Topologie – jaro 2010 – 3. termín

1. Definujte uzávěr podmnožiny topologického prostoru a pomocí vlastností uzavřených množin zdůvodněte jeho existenci. Napište definici topologického prostoru pomocí vlastností uzávěru, definujte pomocí uzávěru uzavřené množiny a ukažte, že takto definované uzavřené množiny splňují požadavky kladené v definici topologického prostoru pomocí uzavřených množin.

2. Definujte jednobodovou kompaktifikaci. Uveďte, za jakých podmínek je jednobodová kompaktifikace Hausdorffův prostor, a svoje tvrzení zdůvodněte. Ukažte, že jednobodová kompaktifikace nekompaktního souvislého Hausdorffova prostoru je vždy souvislý prostor. Popište vztah mezi lokálně kompaktními a kompaktními Hausdorffovými prostory.

3. Nechť X a Y jsou topologické prostory, přičemž Y je kompaktní a Hausdorffův. Nechť $f\colon X \to Y$ je zobrazení takové, že pro každé spojité zobrazení g prostoru Y do uzavřeného intervalu I je i složení $g \circ f$ spojité. Dokažte, že potom je zobrazení f spojité.

4. Nechť X je libovolný podprostor uzavřeného intervalu I, jehož komplement je neprázdný a konečný. Určete, které z následujících vlastností má prostor $X^{\mathbb{R}}$ se součinovou topologií: T_0, T_1, T_2, T_3, $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$, diskrétní, metrizovatelný, uniformizovatelný, kompaktní, lokálně kompaktní, souvislý, křivkově souvislý, lokálně souvislý, jednoduše souvislý, totálně nesouvislý, 0-dimenzionální, Stoneův, stažitelný. Svoje tvrzení zdůvodněte. Pokud pro některou vlastnost mohou nastat obě varianty, uveďte pro každou z nich příklad takového X.

5. (a) Dejte příklad retraktu topologického prostoru $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, který má stejnou fundamentální grupu jako X, ale není s X homeomorfní.

   (b) Dejte příklad nekonečného souvislého kompaktního prostoru X a jeho disjunktních totálně nesouvislých podprostorů Y a Z takových, že $X = Y \cup Z$.

   Zdůvodněte, že vámi uvedené prostory skutečně splňují požadované podmínky.