# Zápočtová písemka cvičení Algebra I
# podzim 2000/01, 2. termín, skupina C

**1**. (4 body) Udejte příklad prvku grupy $(\mathbb{S}_9, \circ)$, který má řád (a) 7, (b) 14, (c) 16.
Pokud takový prvek neexistuje, zdůvodněte proč. Dále dejte příklad prvku, který má největší možný řád ze všech prvků $(\mathbb{S}_9, \circ)$.

**2**. (5 bodů) Definujme na množině $\mathbb{R}$ všech reálných čísel operace $\diamond$, $\triangle$ předpisy $a \diamond b = a + b - a \cdot b$, $a \triangle b = (a+b) \cdot a \cdot b$, pro $a, b \in \mathbb{R}$, kde $+$ a $\cdot$ jsou obvyklé sčítání a násobení reálných čísel. Pro $(\mathbb{R}, \diamond)$ i $(\mathbb{R}, \triangle)$ rozhodněte, zda se jedná o pologrupu. Pokud ano, popište její levé a pravé neutrální a levé a pravé nulové prvky a určete, jde-li o monoid či dokonce grupu. Vše zdůvodněte.
(Prvek $s$ pologrupy $(S, \cdot)$ nazýváme levý (pravý) nulový, jestliže $\forall\, t \in S : s \cdot t = s$ (resp. $t \cdot s = s$).)

**3**. (5 bodů) Označme $\langle X \rangle$ podgrupu grupy $(\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{S}_6, \circ)$ generovanou množinou

$$X = \{([1]_2, (6, i)) \mid i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

Rozhodněte, zda $\langle X \rangle$ obsahuje prvek

$$\text{(a) } ([0]_2, (6, 1, 2, 4, 5)), \qquad \text{(b) } ([1]_2, (6, 4, 2, 1, 5)).$$

Pokud ne, zdůvodněte proč; pokud ano, vyjádřete tento prvek jako součin prvků z $X$.

**4**. (6 bodů) Uvažujme grupu $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ všech regulárních $2 \times 2$-matic nad $\mathbb{Z}_3$ s operací násobení.

(a) Určete řád prvku $\begin{pmatrix} [2]_3 & [1]_3 \\ [1]_3 & [0]_3 \end{pmatrix}$ v $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$.

(b) Spočtěte inverzi prvku $\begin{pmatrix} [2]_3 & [2]_3 \\ [2]_3 & [1]_3 \end{pmatrix}$ v $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$.

(c) Nechť $A = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ [0]_3 & r \end{pmatrix} \mid p, q, r \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ a $B = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & [1]_3 \end{pmatrix} \mid p, q, r \in \mathbb{Z}_3,\ p \neq qr \right\}$.
Pro každou z množin $A$, $B$ a $A \cap B$ rozhodněte, zda tvoří podgrupu, případně normální podgrupu, grupy $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ a vše dokažte.

**5**. (5 bodů)

(a) Nechť $m \geq 2$ je přirozené číslo. Ukažte, že předpis $\varphi([p]_m, [q]_m)) = [pq]_m$, pro $p, q \in \mathbb{Z}$, definuje korektně zobrazení $\varphi : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$. Rozhodněte, zda je toto zobrazení homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_m, +) \times (\mathbb{Z}_m, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_m, +)$ a svoje tvrzení dokažte. Jedná-li se o homomorfismus, spočtěte jeho jádro a určete, kolik má prvků.

(b) Označme nyní $\psi$ zúžení zobrazení $\varphi$ na množinu $\mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_m^*$. Rozhodněte, zda je $\psi$ homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot) \times (\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ do grupy $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ a svoje tvrzení dokažte. Jedná-li se o homomorfismus, spočtěte jeho jádro a určete, kolik má prvků.

**Maximum:** 25 bodů. **Požadovaný zisk:** 10 bodů.
Každý příklad bude hodnocen nezáporným počtem bodů, avšak v rámci příkladu se záporné body udělují.