Zápočtová písemka cvičení Algebra I
podzim 2000/01, 2. termín, skupina A

1. (6 bodů) Uvažujme grupu $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ všech regulárních 2×2-matic nad $\mathbb{Z}_3$ s operací násobení.

(a) Určete řád prvku $\begin{pmatrix} [1]_3 & [2]_3 \\ [2]_3 & [2]_3 \end{pmatrix}$ v $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$.

(b) Spočtěte inverzi prvku $\begin{pmatrix} [1]_3 & [1]_3 \\ [1]_3 & [2]_3 \end{pmatrix}$ v $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$.

(c) Nechť $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ [0]_3 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ a $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{Z}_3,\ ad \neq b^2 \right\}$.
Pro každou z množin A, B a $A \cap B$ rozhodněte, zda tvoří podgrupu, případně normální podgrupu, grupy $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ a vše dokažte.

2. (5 bodů) Definujme na množině $\mathbb{R}$ všech reálných čísel operace $\diamond$, $\triangle$ předpisy $a \diamond b = a + b + a \cdot b$, $a \triangle b = \frac{a \cdot b}{2} - (a+b)$, pro $a, b \in \mathbb{R}$, kde $+$ a $\cdot$ jsou obvyklé sčítání a násobení reálných čísel. Pro $(\mathbb{R}, \diamond)$ i $(\mathbb{R}, \triangle)$ rozhodněte, zda se jedná o pologrupu. Pokud ano, popište její levé a pravé neutrální a levé a pravé nulové prvky a určete, jde-li o monoid či dokonce grupu. Vše zdůvodněte.
(Prvek s pologrupy $(S, \cdot)$ nazýváme levý (pravý) nulový, jestliže $\forall\, t \in S : s \cdot t = s$ (resp. $t \cdot s = s$).)

3. (4 body) Udejte příklad prvku grupy $(\mathbb{S}_{10}, \circ)$, který má řád (a) 9, (b) 13, (c) 14.
Pokud takový prvek neexistuje, zdůvodněte proč. Dále dejte příklad prvku, který má největší možný řád ze všech prvků $(\mathbb{S}_{10}, \circ)$.

4. (5 bodů) Označme $\langle X \rangle$ podgrupu grupy $(\mathbb{S}_5, \circ) \times (\mathbb{Z}_2, +)$ generovanou množinou

$$X = \{((2, i), [1]_2) \mid i \in \{1, 3, 4, 5\}\}.$$

Rozhodněte, zda $\langle X \rangle$ obsahuje prvek

(a) $((2, 4, 5, 1, 3), [1]_2)$, (b) $((2, 1, 5, 4, 3), [0]_2)$.

Pokud ne, zdůvodněte proč; pokud ano, vyjádřete tento prvek jako součin prvků z X.

5. (5 bodů)

(a) Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo. Ukažte, že předpis $\varphi(([a]_n, [b]_n)) = [ab]_n$, pro $a, b \in \mathbb{Z}$, definuje korektně zobrazení $\varphi : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$. Rozhodněte, zda je toto zobrazení homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_n, +) \times (\mathbb{Z}_n, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_n, +)$ a svoje tvrzení dokažte. Jedná-li se o homomorfismus, spočtěte jeho jádro a určete, kolik má prvků.

(b) Označme nyní ψ zúžení zobrazení φ na množinu $\mathbb{Z}_n^* \times \mathbb{Z}_n^*$. Rozhodněte, zda je ψ homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot) \times (\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ do grupy $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ a svoje tvrzení dokažte. Jedná-li se o homomorfismus, spočtěte jeho jádro a určete, kolik má prvků.

Maximum: 25 bodů. **Požadovaný zisk:** 10 bodů.
Každý příklad bude hodnocen nezáporným počtem bodů, avšak v rámci příkladu se záporné body udělují.