Úloha 1. Buď V množina všech komplexních čísel. Dokažte, že množina V spolu s obvyklým sčítáním a s násobením definovaným předpisem

$$(a+b\mathrm{i}) \star (c+d\mathrm{i}) = ac + 3bc + 5bd + (ad - 2bc - 3bd)\mathrm{i}$$

pro $a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ a $c + d\mathrm{i} \in V$, je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$.

Úloha 2. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$ všech reálných čísel tvaru $a+b\cdot\sqrt{2}$, kde $a, b \in \mathbb{Q}$, s obvyklými operacemi. Mějme báze $\alpha = (\sqrt{2}+c^3\cdot(c^2-3), (c+1)\cdot\sqrt{2}-2c)$ a $\beta = (\sqrt{2}-2, 2)$ prostoru V, kde $c \in \mathbb{R}$. Víme, že matice přechodu mezi těmito bázemi je

$$(\mathrm{id})_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1+c \\ 1-c & 1 \end{pmatrix}$$

a že vektor z V, který má v bázi α souřadnice $(c^4 + 3c^3, 2c)$, má v bázi β souřadnice $(c^4 + 3c^3 + 2c^2 + 2c, 2c^3 - 4c^2)$. Určete číslo c.

Úloha 3. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$ všech reálných čísel tvaru $a+b\cdot\sqrt{2}$, kde $a, b \in \mathbb{Q}$, s obvyklými operacemi. Buď dále f lineární transformace prostoru V definovaná předpisem $f(r) = r\cdot(1+\sqrt{2})$. Určete všechny báze α prostoru V takové, že matice f vzhledem k α je

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Výsledek uveďte v co nejjednodušším tvaru.

Úloha 4. Nechť V je množina všech hladkých reálných funkcí, jejichž druhá derivace je tvaru $a\cdot\sin x + b\cdot\cos x$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$. Určete dimenzi vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{R}$ s obvyklými operacemi a svoje tvrzení dokažte. Dále uvažujme lineární transformaci φ prostoru V zadanou předpisem

$$\varphi(f) = \int\limits_{x}^{x+\pi/2} f \,\mathrm{d}x\,.$$

Zvolte libovolnou bázi α prostoru V, spočtěte matici transformace φ vzhledem k bázi α a určete jádro transformace φ.

Úloha 5. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ s bází $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Dále buď φ lineární transformace prostoru V, která má vzhledem k bázi α matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zvolte libovolné báze β prostoru $\ker\varphi$ a γ prostoru $\operatorname{im}\varphi$ (jejich vektory vyjádřete pomocí vektorů báze α). Spočtěte matici zobrazení vnoření $\iota\colon \ker\varphi \hookrightarrow V$ vzhledem k bazím β a α a matici zobrazení $\psi\colon \operatorname{im}\varphi \to V$ vzhledem k bazím γ a α, kde ψ je zúžení zobrazení φ na podprostor $\operatorname{im}\varphi$.