Topologie – jaro 2010 – 1. termín

1. Definujte konvergentní posloupnost bodů topologického prostoru a formulujte definici spojitosti pomocí konvergentních posloupností. Uveďte, za jakého předpokladu je tato definice ekvivalentní standardní definici pomocí otevřených množin, a svoje tvrzení dokažte. Dejte příklad bijekce f mezi topologickými prostory, která není homeomorfismus, ale přitom f i f^{-1} splňují podmínku v definici spojitosti pomocí konvergentních posloupností.

2. Uveďte dvě ekvivalentní definice normálních prostorů a zformulujte Tietzeho větu. Nechť X je normální separabilní prostor a Y jeho podprostor takový, že pro všechna $x \in X \setminus Y$ je $Y \cup \{x\}$ otevřená množina v X. Dokažte, že potom $X \setminus Y$ má mohutnost menší než kontinuum.

3. Rozhodněte, zda kvocienty, podprostory či retrakty lokálně kompaktních prostorů jsou lokálně kompaktní. Svoje tvrzení zdůvodněte.
   (Nápověda: Uvažte například prostor $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.)

4. Buď X spočetný diskrétní prostor a Y neprázdný obojetný podprostor prostoru $X^{\mathbb{R}}$ se součinovou topologií. Určete, které z následujících vlastností má prostor Y: T_0, T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, diskrétní, metrizovatelný, uniformizovatelný, kompaktní, lokálně kompaktní, souvislý, křivkově souvislý, lokálně souvislý, jednoduše souvislý, totálně nesouvislý, 0-dimenzionální, Stoneův, stažitelný. Svoje tvrzení zdůvodněte. Pokud pro některou vlastnost mohou nastat obě varianty, uveďte pro každou z nich příklad takového Y.

5. (a) Dejte příklad topologického prostoru a jeho dvou souvislých a lokálně souvislých podprostorů takových, že jejich sjednocení je souvislé, ale není lokálně souvislé.

   (b) Dejte příklad stažitelného prostoru X a jeho stažitelného podprostoru Y takových, že Y není kvocientem X.

   Zdůvodněte, že vámi uvedené prostory skutečně splňují požadované podmínky.