Zápočtová písemka cvičení Algebra I
podzim 2000/01, 1. termín, skupina B

1. (7 bodů) Nechť $\mathcal{G}$ značí grupu všech lineárních nekonstantních reálných funkcí s operací kompozice. Uvažme funkce $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $\varphi(x) = 3x$ a $\psi(x) = 3x - 2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Nalezněte podgrupu $\mathcal{G}$ generovanou prvkem ψ. Je tato podgrupa normální v $\mathcal{G}$?
Rozhodněte, zda podgrupa $\mathcal{G}$ generovaná množinou $\{\varphi, \psi\}$ obsahuje funkci ρ danou pro všechna $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$\text{(a) } \rho(x) = 3, \quad \text{(b) } \rho(x) = x, \quad \text{(c) } \rho(x) = x - 2, \quad \text{(d) } \rho(x) = 2x.$$

2. (6 bodů) Nechť m a n jsou dvě přirozená čísla, $m, n \geq 2$. Ukažte, že pokud $m \mid n$, potom předpis

$$[z]_n + m\mathbb{Z}_n \mapsto [z]_m \quad \forall z \in \mathbb{Z}$$

definuje izomorfismus grup $(\mathbb{Z}_n, +)/m\mathbb{Z}_n$ a $(\mathbb{Z}_m, +)$.
Dále zdůvodněte, že pokud $m \nmid n$, toto tvrzení neplatí.

3. (5 bodů) Dokažte, že předpis

$$\varphi(([k]_3, [l]_3)) = \begin{pmatrix} [1]_3 & [2k + l]_3 \\ [0]_3 & [1]_3 \end{pmatrix} \qquad \text{pro } k, l \in \mathbb{Z}$$

korektně zadává homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_3, +) \times (\mathbb{Z}_3, +)$ do grupy $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ všech regulárních 2×2-matic nad $\mathbb{Z}_3$ s operací násobení. Určete jádro φ a obraz $(\mathbb{Z}_3, +) \times (\mathbb{Z}_3, +)$ ve φ a napište, kolik mají prvků.

4. (5 bodů) Nalezněte inverzní prvek k prvku

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 4 & 6 & 2 & 1 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ v grupě $\mathbb{S}_9$.
(výsledek zapište ve tvaru součinu nezávislých cyklů)

(b) $([14]_{37}, [14]_{37})$ v grupě $(\mathbb{Z}_{37}, +) \times (\mathbb{Z}_{37}^*, \cdot)$.

5. (7 bodů) Nechť X je libovolná neprázdná konečná množina a X^* množina všech slov v abecedě X. Uvažme množinu 2^{X^*} všech jazyků nad X. Pro $M, N \subseteq X^*$ značíme $M \cdot N$ zřetězení jazyků M a N, tj. $M \cdot N = \{\, uv \mid u \in M,\ v \in N \,\}$. Pro $M \subseteq X^*$ definujeme $\mu(M)$ jako množinu všech slov z M nejmenší délky.
Rozhodněte, zda následující uspořádané dvojice jsou pologrupy, monoidy, případně grupy a svoje tvrzení zdůvodněte. V případech, kdy jde o pologrupu, nalezněte všechny její levé a pravé neutrální a levé a pravé nulové prvky.
(Prvek s pologrupy $(S, \cdot)$ nazýváme levý (pravý) nulový, jestliže $\forall\, t \in S : s \cdot t = s$ (resp. $t \cdot s = s$).)

(a) $(2^{X^*}, \star)$, kde $M \star N = M \cdot \mu(N)$ pro všechna $M, N \subseteq X^*$.

(b) $(2^{X^*}, \diamond)$, kde $M \diamond N = M \cdot N \cdot M$ pro všechna $M, N \subseteq X^*$.

Maximum: 30 bodů. **Požadovaný zisk:** 10 bodů.
Při hodnocení příkladu **1** budou udělovány záporné body, které se **započítávají** do celkového hodnocení.