Topologie – jaro 2009 – 4. termín

1. Definujte uzávěr podmnožiny topologického prostoru a pomocí vlastností uzavřených množin zdůvodněte jeho existenci. Napište definici topologického prostoru pomocí vlastností uzávěru, definujte pomocí uzávěru uzavřené množiny a ukažte, že takto definované uzavřené množiny splňují požadavky kladené v definici topologického prostoru pomocí uzavřených množin.

2. Definujte pojem konvergentní posloupnosti bodů topologického prostoru. Dokažte, že v Hausdorffových prostorech je limita posloupnosti určena jednoznačně, ale že T_1-prostory tuto vlastnost obecně nemají. Nechť X je spočetný diskrétní prostor a $Y = X \cup \{\omega\}$ je jeho jednobodová kompaktifikace. Určete, které posloupnosti bodů prostoru Y konvergují k ω, a svoje tvrzení zdůvodněte.

3. Nechť X je Hausdorffův prostor a $f\colon X \to Y$ je zobrazení do topologického prostoru Y, které je spojité na $X \setminus \{x\}$ pro všechny body $x \in X$. Dokažte, že zobrazení f je spojité. Dále ukažte, že f nemusí být spojité, pokud prostor X není Hausdorffův.

4. Nechť X je nějaký podprostor uzavřeného disku $B = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \,\}$ takový, že množina $B \setminus X$ je neprázdná a konečná. Určete, zda je X diskrétní, metrizovatelný, uniformizovatelný, kompaktní, lokálně kompaktní, souvislý, křivkově souvislý, jednoduše souvislý, lokálně souvislý, totálně nesouvislý, Stoneův, 0-dimenzionální, stažitelný a separabilní. Svoje tvrzení zdůvodněte. Pokud pro některou vlastnost mohou nastat obě varianty, uveďte pro každou z nich příklad takového X.

5. (a) Dejte příklad kompaktního prostoru X a jeho dvou souvislých podprostorů A a B takových, že podprostor $A \cap B$ je nekonečný a totálně nesouvislý.

   (b) Dejte příklad lokálně souvislého Hausdorffova topologického prostoru, který není lokálně kompaktní.

   Zdůvodněte, že vámi uvedené prostory skutečně splňují požadované podmínky.