Topologie – jaro 2009 – 3. termín

1. Definujte úplně regulární a normální prostory a formulujte větu o vztahu mezi těmito axiomy oddělitelnosti. Dokažte, že každý metrický prostor je úplně regulární. Dále formulujte větu o vztahu mezi metrickými a úplně regulárními T_1-prostory a popište konstrukci použitou k důkazu této věty.

2. Buď A podmnožina topologického prostoru X. Definujte topologii podprostoru A a podílu X/A. Dokažte, že tyto definice jsou korektní. Definujte retrakt topologického prostoru a dejte příklad neprázdného podprostoru uzavřeného intervalu $I \subset \mathbb{R}$, který není retraktem I, a příklad retraktu I, který není s I homeomorfní. Zdůvodněte, že vámi uvedené prostory skutečně splňují požadované podmínky.

3. Dokažte, že jsou-li A a B kompaktní podprostory Hausdorffova prostoru X, tak podprostor $A \cap B$ je rovněž kompaktní. Ukažte, že bez předpokladu, že prostor X je Hausdorffův, toto tvrzení neplatí.

4. Nechť X je nějaký neprázdný otevřený podprostor prostoru $2^{\mathbb{R}}$ se součinovou topologií, kde 2 značí dvoubodový diskrétní prostor. Určete, zda je X diskrétní, metrizovatelný, uniformizovatelný, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, kompaktní, lokálně kompaktní, souvislý, lokálně souvislý, totálně nesouvislý a Stoneův. Svoje tvrzení zdůvodněte. Pokud pro některou vlastnost mohou nastat obě varianty, uveďte pro každou z nich příklad takového X.

5. (a) Dejte příklad topologického prostoru, který není souvislý ani lokálně souvislý, ale každý jeho bod má křivkově souvislé okolí.

   (b) Dejte příklad topologických prostorů X a Y, jejich souvislých podprostorů $A \subseteq X$ a $B \subseteq Y$ a spojitého zobrazení $f\colon A \to B$ takových, že f nejde rozšířit na spojité zobrazení X do B, ale libovolné spojité zobrazení $g\colon A \to B$ jde rozšířit na spojité zobrazení X do Y.

   Zdůvodněte, že vámi uvedené prostory skutečně splňují požadované podmínky.