M1110 Lineární algebra a geometrie I, podzim 2008, 15. 1. 2009

Čas na vypracování celé písemky: 180 minut

Praktická část: (čas na vypracování: 90 minut)

Úkol 1 (10 bodů): Nechť V je vektorový prostor všech čtvercových matic typu 2×2 nad $\mathbb{R}$. Určete matici lineárního zobrazení $\varphi\colon V \to V$ daného pro $A \in V$ předpisem

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

v bázích

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{a } \beta = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Dále nalezněte nějaké báze jádra a obrazu zobrazení φ.

Úkol 2 (10 bodů): Určete, pro která $r \in \mathbb{R}$ patří vektor $u = (r, r+1, 0, r)^{\mathrm{T}}$ do podprostoru $\mathbb{R}^4$ generovaného nad $\mathbb{R}$ vektory

$$\begin{aligned} v_1 &= (2, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \\ v_2 &= (2r-2, r, r, r-1)^{\mathrm{T}}, \\ v_3 &= (r^2+1, r^2+r, 1, r^2)^{\mathrm{T}} \\ \text{a } v_4 &= (r+1, r, 1-r, r)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Pro tato r vyjádřete u jako lineární kombinaci vektorů v_1, v_2, v_3 a v_4.

Úkol 3 (10 bodů): Nalezněte nějaké báze součtu a průniku podprostorů U a V prostoru $\mathbb{C}^4$ nad $\mathbb{C}$, kde

$$\begin{aligned} U &= [(1\ 2\ {-3}\ 4)^{\mathrm{T}}, (2\ 1\ 3\ {-1})^{\mathrm{T}}, (1\ 1\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}, (3\ 2\ 3\ 0)^{\mathrm{T}}] \\ \text{a } V &= [(2\ 1\ 2\ 0)^{\mathrm{T}}, ({-1}\ 1\ {-2}\ 1)^{\mathrm{T}}, (3\ 0\ 4\ {-1})^{\mathrm{T}}, (1\ 2\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}]. \end{aligned}$$

Vyjádřete vektory báze $U \cap V$ jako lineární kombinace vektorů generujících U a jako lineární kombinace vektorů generujících V. Rozhodněte, zda je součet $U + V$ přímý.

Teoretická část:

Úkol 4 (5 bodů): Definujte bázi a dimenzi vektorového prostoru včetně v definici použitých pojmů.

Úkol 5 (5 bodů): Formulujte Frobeniovu větu o řešitelnosti soustavy a Cramerovo pravidlo.

Úkol 6 (7 bodů): Dokažte, že průnik a součet dvou vektorových podprostorů jsou opět vektorové podprostory.

Úkol 7 (5 bodů): Dokažte, že (u, v, w) je báze vektorového prostoru V právě tehdy, když $(u, u + v, u + v + w)$ je báze V.

Úkol 8 (8 bodů): Rozhodněte, které axiomy vektorového prostoru nad $\mathbb{Q}$ splňuje a které nesplňuje množina $\{ a \in \mathbb{R} \mid a \geq 1 \}$ s operacemi $\oplus$ a $\odot$ definovanými $a \oplus b = \max\{a, b\}$ a $q \odot a = a + |q - 1|$. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.

Úkol 9 (5 bodů): Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Svoje rozhodnutí zdůvodněte: Nechť A je matice nad $\mathbb{R}$ typu $k \times n$. Definujme lineární zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a $\psi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ předpisy $\varphi(x) = A \cdot x$ a $\psi(y) = A^{\mathrm{T}} \cdot y$. Potom prostory $\mathrm{Im}(\varphi)$ a $\mathrm{Im}(\psi)$ jsou izomorfní.

Úkol 10 (5 bodů): Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Svoje rozhodnutí zdůvodněte: Každý vektorový prostor je roven přímému součtu nějakých dvou vzájemně izomorfních podprostorů.

Úkol 11 (5 bodů): Dejte příklad vektorových prostorů V, W nad $\mathbb{R}$ a lineárních zobrazení $\varphi\colon V \to W$ a $\psi\colon W \to V$ takových, že $\varphi \circ \psi$ je konstantní, ale $\psi \circ \varphi$ konstantní není.

Úkol 12 (5 bodů): Dejte příklad vektorového prostoru V dimenze 3, jeho báze (u, v, w) a lineárního izomorfismu $\varphi\colon V \to V$ takových, že $\varphi(u + v) = w$.