Úkol 1. (2 body):
A:

(1) Dokažte, že množina všech polynomů se sudými koeficienty, jejichž konstantní člen je dělitelný číslem 4, je ideálem okruhu $\mathbb{Z}[x]$. Rozhodněte, zda je tento ideál hlavní, a svoje tvrzení zdůvodněte.
(2) Určete, pro která $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ je polynom $[a_0]_{18} + \dots + [a_n]_{18} \cdot x^n$ prvkem ideálu okruhu $\mathbb{Z}_{18}[x]$ generovaného prvky $[4]_{18} \cdot x + [6]_{18}$ a $[12]_{18}$. Svoje tvrzení dokažte.

B: Dokažte, že každý ideál okruhu $\mathbb{Z}[x]$ je konečně generovaný. (Nápověda: Uvažte v ideálu polynom, který má nejnižší absolutní hodnotu vedoucího koeficientu.)

Úkol 2. (2 body):
A: Rozhodněte, kterému známému okruhu je izomorfní okruh $\mathbb{Q}[x, y]/(x^2 - 2, 2y - 1)$. Svoje tvrzení dokažte

(1) přímo.
(2) pomocí věty o homomorfismu.

B: Nechť p je libovolné prvočíslo a uvažujme okruh

$$R = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ p \nmid n \right\} \subset \mathbb{Q}\ .$$

Popište všechny ideály tohoto okruhu a pro každý z nich určete, kterému známému okruhu je izomorfní příslušný faktorový okruh. Vše dokažte. (Nápověda: K nalezení vhodného reprezentanta každé třídy rozkladu zkuste použít Bezoutovu rovnost.)

Úkol 3. (2 body):
A: Určete stupně rozšíření těles $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{2})$, $\mathbb{Q}(\zeta_6)$ a $\mathbb{Q}(\alpha)$ nad $\mathbb{Q}$, kde $\zeta_6 = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/3}$ a α je libovolný kořen polynomu $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x + 1$. Vše dokažte. Uveďte rovněž postup, kterým jste k výsledku došli.

B: Dokažte, že každý ireducibilní polynom nad tělesem charakteristiky 0 má ve svém rozkladovém tělese pouze jednoduché kořeny. Ukažte, že toto tvrzení neplatí pro polynom $t^2 - x$ (zde je proměnná t) nad tělesem $Q(\mathbb{Z}_2[x])$ (tj. podílové těleso okruhu polynomů nad $\mathbb{Z}_2$).

Úkol 4. (1 bod):
Určete stupně rozšíření rozkladových těles polynomu $x^5 - 2x^4 - 5x + 10$ nad $\mathbb{Q}$ a nad $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Vše dokažte.

Úkol 5. (1 bod):
A: Nalezněte $n \in \mathbb{N}$ a $f \in \mathbb{Z}_n[x]$ takové, že $\mathbb{Z}_n[x]/(f)$ je těleso o 81 prvcích. Vše dokažte.

B: Pro každé konečné těleso určete počet jeho podtěles a svoje tvrzení dokažte.

Úkol 6. (2 body):
A: Popište všechny automorfismy rozkladového tělesa polynomu $f = x^4 - 2x^2 - 2$ nad $\mathbb{Q}$ pomocí permutací, jimiž působí na kořenech tohoto polynomu. Určete, které známé grupě je izomorfní Galoisova grupa polynomu f nad $\mathbb{Q}$. Vše dokažte.

B: Dokažte, že Galoisova grupa polynomu $f = x^5 - 80x + 5$ nad $\mathbb{Q}$ je izomorfní S_5. (Nápověda: Určete počet reálných kořenů polynomu f a ukažte, že existuje automorfismus rozkladového tělesa f, který na kořenech f působí jako cyklus délky 5, a automorfismus, který na nich působí jako transpozice. Poznámka: Nesnažte se vyjádřit kořeny polynomu f – není to možné.)

Úkol 7. (2 body):
A: Nechť $a, b, c \in \mathbb{C}$ jsou daná čísla. Označme α, β a γ kořeny polynomu x^3+ax^2+bx+c. Určete koeficient lineárního členu normovaného kubického polynomu, jehož kořeny jsou

$$\frac{1}{\alpha\beta + \gamma^4}, \quad \frac{1}{\alpha\gamma + \beta^4} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\beta\gamma + \alpha^4} \ .$$

B: Nechť R je těleso charakteristiky různé od 2. Dokažte, že polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je zachováván všemi sudými permutacemi proměnných $x_1, \dots, x_n$ právě tehdy, když existují symetrické polynomy g a h v proměnných $x_1, \dots, x_n$ takové, že

$$f = g + h \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j) \ .$$

(Nápověda: Při vytýkání činitelů Vandermondova determinantu postupujte indukcí vzhledem k n pro všechny okruhy současně.)

Úkol 8. (1 bod):
A: Nakreslete hasseovské diagramy svazů všech podsvazů, všech ideálů a všech filtrů svazu N_5.

B: Určete, pro které uspořádané množiny $(A, \le)$ platí, že množina všech takových podmnožin A, na nichž uspořádání $\le$ zadává strukturu svazu, tvoří vzhledem k uspořádání inkluzí svaz. Svoje tvrzení dokažte.

Úkol 9. (1 bod):
Uvažujme na množině $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ uspořádání po bodech, tj.

$$f \le g \iff \forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) \le g(x) \ .$$

Pro každý z následujících předpisů pro zobrazení $F\colon \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ rozhodněte, zda definuje izotonní zobrazení a zda definuje svazový homomorfismus. Vše dokažte.

(1) $F(f)(x) = f(x^2 + 1) + 1$
(2) $F(f)(x) = (f(x))^2$
(3) $F(f)(x) = f(x) + f(-x)$

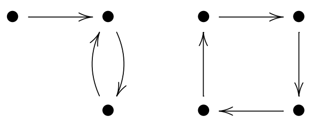
Úkol 10. (1 bod):
A: Dokažte, že množina všech předuspořádání na konečné množině A tvoří vzhledem k uspořádání inkluzí úplný svaz. Rozhodněte, pro které množiny A je tento svaz modulární, pro které je distributivní, a pro které je Booleova algebra. Svoje tvrzení zdůvodněte.

B: Popište všechny $\vee$-nedosažitelné prvky svazu všech předuspořádání na dané konečné množině uspořádaných inkluzí. Svoje tvrzení zdůvodněte.

Úkol 11. (1 bod):
Popište svaz kongruencí svazu, který je součinem dvouprvkového a tříprvkového řetězce.

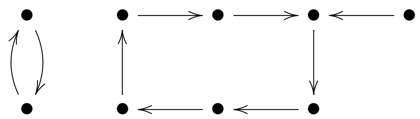
Úkol 12. (1 bod):
Popište všechny podalgebry algebry $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, +, *)$, kde $+$ je obvyklé sčítání přirozených čísel a unární operace $*$ je daná předpisem $*(n) = n+3$. Uveďte, jak se počítají suprema ve svazu podalgeber $\mathcal{A}$ s uspořádáním inkluzí. Vše zdůvodněte.

Úkol 13. (1 bod):
Popište svaz kongruencí monounární algebry



Úkol 14. (1 bod):
Vyjádřete grupy všech symetrií pravidelného 12-úhelníku a pravidelného 45-úhelníku jako podpřímý součin podpřímo nerozložitelných grup. Vše zdůvodněte.

Úkol 15. (1 bod):
Vyjádřete monounární algebru



jako podpřímý součin podpřímo nerozložitelných algeber. Uveďte rovněž postup, jakým jste k výsledku došli.

Úkol 16. (2 body):
Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, a která $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$ splňuje grupa všech symetrií pravidelného n-úhelníku identitu $x^i y^j x^k y^l = 1$. Vše dokažte.