Úkol 1. (1 bod): Definujme na množině komplexních čísel $\mathbb{C}$ uspořádání $\leq$ předpisem:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}: \ a + bi \leq c + di \iff a \leq c \ \& \ b \leq d\,.$$

Uvažujme zobrazení $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Určete všechny platné implikace mezi následujícími tvrzeními:

(1) φ je endomorfismus vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$.
(2) φ je endomorfismus vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$.
(3) φ je endomorfismus vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{Q}$.
(4) φ je endomorfismus aditivní grupy $\mathbb{C}$.
(5) φ je endomorfismus multiplikativní pologrupy $\mathbb{C}$.
(6) φ je endomorfismus multiplikativního monoidu $\mathbb{C}$.
(7) φ je endomorfismus uspořádané množiny $(\mathbb{C}, \leq)$.
(8) φ je endomorfismus svazu $(\mathbb{C}, \leq)$.

Připomeňme, že endomorfismus je zobrazení dané struktury do sebe zachovávající všechny relace a operace této struktury, tj. například endomorfismus svazu zobrazuje suprémum (infimum) každé dvojice prvků na suprémum (infimum) jejich obrazů, endomorfismus vektorového prostoru je lineární zobrazení.

Nápověda:

(1) Pouze jediná z platných implikací je netriviální a vyžaduje krátké zdůvodnění.
(2) Až zjistíte, které implikace platí, uvědomte si, že k vyvrácení všech zbývajících stačí vyvrátit jen 10 z nich.
(3) Všechny neplatné implikace až na jednu lze vyvrátit uvedením jednoduchého protipříkladu.
(4) K vyvrácení zbývající implikace zkuste použít svých znalostí o lineárních zobrazeních a faktu, že každý (i nekonečně-dimenzionální) vektorový prostor má bázi (i když ji neumíme najít). (Tato část úkolu je obtížnější.)

Úkol 2. (1 bod): Dokažte následující dvě tvrzení:

(1) Každá podgrupa monoidu M je obsažena v nějaké jeho $\mathcal{H}$-třídě.
(2) Pokud $\mathcal{H}$-třída H monoidu M obsahuje nějaký idempotent e, potom H je podgrupou M.

Z tvrzení (1) a (2) vyvoďte ekvivalenci následujících podmínek:

- H je podgrupa monoidu M maximální vzhledem k inkluzi.
- H je $\mathcal{H}$-třída monoidu M a obsahuje idempotent.

Nápověda k důkazu tvrzení (2): Nejprve ukažte, že prvek e se chová jako neutrální vůči všem prvkům H; tento fakt poté využijte při důkazu, že H je podgrupa. Budete-li potřebovat z nějakého prvku $s \in M$ vyrobit prvek ležící v H, zkuste použít součin $e \cdot s \cdot e$.

Úkol 3. (1 bod): Buď V vektorový prostor konečné dimenze. Popište Greenovy ekvivalence monoidu všech lineárních transformací V. Pomocí charakterizace z úkolu 2 popište všechny maximální podgrupy tohoto monoidu.

Nápověda: Charakterizace Greenových ekvivalencí tohoto monoidu je analogická jako v případě monoidu všech transformací množiny. Při konstrukci transformací prostoru V je užitečné volit si vhodné báze V.

Úkol 4. (1 bod): Spočtěte podmonoid M monoidu $(\mathcal{T}(A), \circ)$ všech transformací množiny $A = (\mathbb{Z} \times \{0,1\}) \cup \{0\}$ generovaný prvky α, β a γ, kde pro všechna $z \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
&\alpha((z,0)) = (z+1,0), && \alpha((z,1)) = 0, && \alpha(0) = 0,\\
&\beta((z,0)) = (z,1), && \beta((z,1)) = 0, && \beta(0) = 0,\\
&\gamma((z,0)) = 0, && \gamma((z,1)) = (z-1,1), && \gamma(0) = 0.
\end{aligned}$$

Popište Greenovy ekvivalence monoidu M.

Úkol 5. (1 bod): Spočtěte grupy automorfismů grup $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$ a $\mathbb{Z}^2$.

Nápověda: $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2) \cong \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$, kde

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad - bc \in \{-1,1\} \right\}, \cdot \right).$$

Úkol 6. (1 bod): Dokažte přímým výpočtem, že pro libovolná přirozená čísla m, n, k splňující $k^n \equiv 1 \pmod{m}$ definuje předpis

$$([x]_m, [y]_n) \cdot ([\bar{x}]_m, [\bar{y}]_n) = ([x + k^y \cdot \bar{x}]_m, [y + \bar{y}]_n),$$

kde $x, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}$ a $y \in \mathbb{N}_0$, strukturu grupy na množině $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

Zkonstruujte nějaké nekomutativní grupy o 39 a 41 prvcích.

Úkol 7. (1 bod): Ukažte, že $A_4 \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_3$ pro jistou akci φ.

Úkol 8. (1 bod): Pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ nalezněte všechny grupy G a H splňující $S_n \cong A_n \rtimes_\varphi G$, respektive $S_n \cong H \rtimes_\psi A_n$, pro nějaké akce φ a ψ. Svoji odpověď zdůvodněte.

Úkol 9. (1 bod): Nechť $1 \to H \xrightarrow{\lambda} K \xrightarrow{\mu} G \to 1$ je krátká exaktní posloupnost grup. Dokažte přímým výpočtem, že pokud $\beta : K \to H$ je homomorfismus splňující $\beta \circ \lambda = \mathrm{id}_H$, tak předpis $\alpha(g) = k$, kde $k \in \mu^{-1}(g) \cap \beta^{-1}(1_H)$, definuje homomorfismus $\alpha : G \to K$ takový, že $\mu \circ \alpha = \mathrm{id}_G$.

Úkol 10. (1 bod): Mějme diagram

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & G_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & G_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\gamma_3"'] & G_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\gamma_4"'] & G_5 \arrow[d, "\gamma_5"'] \\
H_1 \arrow[r, "\beta_1"] & H_2 \arrow[r, "\beta_2"] & H_3 \arrow[r, "\beta_3"] & H_4 \arrow[r, "\beta_4"] & H_5
\end{tikzcd}$$

kde obě horizontální posloupnosti jsou exaktní posloupnosti grup, zobrazení γ_1, γ_2, γ_4 a γ_5 jsou izomorfismy, γ_3 je homomorfismus a platí $\gamma_2 \circ \alpha_1 = \beta_1 \circ \gamma_1$, $\gamma_3 \circ \alpha_2 = \beta_2 \circ \gamma_2$, $\gamma_4 \circ \alpha_3 = \beta_3 \circ \gamma_3$ a $\gamma_5 \circ \alpha_4 = \beta_4 \circ \gamma_4$, tj. uvedený diagram komutuje. Dokažte, že potom γ_3 je rovněž izomorfismus.