Topologie – jaro 2012 – 1. termín

1. Definujte $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-prostory a T_4-prostory a napište, jaký je mezi těmito axiomy oddělitelnosti vztah. Dokažte, že každý metrizovatelný prostor je normální. Dále formulujte větu o vztahu mezi metrickými prostory a $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-prostory a popište konstrukci použitou k důkazu této věty.

2. Popište konstrukci, kterou se z daného topologického prostoru X vytváří jeho jednobodová kompaktifikace, a pro vámi definovanou topologii na $X \cup \{\omega\}$ dokažte platnost jedné ze dvou podmínek v definici topologického prostoru pomocí otevřených množin. Uveďte, za jakých podmínek dává tato konstrukce Hausdorffův prostor, a svoje tvrzení zdůvodněte. Nechť $(X, \leq)$ je uspořádaná množina chápaná jako topologický prostor. Formulujte a dokažte podmínku na uspořádání $\leq$ nutnou a postačující k tomu, aby prostor X splňoval vámi uvedené podmínky. Pro tyto prostory X popište, které posloupnosti bodů z X konvergují k ω v jednobodové kompaktifikaci prostoru X.

3. Nechť X a Y jsou topologické prostory, přičemž X je kompaktní a Y je Hausdorffův. Dokažte, že pro každé spojité zobrazení $\varphi\colon X \to Y$ platí, že podprostor $\varphi(X) \subseteq Y$ je kvocientem prostoru X. Dále ukažte, že ani jeden z předpokladů na prostory X a Y nelze vypustit.

4. Nechť X je neprázdný otevřený podprostor prostoru
$$\left(\prod_{n=1}^{\infty} \langle 0, n\rangle\right) \times \langle 0, \infty)$$
se součinovou topologií. Určete, které z následujících vlastností má prostor X: diskrétní, separabilní, T_0, T_1, T_2, T_3, $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$, T_4, metrizovatelný, uniformizovatelný, kompaktní, lokálně kompaktní, souvislý, křivkově souvislý, lokálně souvislý, jednoduše souvislý, totálně nesouvislý, 0-dimenzionální, Stoneův, stažitelný. Svoje tvrzení zdůvodněte. Pokud pro některou vlastnost mohou nastat obě varianty, uveďte pro každou z nich příklad takového X.

5. (a) Dejte příklad souvislého topologického prostoru X, který je sjednocením svých dvou totálně nesouvislých podprostorů A a B takových, že množina $A \cap B$ je nekonečná.

   (b) Dejte příklad topologického prostoru X a jeho stažitelných podprostorů A a B takových, že fundamentální grupa podprostoru $A \cap B$ je $\mathbb{Z}$.

   Zdůvodněte, že vámi uvedené prostory skutečně splňují požadované podmínky.