Zápočtová písemka cvičení Algebra I
podzim 2000/01, 1. termín, skupina D

1. (7 bodů) Nechť X je libovolná neprázdná konečná množina a X^* množina všech slov v abecedě X. Uvažme množinu 2^{X^*} všech jazyků nad X. Pro $M, N \subseteq X^*$ značíme $M \cdot N$ zřetězení jazyků M a N, tj. $M \cdot N = \{\, uv \mid u \in M,\ v \in N \,\}$. Pro $M \subseteq X^*$ definujeme $\mu(M)$ jako množinu všech slov z M nejmenší délky.
Rozhodněte, zda následující uspořádané dvojice jsou pologrupy, monoidy, případně grupy a svoje tvrzení zdůvodněte. V případech, kdy jde o pologrupu, nalezněte všechny její levé a pravé neutrální a levé a pravé nulové prvky.
(Prvek s pologrupy $(S, \cdot)$ nazýváme levý (pravý) nulový, jestliže $\forall\, t \in S : s \cdot t = s$ (resp. $t \cdot s = s$).)

(a) $(2^{X^*}, \star)$, kde $M \star N = \mu(M) \cdot N$ pro všechna $M, N \subseteq X^*$.
(b) $(2^{X^*}, \diamond)$, kde $M \diamond N = M \cdot N \cdot N$ pro všechna $M, N \subseteq X^*$.

2. (5 bodů) Dokažte, že předpis

$$\varphi(([z]_3, [t]_3)) = \begin{pmatrix} [1]_3 & [0]_3 \\ [z+2t]_3 & [1]_3 \end{pmatrix} \qquad \text{pro } z, t \in \mathbb{Z}$$

korektně zadává homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_3, +) \times (\mathbb{Z}_3, +)$ do grupy $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ všech regulárních 2×2-matic nad $\mathbb{Z}_3$ s operací násobení. Určete jádro φ a obraz $(\mathbb{Z}_3, +) \times (\mathbb{Z}_3, +)$ ve φ a napište, kolik mají prvků.

3. (7 bodů) Nechť $\mathcal{G}$ značí grupu všech lineárních nekonstantních reálných funkcí s operací kompozice. Uvažme funkce $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $\varphi(x) = 3x$ a $\psi(x) = 3x + 4$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Nalezněte podgrupu $\mathcal{G}$ generovanou prvkem ψ. Je tato podgrupa normální v $\mathcal{G}$?
Rozhodněte, zda podgrupa $\mathcal{G}$ generovaná množinou $\{\varphi, \psi\}$ obsahuje funkci ρ danou pro všechna $x \in \mathbb{R}$ předpisem

(a) $\rho(x) = x + 4$, (b) $\rho(x) = 4x$, (c) $\rho(x) = x$, (d) $\rho(x) = 7$.

4. (6 bodů) Nechť l a m jsou dvě přirozená čísla, $l, m \geq 2$. Ukažte, že pokud $l \mid m$, potom předpis

$$[z]_m + l\mathbb{Z}_m \mapsto [z]_l \quad \forall z \in \mathbb{Z}$$

definuje izomorfismus grup $(\mathbb{Z}_m, +)/l\mathbb{Z}_m$ a $(\mathbb{Z}_l, +)$.
Dále zdůvodněte, že pokud $l \nmid m$, toto tvrzení neplatí.

5. (5 bodů) Nalezněte inverzní prvek k prvku

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 8 & 9 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ v grupě $\mathbb{S}_9$.
(výsledek zapište ve tvaru součinu nezávislých cyklů)
(b) $([15]_{43}, [15]_{43})$ v grupě $(\mathbb{Z}_{43}, +) \times (\mathbb{Z}_{43}^*, \cdot)$.

Maximum: 30 bodů. **Požadovaný zisk:** 10 bodů.
Při hodnocení příkladu **3** budou udělovány záporné body, které se **započítávají** do celkového hodnocení.