M1110 Lineární algebra a geometrie I, podzim 2008, vzorová písemka

Čas na vypracování celé písemky: 180 minut

Praktická část: (čas na vypracování: 90 minut)

Úkol 1 (10 bodů): Nechť

$$U = \{\, a + b\mathrm{i} + c\sqrt{2} \mid a, b, c \in \mathbb{Q} \,\}$$
$$\text{a } V = \{\, a + b\mathrm{i} + c\sqrt{2} + d\sqrt{2}\mathrm{i} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q} \,\}$$

jsou podprostory vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{Q}$. Určete matici lineárního zobrazení $\varphi\colon U \to V$ daného pro $x \in U$ předpisem $\varphi(x) = (1 + \sqrt{2} + \mathrm{i}) \cdot x$ v bázích $\alpha = (1 + \mathrm{i} + \sqrt{2},\ 2 + \mathrm{i},\ \mathrm{i} - \sqrt{2})$ a $\beta = (1 + \mathrm{i} - \sqrt{2},\ 1 - \sqrt{2}\mathrm{i},\ \sqrt{2} \cdot (\mathrm{i} + 1),\ \mathrm{i} - \sqrt{2})$. Dále nalezněte nějaké báze jádra a obrazu zobrazení φ.

Úkol 2 (10 bodů): Rozhodněte, pro která $s, t \in \mathbb{R}$ je možné posloupnost vektorů

$$(1\ 0\ 1\ 0\ {-2})^{\mathrm{T}},\ (0\ 2\ {-2}\ 1\ {-1})^{\mathrm{T}},\ (1\ 2\ {-1}\ s\ t)^{\mathrm{T}}$$

doplnit na bázi podprostoru

$$U = \{\, (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \,\}$$

prostoru $\mathbb{R}^5$. Pro ta s, t, pro která to možné je, danou posloupnost na bázi U doplňte.

Úkol 3 (10 bodů): Rozhodněte, zda podprostor U vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$ nad $\mathbb{Q}$ generovaný vektory $u_1 = (-1\ 4\ {-1}\ 1)^{\mathrm{T}}$, $u_2 = (2\ 3\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$ a $u_3 = (-2\ 1\ 0\ {-1})^{\mathrm{T}}$ je roven podprostoru V generovanému vektory $v_1 = (2\ 3\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$, $v_2 = (1\ 2\ 1\ {-1})^{\mathrm{T}}$ a $v_3 = (-1\ 2\ {-1}\ 1)^{\mathrm{T}}$. Jsou-li si rovny, vyjádřete každý z vektorů u_1, u_2 a u_3 jako lineární kombinaci vektorů v_1, v_2 a v_3, a každý z vektorů v_1, v_2 a v_3 jako lineární kombinaci vektorů u_1, u_2 a u_3. Jsou-li U a V různé, nalezněte nějaké báze jejich průniku a součtu, a dejte příklad nějakého vektoru, který v jednom z prostorů U a V leží a ve druhém neleží.

Teoretická část:

Úkol 4 (5 bodů): Definujte determinant a multilineární zobrazení.

Úkol 5 (5 bodů): Uveďte tři různé ekvivalentní charakterizace báze vektorového prostoru.

Úkol 6 (7 bodů): Dokažte, že inverze k lineárnímu izomorfismu je lineární izomorfismus.

Úkol 7 (5 bodů): Nechť $(a, b)^{\mathrm{T}}, (c, d)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ jsou lineárně nezávislé vektory a α je báze $\mathbb{R}^2$ taková, že souřadnice vektoru $(a, b)^{\mathrm{T}}$ v α jsou $(a + b, a - b)^{\mathrm{T}}$ a souřadnice vektoru $(c, d)^{\mathrm{T}}$ v α jsou $(c + d, c - d)^{\mathrm{T}}$. Dokažte, že potom souřadnice libovolného vektoru $(x, y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ v α jsou $(x + y, x - y)^{\mathrm{T}}$.

Úkol 8 (8 bodů): Rozhodněte, které axiomy vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$ splňuje a které nesplňuje množina $\mathbb{R}^2$ s operacemi $\oplus$ a $\odot$ definovanými $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c - 1, b + d + 3)$ a $q \odot (a, b) = (aq + q, bq - 3q)$. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.

Úkol 9 (5 bodů): Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Svoje rozhodnutí zdůvodněte: Je-li V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, potom vektory $u, v \in V$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když vektory $u + v$ a $u - v$ jsou lineárně nezávislé.

Úkol 10 (5 bodů): Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Svoje rozhodnutí zdůvodněte: Je-li U vektorový prostor dimenze 4 a V_1, V_2 a V_3 jsou podprostory U dimenze 2, potom alespoň jeden s podprostorů $V_1 \cap V_2$, $V_1 \cap V_3$ a $V_2 \cap V_3$ obsahuje nejméně dva vektory.

Úkol 11 (5 bodů): Dejte příklad regulárních čtvercových matic A a B nad $\mathbb{R}$ takových, že ani jedna z nich není jednotková, a splňují $A \neq B^{-1}$ a $(AB)^{-1} = BA$.

Úkol 12 (5 bodů): Dejte příklad vektorového prostoru V a lineárních zobrazení $\varphi, \psi\colon V \to V$ takových, že prostory $\ker(\varphi)$, $\ker(\psi)$ a $\ker(\varphi \circ \psi)$ jsou po dvou neizomorfní.