Úkol 1. Rozhodněte, zda následující předpisy korektně definují lineární zobrazení φ vektorového prostoru $\{\, a \cdot \sqrt[4]{2} + b \cdot \sqrt[4]{8} \mid a, b \in \mathbb{Q} \,\}$ nad $\mathbb{Q}$ do sebe. Pokud ano, zvolte libovolné báze α a β tohoto prostoru a určete matici zobrazení φ vzhledem k bázím α a β. Dále nalezněte nějaké báze jádra a obrazu φ a rozhodněte, zda zobrazení φ je lineární izomorfismus.

(1) $\varphi(r) = r + \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8}$
(2) $\varphi(r) = r + 1$
(3) $\varphi(r) = r \cdot \sqrt[4]{2}$
(4) $\varphi(r) = r \cdot (1 + \sqrt{2})$

Řešení: 1 není lineární, 2 a 3 nejsou korektní, 4 je izomorfismus.

Úkol 2. Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ všech čtvercových matic řádu 2 nad $\mathbb{C}$. Určete matici lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ daného pro $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$ předpisem

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ c_3 + c_4 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázím

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2+5\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \\ 3+2\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} & 7 \\ -2+\mathrm{i} & 5+\mathrm{i} \end{pmatrix}\right)$$

a $\beta = ((1-\mathrm{i},\ 2-\mathrm{i})^{\mathrm{T}}, (-\mathrm{i},\ 1-2\mathrm{i})^{\mathrm{T}})$. Dále nalezněte nějaké báze jádra a obrazu φ a rozhodněte, zda zobrazení φ je lineární izomorfismus.