Topologie – jaro 2009 – 2. termín

1. Napište definici topologického prostoru pomocí vlastností okolí, definujte pomocí okolí otevřené množiny a ukažte, že takto definované otevřené množiny splňují požadavky kladené v definici topologického prostoru pomocí otevřených množin.

2. Definujte Hausdorffův prostor. Nechť $f, g\colon X \to Y$ jsou spojitá zobrazení topologických prostorů, kde Y je Hausdorffův, a nechť A je nějaká podmnožina X, na které se f a g shodují. Dokažte, že potom se f a g shodují rovněž na uzávěru A v X. Ukažte, že pokud prostor Y není Hausdorffův, toto tvrzení platit nemusí.

3. Dokažte, že v lokálně souvislém a lokálně kompaktním prostoru má každý bod souvislé kompaktní okolí.

4. Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo a nechť X je nějaký retrakt uzavřeného disku $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1 \,\}$. Určete, zda je X diskrétní, metrizovatelný, uniformizovatelný, kompaktní, lokálně kompaktní, souvislý, křivkově souvislý, totálně nesouvislý, 0-dimenzionální, Stoneův, stažitelný a jednoduše souvislý. Svoje tvrzení zdůvodněte. Pokud pro některou vlastnost mohou nastat obě varianty, uveďte pro každou z nich příklad takového X.

5. (a) Dejte příklad topologického prostoru, který není kompaktní ani diskrétní, a přitom je lokálně kompaktní a totálně nesouvislý.

   (b) Dejte příklad stažitelného topologického prostoru takového, že fundamentální grupa jeho jednobodové kompaktifikace je volná nad dvěma generátory.

   Zdůvodněte, že vámi uvedené prostory skutečně splňují požadované podmínky.