Topologie – jaro 2012 – 2. termín

1. Definujte konvergentní posloupnost bodů topologického prostoru a formulujte definici spojitosti pomocí konvergentních posloupností. Uveďte, za jakého předpokladu je tato definice ekvivalentní standardní definici pomocí otevřených množin, a svoje tvrzení dokažte. Dejte příklad bijekce f mezi topologickými prostory, která není homeomorfismus, ale přitom f i f^{-1} splňují podmínku v definici spojitosti pomocí konvergentních posloupností.

2. Napište definici topologického prostoru pomocí vlastností okolí, definujte pomocí okolí otevřené množiny a ukažte, že takto definované otevřené množiny splňují požadavky kladené v definici topologického prostoru pomocí otevřených množin.

3. Nechť X je alespoň čtyřbodový topologický prostor, který splňuje podmínku, že pro všechna $x \in X$ je jeho podprostor $X \setminus \{x\}$ Hausdorffův. Dokažte, že potom je prostor X Hausdorffův. Určete, pro které dvoubodové a tříbodové topologické prostory X toto tvrzení neplatí.

4. Nechť topologický prostor X je nějaký nekonečný retrakt prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ se součinovou topologií. Určete, které z následujících vlastností má prostor X: diskrétní, T_0, T_1, T_2, T_3, $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$, metrizovatelný, uniformizovatelný, kompaktní, lokálně kompaktní, souvislý, křivkově souvislý, jednoduše souvislý, totálně nesouvislý, 0-dimenzionální, Stoneův, stažitelný. Pokud pro některou vlastnost mohou nastat obě varianty, uveďte pro každou z nich příklad takového X. Všechna svoje tvrzení zdůvodněte.

5. (a) Dejte příklad kompaktního podprostoru otevřeného čtverce $(0,1) \times (0,1)$, který má spočetně mnoho komponent, přičemž každá jeho komponenta je nekonečná.

   (b) Dejte příklad stažitelného podprostoru otevřeného čtverce $(0,1)\times(0,1)$, který není jeho retraktem.

   Zdůvodněte, že vámi uvedené prostory skutečně splňují požadované podmínky.