# Topologie – jaro 2008 – 1. termín

1. Definujte regulární a úplně regulární prostory, a dokažte, že každý úplně regulární prostor je regulární. Formulujte větu o vložení úplně regulárního $T_1$-prostoru do součinu metrických prostorů a dejte předpis definující toto vložení.

2. Definujte pojmy souvislosti, křivkové souvislosti a lokální souvislosti topologického prostoru. Pro každou nepravdivou implikaci mezi těmito třemi vlastnostmi uveďte příklad prostoru, který její pravdivost vyvrací.

3. Dokažte, že zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi topologickými prostory $X$ a $Y$ je spojité právě tehdy, když pro každou podmnožinu $A \subseteq Y$ platí $f^{-1}(\operatorname{int} A) \subseteq \operatorname{int}(f^{-1}(A))$. ($\operatorname{int} A$ značí vnitřek množiny $A$)

4. Buď $X$ libovolná alespoň dvouprvková množina. Určete, které z následujících vlastností má prostor $(X, \tau)$, kde

$$\tau = \{\, A \subseteq X \mid A = \emptyset \text{ nebo } X \setminus A \text{ je konečná} \,\} :$$

   $T_0$, $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_{3\frac{1}{2}}$, $T_4$, metrizovatelnost, kompaktnost, souvislost, lokální souvislost, totální nesouvislost. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.

5. (a) Dejte příklad uspořádané množiny $(X, \leq)$ takové, že topologie na $X$ obsahující právě množiny nahoru uzavřené v $\leq$ není kompaktní a má právě dvě souvislé komponenty.

   (b) Dejte příklad Hausdorffova topologického prostoru, který není lokálně kompaktní a má mohutnost kontinua.

   Zdůvodněte, že vámi uvedené prostory skutečně splňují požadované podmínky.