoje tvrzení dokažte. Jedná-li se o homomorfismus, spočtěte jeho jádro a určete, kolik má prvků.

(b) Označme nyní ψ zúžení zobrazení φ na množinu $\mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_m^*$. Rozhodněte, zda je ψ homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot) \times (\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ do grupy $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ a svoje tvrzení dokažte. Jedná-li se o homomorfismus, spočtěte jeho jádro a určete, kolik má prvků.

4. (5 bodů) Definujme na množině $\mathbb{R}$ všech reálných čísel operace $\diamond$, $\triangle$ předpisy $a \diamond b = \frac{a+b}{2} + a \cdot b$, $a \triangle b = a + b + \frac{a \cdot b}{2}$, pro $a, b \in \mathbb{R}$, kde $+$ a $\cdot$ jsou obvyklé sčítání a násobení reálných čísel. Pro $(\mathbb{R}, \diamond)$ i $(\mathbb{R}, \triangle)$ rozhodněte, zda se jedná o pologrupu. Pokud ano, popište její levé a pravé neutrální a levé a pravé nulové prvky a určete, jde-li o monoid či dokonce grupu. Vše zdůvodněte.
(Prvek s pologrupy $(S, \cdot)$ nazýváme levý (pravý) nulový, jestliže $\forall\, t \in S : s \cdot t = s$ (resp. $t \cdot s = s$).)

5. (5 bodů) Označme $\langle X \rangle$ podgrupu grupy $(\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{S}_5, \circ)$ generovanou množinou

$$X = \{([1]_2, (4, i)) \mid i \in \{1, 2, 3, 5\}\}.$$

Rozhodněte, zda $\langle X \rangle$ obsahuje prvek

$$\text{(a) } ([0]_2, (4, 2, 5, 1, 3)), \qquad \text{(b) } ([1]_2, (4, 5, 2, 3, 1)).$$

Pokud ne, zdůvodněte proč; pokud ano, vyjádřete tento prvek jako součin prvků z X.

Maximum: 25 bodů. **Požadovaný zisk:** 10 bodů.
Každý příklad bude hodnocen nezáporným počtem bodů, avšak v rámci příkladu se záporné body udělují.