Topologie – jaro 2009 – 1. termín

1. Definujte pojem spojitosti zobrazení topologických prostorů a dokažte, že v případě metrických prostorů je tato definice ekvivalentní obvyklé definici pomocí konvergentních posloupností. Ukažte, že pro obecné topologické prostory tyto definice ekvivalentní nejsou. Definujte homeomorfismus topologických prostorů.

2. Definujte kompaktnost a lokální kompaktnost topologických prostorů včetně v definicích použitých pojmů, a formulujte větu o vztahu mezi těmito dvěma vlastnostmi. Dokažte, že uzavřený interval je kompaktní. Dejte příklad omezeného podprostoru $\mathbb{R}$, který není lokálně kompaktní.

3. Dokažte, že retrakt lokálně souvislého prostoru je lokálně souvislý.

4. Nechť X je nějaký nekonečný uzavřený podprostor prostoru $(0,1)^{\mathbb{N}}$, kde $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval. Určete, zda je X diskrétní, metrizovatelný, uniformizovatelný, kompaktní, lokálně kompaktní, souvislý, lokálně souvislý, totálně nesouvislý, 0-dimenzionální a Stoneův. Svoje tvrzení zdůvodněte. Pokud pro některou vlastnost mohou nastat obě varianty, uveďte pro každou z nich příklad takového X.

5. (a) Dejte příklad Hausdorffova topologického prostoru a jeho dvou neprázdných disjunktních totálně nesouvislých podprostorů, jejichž sjednocení je křivkově souvislé.

   (b) Dejte příklad Hausdorffova topologického prostoru X a relace ekvivalence $\sim$ na X takové, že $X/\sim$ Hausdorffův není.

   Zdůvodněte, že vámi uvedené prostory skutečně splňují požadované podmínky.