Úkol 1. Nalezněte bázi vektorového prostoru reálných funkcí tvaru $a \cdot \sin^2 x + b \cdot \cos^2 x + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, nad tělesem $\mathbb{R}$. Zkonstruujte izomorfismus tohoto vektorového prostoru s vektorovým prostorem $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$.

Úkol 2. Určete dimenzi vektorového prostoru

$$\left\{ \frac{a}{\sqrt{8}} + b \cdot \sqrt{8} + c \cdot \sqrt{18} + d \cdot \sqrt{28} \mid a, b, c, d \in \mathbb{K} \right\}$$

nad $\mathbb{K}$ s obvyklými operacemi pro $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ a $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Úkol 3. Buď $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ těleso. Uvažujme vektorový prostor V nad $\mathbb{K}$, kde

$$V = \{a \cdot \log x + b \cdot \log x^2 + c \cdot \log x^{\mathrm{e}} \mid a, b, c \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$$

s obvyklými operacemi. V případech $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ a $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ určete dimenzi vektorového prostoru V a svoje rozhodnutí zdůvodněte.

Úkol 4. Ověřte, že

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2+5\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \\ 3+2\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} & 7 \\ -2+\mathrm{i} & 5+\mathrm{i} \end{pmatrix} \right)$$

je báze vektorového prostoru V všech matic řádu 2 nad $\mathbb{C}$. Určete matici lineárního zobrazení $\varphi : V \to \mathbb{C}^2$ daného pro $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$ předpisem

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \right) = (c_1 - c_2, c_3 + c_4)$$

vzhledem k bazím α a $((1-\mathrm{i}, 2-3\mathrm{i}), (2-\mathrm{i}, 1+4\mathrm{i}))$.

Úkol 5. Nechť V je prostor čtvercových matic řádu 2 nad $\mathbb{R}$ a $\mathrm{tr} : V \to \mathbb{R}$ zobrazení přiřazující každé matici její stopu. Zvolte si libovolné báze a spočtěte matici zobrazení tr vzhledem k těmto bazím. (Stopa matice je součet prvků na hlavní diagonále.)

Úkol 6. Nechť V je vektorový prostor všech čtvercových matic řádu 3 nad $\mathbb{Q}$ a nechť W je jeho podprostor, jehož prvky jsou právě matice tvaru

$$\begin{pmatrix} a & b & 2 \cdot b \\ -b & a & c \\ -c & 2 \cdot c & a+b \end{pmatrix},$$

kde $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Zvolte si libovolné báze prostorů V a W a spočtěte matici zobrazení inkluze $\iota : W \hookrightarrow V$ vzhledem k těmto bazím.

Úkol 7. Uvažujme vektorový prostor

$$V = \left\{ a + b \cdot \sqrt[4]{2} + c \cdot \sqrt{2} + d \cdot \sqrt[4]{8} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\}$$

nad $\mathbb{Q}$ s obvyklými operacemi a zobrazení $\varphi : V \to V$ dané pro $r \in V$ předpisem $\varphi(r) = r \cdot (1 + \sqrt{2})$. Určete matici zobrazení φ vzhledem k bázi

$$\left(\sqrt{2} \cdot (\sqrt[4]{2} + \sqrt{2} - 1), \sqrt[4]{2} \cdot (2 \cdot \sqrt[4]{2} - \sqrt{2} - 1), 2 \cdot \sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{2} - 1, \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2} + \sqrt{2} + 1 \right).$$

Řešení:

$$\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 16 & 7 & 24 & 28 \\ 20 & 8 & 24 & 32 \\ 14 & -7 & 24 & 14 \\ -18 & 3 & -30 & -24 \end{pmatrix}$$

Úkol 8. Buď V vektorový prostor matic řádu 2 nad $\mathbb{C}$. Ukažte, že

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \text{ a}$$
$$\beta = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

jsou báze prostoru V. Dále buď $\varphi : V \to V$ lineární zobrazení, které má vzhledem k bázi β matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete matici φ vzhledem k bázi α.

Řešení:

$$\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 & 16 \\ 30 & -19 & 24 & -25 \\ 16 & 0 & 4 & -16 \\ -26 & 13 & -8 & 23 \end{pmatrix}$$

Úkol 9. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$ generovaný v prostoru $\mathbb{R}$ množinou $\{2^{n/3} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Nechť $\varphi : V \to V$ je lineární transformace V, která má vzhledem k bázi

$$\left(-\sqrt[3]{32}, \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - 1, 1 - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right)$$

matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte matici φ vzhledem k bázi

$$\left(1 - \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\cdot\left(1 + 2\cdot\sqrt[3]{16}\right) - 2\cdot\sqrt[3]{4}, 1 + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\right).$$

Úkol 10. Nechť $\alpha = (x^2 + x, ax^2, x^2 + x + 1)$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polynomů stupně nejvýše 2 nad $\mathbb{R}$. Víme, že matice přechodu od báze α k bázi β je

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete bázi β.

Nechť dále u je polynom, který má v bázi α souřadnice $(2, 3, 1)$. Spočtěte jeho souřadnice v bázi β.

Úkol 11. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ nad tělesem $\mathbb{R}$ a jeho báze α a β, kde $\alpha = ((1,2),(1-\mathrm{i},1),(2+\mathrm{i},3))$. Víme, že matice přechodu mezi těmito bázemi je

$$(\mathrm{id})_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix},$$

a že vektor, který má v bázi α souřadnice $(a,1,a)$, má v bázi β souřadnice $(a, 3-a, 3\cdot a)$. Určete číslo a.

Úkol 12. Dokažte, že množina reálných čísel

$$\left\{ \frac{1}{a + b\cdot\sqrt{2}} \mid a,b \in \mathbb{Q},\ a \neq 0 \text{ nebo } b \neq 0 \right\} \cup \{0\}$$

spolu s obvyklými operacemi je vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$.

Úkol 13. Dokažte, že množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ spolu s obvyklým sčítáním po složkách a násobením $(a + b\cdot \mathrm{i}) \bullet (c,d) = (a\cdot c + b\cdot d, a\cdot d - b\cdot c)$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{C}$.

Úkol 14. Mějme transformaci φ vektorového prostoru

$$\{a + b\cdot\sqrt{3} + c\cdot\sqrt{7} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$$

nad $\mathbb{Q}$, která má vzhledem k bázi $(1+\sqrt{3}, 1 + 2\cdot\sqrt{7}, \sqrt{3}+\sqrt{7})$ matici

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte všechny dvojice vektorů u a v takové, že vzhledem k bázi $(u, \sqrt{3} - 2\cdot\sqrt{7}, v)$ má φ matici

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $u = \sqrt{3} - \sqrt{7} - 1$, $v = 3\cdot(\sqrt{7} - \sqrt{3})$.

Úkol 15. Uvažujme transformaci f vektorového prostoru

$$\{a + b\cdot\sqrt{2} + c\cdot\sqrt{3} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$$

nad $\mathbb{Q}$, která má vzhledem ke standardní bázi $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ matici A. Nalezněte všechny vektory u takové, že vzhledem k bázi α_u má f matici B. Úlohu řešte pro hodnoty

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_u = (2 - \sqrt{2} + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{2}, u)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_u = (\sqrt{2} + \sqrt{3}, 1 + 2\cdot\sqrt{2} + \sqrt{3}, u)$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Úkol 16. Určete báze jádra a obrazu zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, které má vzhledem k bazím

$$((1,1,-1,-1,0),(2,0,-2,1,0),(1,0,0,-1,1),(0,2,1,-2,1),(2,1,0,-2,-1))\,,$$
$$((2,0,1,2),(1,-2,2,1),(-1,2,-1,2),(0,2,0,-1))$$

matici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Doplňte tyto báze na báze prostorů $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^4$.
Řešení: Báze jádra $((9,-2,-6,3,3),(-1,3,2,-4,1),(2,-1,0,1,-1))$, lze doplnit např. vektory $(1,1,-1,-1,0)$, $(2,0,-2,1,0)$. Báze obrazu $((1,-2,2,-10),(2,-2,3,-2))$, lze doplnit např. vektory $(-1,2,-1,2)$, $(0,2,0,-1)$.

Úkol 17. Nechť $\varphi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ je lineární transformace prostoru $\mathbb{Q}^4$, která má vzhledem k bázi $\alpha = ((1,1,1,0),(1,0,1,2),(-1,1,0,1),(2,1,-1,0))$ matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Označme ψ zúžení zobrazení φ na $\operatorname{Im}\varphi$. Zvolte libovolnou bázi β prostoru $\operatorname{Im}\varphi$ a spočtěte matici zobrazení $\psi : \operatorname{Im}\varphi \to \mathbb{Q}^4$ vzhledem k bazím β a α.

Úkol 18. Buďte

$$V = \langle (1,1,4,1),(1,0,3,2),(2,-1,5,5)\rangle\,,$$
$$W = \langle (2,4,-1,0),(0,3,-1,-2),(0,0,3,2)\rangle$$

podprostory vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$. Nalezněte nějaké podprostory X a Y prostoru $\mathbb{Q}^4$ takové, že $X\cap(V\cap W) = Y\cap(V\cap W) = \{(0,0,0,0)\}$, $V = \langle X\cup(V\cap W)\rangle$ a $W = \langle Y\cup(V\cap W)\rangle$.