Úloha 1. Již víme, že množina reálných čísel

$$V = \left\{ \frac{a + b \cdot \sqrt{2}}{c + \sqrt{2}} \mid a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$$

spolu s obvyklými operacemi je vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Dokažte, že $\alpha = (1, \sqrt{2})$ je báze prostoru V.

Úloha 2. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{R}$ a jeho báze $\alpha = (3 + a \cdot \mathrm{i} - \mathrm{i}, (2 + a^3) \cdot a)$ a $\beta = (2 - \mathrm{i}, a^3 + \mathrm{i})$. Víme, že matice přechodu mezi těmito bázemi je

$$(\mathrm{id})_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a \end{pmatrix}.$$

Určete číslo a. Dále uvažujme vektor $u \in \mathbb{C}$, který má v bázi β souřadnice $(2, -1)$. Určete souřadnice vektoru u v bázi α.

Úloha 3. Mějme transformaci φ vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$, která má vzhledem k bázi $(1 + \mathrm{i}, 2 - \mathrm{i})$ matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte všechny báze α prostoru $\mathbb{C}$ takové, že vzhledem k α má φ matici A.

Úloha 4. Uvažujme vektorový prostor

$$V = \{a + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x + d \cdot \sin x \cdot \cos x \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

reálných funkcí s obvyklými operacemi (nad $\mathbb{R}$). Dále uvažujme lineární transformaci φ prostoru V zadanou podmínkami

$$\left(\frac{\varphi(f)}{2 - \sin x} \right)' = \left(\frac{f}{2 - \sin x} \right)' \qquad \qquad \varphi(f)(0) = 0$$

pro každé $f \in V$. Zvolte libovolnou bázi α prostoru V a dokažte, že se skutečně jedná o bázi. Spočtěte matici transformace φ vzhledem k bázi α a určete jádro transformace φ.

Úloha 5. Buď $\varphi : \mathbb{Q}_2[x] \to \mathbb{Q}_2[x]$ transformace prostoru všech polynomů stupně nejvýše 2 nad $\mathbb{Q}$, která má vzhledem k bázi $\alpha = (x^2 + x + 1, 2x^2 - x + 2, x^2 + 2)$ matici

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zvolte libovolnou bázi β prostoru $\operatorname{Im} \varphi$ a spočtěte matice zobrazení $\varphi : \mathbb{Q}_2[x] \to \operatorname{Im} \varphi$ a vnoření $\iota : \operatorname{Im} \varphi \hookrightarrow \mathbb{Q}_2[x]$ vzhledem k bazím α a β.