M1110 Lineární algebra a geometrie I, podzim 2008, 8. 1. 2009

Čas na vypracování celé písemky: 180 minut

Praktická část: (čas na vypracování: 90 minut)

Úkol 1 (10 bodů): Nechť U, V a W jsou vektorové prostory nad $\mathbb{Q}$, α báze U, β báze V a γ a δ báze W. Nechť $\varphi\colon U \to V$ a $\psi\colon V \to W$ jsou lineární zobrazení taková, že φ má vzhledem k bázím α a β matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ψ má vzhledem k bázím β a γ matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a matice přechodu od δ ke γ je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určete matici zobrazení $\psi \circ \varphi$ vzhledem k bázím α a δ.

Úkol 2 (10 bodů): Určete, pro která $r \in \mathbb{R}$ jsou vektory $(1-r, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $(1, 1, r, 1-2r)^{\mathrm{T}}$ a $(1-2r, 1, 1, r)^{\mathrm{T}}$ prostoru $\mathbb{R}^4$ lineárně závislé. V případech, kdy závislé jsou, vyjádřete některý z nich jako lineární kombinaci ostatních. V případech, kdy jsou nezávislé, je doplňte na bázi prostoru $\mathbb{R}^4$.

Úkol 3 (10 bodů): Nalezněte nějaké báze součtu a průniku podprostorů U a V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polynomů stupně nejvýše 3 nad $\mathbb{R}$, kde

$$U = [x^3 - x^2 + x - 1,\ -x^3 + 2x^2 - x + 3,\ 2x^3 - x^2 + 2x]$$
$$\text{a } V = [2x^3 + x^2 + x,\ x^3 + x^2 - 1,\ -x^2 + x + 2].$$

Vyjádřete vektory báze $U \cap V$ jako lineární kombinace vektorů generujících U a jako lineární kombinace vektorů generujících V. Rozhodněte, zda je součet $U + V$ přímý.

Teoretická část:

Úkol 4 (5 bodů): Definujte vektorový podprostor a lineární obal konečné množiny vektorů.

Úkol 5 (5 bodů): Formulujte větu o vztahu mezi hodností, determinantem a existencí inverze.

Úkol 6 (7 bodů): Dokažte, že lineární zobrazení je prosté právě tehdy, když má triviální jádro.

Úkol 7 (5 bodů): Dokažte, že je-li vektorový prostor V přímým součtem svých podprostorů V_1 a V_2, a je-li $\varphi\colon V \to W$ lineární izomorfismus, potom prostor W je přímým součtem svých podprostorů $\varphi(V_1)$ a $\varphi(V_2)$.

Úkol 8 (8 bodů): Rozhodněte, zda následující zobrazení φ, ψ a ρ vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ do sebe jsou lineární:

$$\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} a+1 \\ b \end{smallmatrix}\right),\ \psi\left(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \cdot \varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)\right),\ \rho\left(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)\right) = \psi\left(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)\right) - \left(\begin{smallmatrix} a^2 \\ b^2 \end{smallmatrix}\right).$$

Svoje rozhodnutí zdůvodněte.

Úkol 9 (5 bodů): Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Svoje rozhodnutí zdůvodněte: Pokud vektory u a v jsou lineárně nezávislé a vektory v a w jsou lineárně nezávislé, potom i vektory u a w jsou lineárně nezávislé.

Úkol 10 (5 bodů): Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Svoje rozhodnutí zdůvodněte: Pro každý vektorový prostor V a jeho libovolnou bázi α platí, že lineární zobrazení $\varphi\colon V \to V$ není injektivní právě tehdy, když existuje vektor u patřící do báze α a různé vektory $v, w \in V$ splňující $\varphi(v) = \varphi(w) = u$.

Úkol 11 (5 bodů): Dejte příklad soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{Q}$ ve dvou proměnných x a y s parametrem t takové, že pro $t = 0$ nemá řešení, pro $t = 1$ má nekonečně mnoho řešení a pro ostatní hodnoty $t \in \mathbb{Q}$ má právě jedno řešení.

Úkol 12 (5 bodů): Dejte příklad vektorového prostoru V a lineárních zobrazení $\varphi, \psi\colon V \to V$ takových, že nejsou izomorfismy ani konstantní, a přitom prostory $\ker(\varphi)$, $\ker(\psi)$ a $\ker(\psi \circ \varphi)$ jsou izomorfní.