M1110 Lineární algebra a geometrie I, podzim 2008, 5. 2. 2009

Čas na vypracování celé písemky: 180 minut

Praktická část: (čas na vypracování: 90 minut)

Úkol 1 (10 bodů): Určete matici lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ nad $\mathbb{R}$ daného pro $P \in \mathbb{R}_3[x]$ předpisem $f(P) = P' - (x+3)\cdot P(1)$ vzhledem k bázím $\alpha = (x^3,\ (x-1)^2,\ x+1,\ 3)$ a $\beta = (x^2-1,\ x,\ 2)$. Dále nalezněte nějaké báze jádra a obrazu zobrazení f.
($\mathbb{R}_n[x]$ značí vektorový prostor všech polynomů stupně nejvýše n nad $\mathbb{R}$, $P(1)$ značí hodnotu polynomu P v bodě 1 a P' derivaci P)

Úkol 2 (10 bodů): Určete, pro která $c \in \mathbb{C}$ patří vektor $u = (-2, 1, -1-\mathrm{i}, c^2+1)^{\mathrm{T}}$ do podprostoru $\mathbb{C}^4$ generovaného nad $\mathbb{C}$ vektory

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 1, -\mathrm{i}, 1)^{\mathrm{T}}, \\ v_2 &= (1, \mathrm{i}, 2, 1+\mathrm{i})^{\mathrm{T}}, \\ v_3 &= (0, \mathrm{i}, 1, \mathrm{i})^{\mathrm{T}} \\ \text{a } v_4 &= (\mathrm{i}-c, 2, 0, 2+2\mathrm{i})^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Pro tato c vyjádřete u jako lineární kombinaci vektorů v_1, v_2, v_3 a v_4.

Úkol 3 (10 bodů): Rozhodněte, zda podprostor U vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ generovaný vektory $u_1 = (1\ 0\ 2\ 1)^{\mathrm{T}}$, $u_2 = (-1\ 1\ 1\ 3)^{\mathrm{T}}$, $u_3 = (-1\ 2\ 2\ 1)^{\mathrm{T}}$ a $u_4 = (2\ -1\ 1\ -2)^{\mathrm{T}}$ je roven podprostoru V generovanému vektory $v_1 = (1\ -1\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$, $v_2 = (1\ 0\ 2\ 1)^{\mathrm{T}}$ a $v_3 = (-1\ 3\ 3\ -1)^{\mathrm{T}}$. Jsou-li si rovny, vyjádřete každý z vektorů u_1, u_2, u_3 a u_4 jako lineární kombinaci vektorů v_1, v_2 a v_3, a každý z vektorů v_1, v_2 a v_3 jako lineární kombinaci vektorů u_1, u_2, u_3 a u_4. Jsou-li U a V různé, nalezněte nějaké báze jejich průniku a součtu, a dejte příklad nějakého vektoru, který v jednom z prostorů U a V leží a ve druhém neleží.

Teoretická část:

Úkol 4 (5 bodů): Definujte lineární zobrazení, lineární izomorfismus a jádro lineárního zobrazení.

Úkol 5 (5 bodů): Definujte součet a přímý součet dvojice vektorových podprostorů. Formulujte větu o vztahu mezi dimenzemi součtu a průniku podprostorů.

Úkol 6 (7 bodů): Dokažte, že vektory $v_1, \ldots, v_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je lineární kombinací ostatních.

Úkol 7 (5 bodů): Dokažte, že jsou-li $\varphi\colon V \to W$ a $\psi\colon W \to V$ lineární zobrazení a přitom φ je izomorfismus, potom prostory $\ker(\varphi \circ \psi)$ a $\ker(\psi \circ \varphi)$ mají stejnou dimenzi.

Úkol 8 (8 bodů): Rozhodněte, které axiomy vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$ splňuje a které nesplňuje množina $\mathbb{R}$ s operacemi $\oplus$ a $\odot$ definovanými $a \oplus b = a + b + a \cdot b$ a $q \odot a = q^2 \cdot a$. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.

Úkol 9 (5 bodů): Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Svoje rozhodnutí zdůvodněte: Pro libovolné dvě čtvercové matice A a B stejného typu nad $\mathbb{R}$ platí $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Úkol 10 (5 bodů): Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Svoje rozhodnutí zdůvodněte: Nechť $u, v, w \in \mathbb{R}^2$. Jsou-li vektory u a v lineárně nezávislé a vektory v a w lineárně nezávislé, potom vektory u a w jsou lineárně závislé.

Úkol 11 (5 bodů): Dejte příklad vektorového prostoru V a nekonstantního lineárního zobrazení $\varphi\colon V \to V$ takového, že $\varphi \circ \varphi$ je konstantní.

Úkol 12 (5 bodů): Dejte příklad vektorového prostoru V a jeho různých vzájemně izomorfních podprostorů V_1 a V_2, které splňují $\dim(V_1 + V_2) = 2 \cdot \dim(V_1 \cap V_2)$.