Úkol 1. Uvažujme podprostor $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) = \{\, a + b\cdot\sqrt[4]{2} + c\cdot\sqrt{2} + d\cdot\sqrt[4]{8} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q}\,\}$ vektorového prostoru $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$. Určete matici lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, daného pro $r \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ předpisem $\varphi(r) = r\cdot(1+\sqrt[4]{2}+\sqrt{2})$, vzhledem k bázím

$$\alpha = (2\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}-\sqrt{2}+2,\ \sqrt[4]{8}-\sqrt{2}+1,\ 2\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}-\sqrt{2}+1,\ -\sqrt[4]{8}-1)$$

$$\text{a } \beta = (\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2},\ 2\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}+1,\ \sqrt[4]{8}-2\sqrt[4]{2}+\sqrt{2},\ \sqrt[4]{2}-\sqrt{2}+1).$$

Dále nalezněte nějaké báze jádra a obrazu φ a rozhodněte, zda φ je lineární izomorfismus.

Řešení:

$$-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 16 & 4 & 8 & -12 \\ -19 & -5 & -13 & 11 \\ 14 & 6 & 10 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Úkol 2. Nalezněte nějaké báze jádra a obrazu lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, které má vzhledem k bázím

$$\alpha = ((0\ 1\ 0\ 1\ 0)^{\mathrm{T}},\ (1\ 0\ 0\ 1\ 0)^{\mathrm{T}},\ (0\ 0\ 1\ 0\ 1)^{\mathrm{T}},\ (0\ 0\ 1\ {-1}\ 0)^{\mathrm{T}},\ (1\ 2\ 0\ 1\ 1)^{\mathrm{T}})$$

$$\text{a } \beta = ((1\ {-1}\ 0\ 2)^{\mathrm{T}},\ (3\ {-2}\ 1\ 0)^{\mathrm{T}},\ (1\ 1\ {-1}\ 1)^{\mathrm{T}},\ (0\ 1\ 1\ 2)^{\mathrm{T}})$$

matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále určete matici zobrazení φ vzhledem k bázím γ a δ takovým, že matice přechodu od α ke γ je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a matice přechodu od β k δ je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Konečně, uvažujte vektor, který má v bázi γ souřadnice $(1\ 0\ 1\ {-1}\ 1)^{\mathrm{T}}$, a určete jeho obraz v zobrazení φ.

Řešení:

$$(\varphi)_{\delta,\gamma} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 & -3 & -4 \\ -3 & 8 & 5 & -2 & -7 \\ 3 & -5 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Obraz vektoru je $(4\ 2\ 3\ 15)^{\mathrm{T}}$.