Topologie – jaro 2008 – 4. termín

1. Definujte komponenty souvislosti a křivkové souvislosti. Dokažte, že komponenty křivkové souvislosti vždy tvoří rozklad prostoru. Dále dokažte, že každá souvislá komponenta je uzavřená.

2. Uveďte dvě ekvivalentní definice normálních prostorů. Zformulujte Tietzeho větu a ukažte pomocí této věty, že každý uzavřený diskrétní podprostor separabilního normálního prostoru má mohutnost menší než kontinuum.

3. Nechť I je libovolná množina a X_i pro $i \in I$ jsou topologické prostory. Nechť dále $a = (a_i)_{i \in I}$ a $a_k = (a_{ki})_{i \in I}$ pro všechna přirozená čísla k jsou prvky součinu $\prod\limits_{i \in I} X_i$. Dokažte, že potom a je limitou posloupnosti a_k pro $k \to \infty$ právě tehdy, když pro všechna $i \in I$ je a_i limitou posloupnosti a_{ki} pro $k \to \infty$.

4. Buď X libovolná alespoň dvouprvková množina. Určete, které z následujících vlastností má prostor (X, τ), kde
$$\tau = \{\, A \subseteq X \mid A = \emptyset \text{ nebo } X \setminus A \text{ je nejvýše spočetná} \,\} :$$
T_0, T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, T_4, metrizovatelnost, kompaktnost, souvislost, lokální souvislost, totální nesouvislost. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.

5. (a) Dejte příklad Stoneova prostoru, který má větší mohutnost než $\mathbb{R}$.
   (b) Dejte příklad podprostoru sféry S^2, který není jejím retraktem.

   Zdůvodněte, že vámi uvedené prostory skutečně splňují požadované podmínky.