M1110 Lineární algebra a geometrie I, podzim 2008, 29. 1. 2009

Čas na vypracování celé písemky: 180 minut

Praktická část: (čas na vypracování: 90 minut)

Úkol 1 (10 bodů): Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ je lineární zobrazení, které má vzhledem k bázím

$$\alpha = ((1\ 2\ 1\ 0)^{\mathrm{T}},\ (0\ {-1}\ 1\ 0)^{\mathrm{T}},\ (0\ 1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}},\ (1\ 1\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}) \text{ a}$$
$$\beta = ((1\ 1\ {-1}\ {-1})^{\mathrm{T}},\ (0\ 1\ 0\ 1)^{\mathrm{T}},\ (1\ {-2}\ 0\ 1)^{\mathrm{T}},\ (1\ 0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}})$$

matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte nějaké báze jádra a obrazu zobrazení φ. Dále určete obraz vektoru $(2\ 2\ 4\ 2)^{\mathrm{T}}$ v zobrazení φ.

Úkol 2 (10 bodů): Určete, pro která $a \in \mathbb{Q}$ jsou polynomy $a^2x^3 + ax + a$, $ax^3 + x^2 + x + 2$ a $2x^3 + 2x^2 + x + a + 1$ lineárně závislé v prostoru $\mathbb{Q}_3[x]$ polynomů stupně nejvýše 3 nad $\mathbb{Q}$. V případech, kdy závislé jsou, vyjádřete některý z nich jako lineární kombinaci ostatních. V případech, kdy jsou nezávislé, je doplňte na bázi prostoru $\mathbb{Q}_3[x]$.

Úkol 3 (10 bodů): Rozhodněte, zda podprostor U vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ generovaný vektory $u_1 = (1\ 2\ {-1}\ 1)^{\mathrm{T}}$, $u_2 = ({-1}\ 1\ 4\ 2)^{\mathrm{T}}$, $u_3 = (1\ 5\ 2\ 4)^{\mathrm{T}}$ a $u_4 = (0\ 1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}$ je roven podprostoru V generovanému vektory $v_1 = (1\ 1\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$, $v_2 = (1\ 3\ {-2}\ 1)^{\mathrm{T}}$ a $v_3 = ({-1}\ 3\ 2\ 2)^{\mathrm{T}}$. Jsou-li si rovny, vyjádřete každý z vektorů u_1, u_2, u_3 a u_4 jako lineární kombinaci vektorů v_1, v_2 a v_3, a každý z vektorů v_1, v_2 a v_3 jako lineární kombinaci vektorů u_1, u_2, u_3 a u_4. Jsou-li U a V různé, nalezněte nějaké báze jejich průniku a součtu, a dejte příklad nějakého vektoru, který v jednom z prostorů U a V leží a ve druhém neleží.

Teoretická část:

Úkol 4 (5 bodů): Definujte vektorový prostor.

Úkol 5 (5 bodů): Definujte jádro lineárního zobrazení. Formulujte větu o vztahu mezi dimenzemi jádra a obrazu.

Úkol 6 (7 bodů): Formulujte dvě různé ekvivalentní charakterizace direktnosti součtu dvou vektorových podprostorů a dokažte, že jsou skutečně ekvivalentní.

Úkol 7 (5 bodů): Dokažte, že jsou-li nenulové vektory u_1, u_2 a u_3 lineárně závislé a vektory u_3, u_4 a u_5 jsou také lineárně závislé, potom i vektory u_1, u_2, u_4 a u_5 jsou lineárně závislé.

Úkol 8 (8 bodů): Rozhodněte, zda následující zobrazení φ a ψ vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$ do sebe jsou lineární: $\varphi(a + b\mathrm{i}) = a + b + b\mathrm{i}$, pro $a, b \in \mathbb{R}$, a $\psi(c) = |c|$, pro $c \in \mathbb{C}$. Dále rozhodněte o linearitě těchto zobrazení, chápeme-li $\mathbb{C}$ jako vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.

Úkol 9 (5 bodů): Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Svoje rozhodnutí zdůvodněte: Pro každou regulární čtvercovou matici A nad $\mathbb{R}$ existuje matice B taková, že $\det(A \cdot B) = 2$.

Úkol 10 (5 bodů): Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Svoje rozhodnutí zdůvodněte: Jsou-li U a V izomorfní vektorové prostory konečné dimenze, potom libovolné injektivní lineární zobrazení U do V je lineární izomorfismus.

Úkol 11 (5 bodů): Dejte příklad vektorových prostorů V, W nad $\mathbb{Q}$ a lineárních zobrazení $\varphi\colon V \to W$ a $\psi\colon W \to V$ takových, že $\varphi \circ \psi$ je lineární izomorfismus, ale $\psi \circ \varphi$ izomorfismus není.

Úkol 12 (5 bodů): Dejte příklad vektorového prostoru V a jeho podprostorů V_1, V_2 a V_3 takových, že $V_1 + V_2 + V_3 = V$, $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}$ a přitom pro libovolné $i, j \in \{1, 2, 3\}$ platí $V_i + V_j \neq V$ a $V_i \cap V_j \neq \{0\}$.