Topologie – jaro 2008 – 3. termín

1. Napište definici topologického prostoru pomocí vlastností okolí, definujte pomocí okolí otevřené množiny a ukažte, že takto definované otevřené množiny splňují požadavky kladené v definici topologického prostoru pomocí otevřených množin.

2. Definujte pojem homotopických zobrazení a dokažte, že homotopie je relace ekvivalence. Definujte homotopickou ekvivalenci prostorů a stažitelnost. Ukažte, že podprostor $\{ (a,a), (a,-a) \mid a \in \mathbb{R} \}$ prostoru $\mathbb{R}^2$ je stažitelný.

3. Dokažte, že pro libovolnou otevřenou množinu U v libovolném topologickém prostoru platí $\overline{U} = \overline{\operatorname{int} \overline{U}}$.
   (int A značí vnitřek množiny A a $\overline{A}$ její uzávěr)

4. Určete, které z následujících vlastností má Sorgenfreyova přímka, tj. množina $\mathbb{R}$ spolu s topologií generovanou intervaly tvaru $\langle a, b)$ pro $a, b \in \mathbb{R}$: T_0, T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, kompaktnost, souvislost, křivková souvislost, lokální souvislost, totální nesouvislost. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.

5. (a) Dejte příklad topologického prostoru, který je součinem lokálně souvislých prostorů, ale není lokálně souvislý.

   (b) Dejte příklad topologického prostoru, který je spočetný a totálně nesouvislý, a přitom není kompaktní ani diskrétní.

   Zdůvodněte, že vámi uvedené prostory skutečně splňují požadované podmínky.