Úloha 1 (10 bodů): Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{\sqrt{\frac{x+1}{2}}}{x} \leq \left| \frac{|x-1|-1}{x} \right|$$

Úloha 2 (10 bodů): Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující

$$\log_{x^2} \frac{3x+2}{3x+1} \leq \log_{x^2}(2-x) - \log_{x^2}(4-x)$$

Úloha 3 (10 bodů): Nalezněte (až na ekvivalenci) všechna tvrzení o tom, zda dárky nosí Ježíšek nebo Santa Claus, taková, že tvrzení

„Dárky nosí Ježíšek, a ne Santa Claus.“

platí právě tehdy, když současně platí následující dvě tvrzení:

„Nosí-li dárky Ježíšek, a ne Santa Claus, potom platí hledané tvrzení.“

„Hledané tvrzení neplatí právě tehdy, když buď dárky nosí Santa Claus nebo je současně splněno, že hledané tvrzení neplatí a dárky nosí Ježíšek.“

Svoji odpověď zdůvodněte.

Úloha 4 (5 bodů): Určete, pro která komplexní čísla z platí

$$\frac{2 - 2 \cdot \mathrm{i} + z + z \cdot \mathrm{i}}{\mathrm{i} - 1 - z - z \cdot \mathrm{i}} = \frac{1}{z}$$

Úloha 5 (5 bodů): Nalezněte všechna komplexní čísla z, jejichž třetí mocnina patří do množiny

$$\{\, x + y \cdot i \mid x, y \in \mathbb{R},\ x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 3 \,\}$$

Úloha 6 (10 bodů): Hejno sta špačků přiletělo do třešňového sadu, v němž stojí tři sta stromů, přičemž na každém stromě je 99 třešní. Každý špaček si náhodně vybere některý ze stromů, usedne na něj, a pokud na něm ještě zbývá nějaká třešeň, tak jednu třešeň sezobne.

1) Určete, kolika různými způsoby se mohou špačci rozesadit na stromy, zajímá-li nás pouze, kolik špačků na kterém stromě sedí. (mezi stromy v sadu rozlišujeme)

2) Určete, při kolika z těchto rozesazení nesedí na žádném stromě více než jeden špaček.

3) Určete pravděpodobnost, že na některého ze špačků žádná třešeň nezbyde.

4) Určete pravděpodobnost, že na některém stromě žádná třešeň nezůstane.