Zápočtová písemka cvičení Algebra I
podzim 2000/01, 1. termín, skupina A

1. (7 bodů) Nechť $\mathcal{G}$ značí grupu všech lineárních nekonstantních reálných funkcí s operací kompozice. Uvažme funkce $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $\varphi(x) = 2x + 3$ a $\psi(x) = 2x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Nalezněte podgrupu $\mathcal{G}$ generovanou prvkem φ. Je tato podgrupa normální v $\mathcal{G}$?
Rozhodněte, zda podgrupa $\mathcal{G}$ generovaná množinou $\{\varphi, \psi\}$ obsahuje funkci ρ danou pro všechna $x \in \mathbb{R}$ předpisem

(a) $\rho(x) = x$, (b) $\rho(x) = x + 3$, (c) $\rho(x) = 3x$, (d) $\rho(x) = 3$.

2. (7 bodů) Nechť X je libovolná neprázdná konečná množina a X^* množina všech slov v abecedě X. Uvažme množinu 2^{X^*} všech jazyků nad X. Pro $K, L \subseteq X^*$ značíme $K \cdot L$ zřetězení jazyků K a L, tj. $K \cdot L = \{\, uv \mid u \in K,\ v \in L \,\}$. Pro $L \subseteq X^*$ definujeme $\mu(L)$ jako množinu všech slov z L nejmenší délky.
Rozhodněte, zda následující uspořádané dvojice jsou pologrupy, monoidy, případně grupy a svoje tvrzení zdůvodněte. V případech, kdy jde o pologrupu, nalezněte všechny její levé a pravé neutrální a levé a pravé nulové prvky.
(Prvek s pologrupy $(S, \cdot)$ nazýváme levý (pravý) nulový, jestliže $\forall\, t \in S : s \cdot t = s$ (resp. $t \cdot s = s$).)

(a) $(2^{X^*}, \star)$, kde $K \star L = \mu(K) \cdot L$ pro všechna $K, L \subseteq X^*$.
(b) $(2^{X^*}, \diamond)$, kde $K \diamond L = K \cdot K \cdot L$ pro všechna $K, L \subseteq X^*$.

3. (5 bodů) Nalezněte inverzní prvek k prvku

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 3 & 9 & 4 & 2 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ v grupě $\mathbb{S}_9$.
(výsledek zapište ve tvaru součinu nezávislých cyklů)
(b) $([15]_{41}, [15]_{41})$ v grupě $(\mathbb{Z}_{41}^*, \cdot) \times (\mathbb{Z}_{41}, +)$.

4. (5 bodů) Dokažte, že předpis

$$\varphi(([a]_4, [b]_2)) = \begin{pmatrix} [1]_2 & [0]_2 \\ [a + 3b]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} \qquad \text{pro } a, b \in \mathbb{Z}$$

korektně zadává homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_4, +) \times (\mathbb{Z}_2, +)$ do grupy $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ všech regulárních 2×2-matic nad $\mathbb{Z}_2$ s operací násobení. Určete jádro φ a obraz $(\mathbb{Z}_4, +) \times (\mathbb{Z}_2, +)$ ve φ a napište, kolik mají prvků.

5. (6 bodů) Nechť k a n jsou dvě přirozená čísla, $k, n \geq 2$. Ukažte, že pokud $k \mid n$, potom předpis

$$[z]_n + k\mathbb{Z}_n \mapsto [z]_k \quad \forall z \in \mathbb{Z}$$

definuje izomorfismus grup $(\mathbb{Z}_n, +)/k\mathbb{Z}_n$ a $(\mathbb{Z}_k, +)$.
Dále zdůvodněte, že pokud $k \nmid n$, toto tvrzení neplatí.

Maximum: 30 bodů. **Požadovaný zisk:** 10 bodů.
Při hodnocení příkladu **1** budou udělovány záporné body, které se **započítávají** do celkového hodnocení.