ODHADY VARIABILITY POSLOUPNOSTÍ NEURONOVÝCH IMPULSŮ

Kamil Rajdl

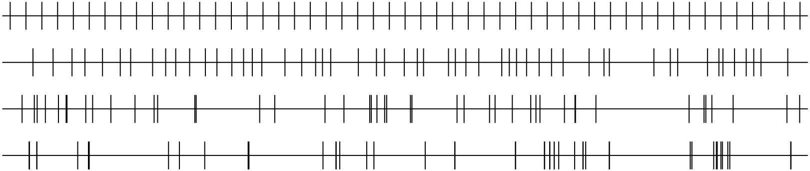
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
MU

Matematické modely a aplikace
5. - 6. září 2013

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
AMathNet síť pro transfer znalostí v aplikované matematice
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

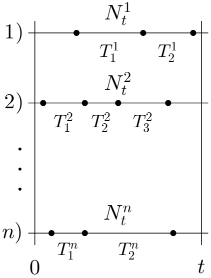
Informace v posloupnostech impulsů

- Kódování: intenzita, variabilita?

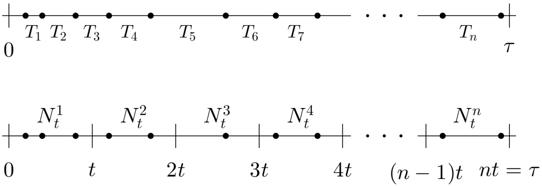


NEURONOVÁ DATA

A) n (krátkých) záznamů:



B) Jeden (dlouhý) záznam:



Míry variability

- Míry variability
    - **Variační koeficient** (CV) - variabilita délek meziimpulsových intervalů (ISIs)

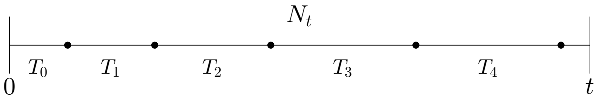
$$\mathrm{CV} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(T)}}{\mathrm{E}(T)}, \quad \widehat{\mathrm{CV}} = \frac{\sqrt{s_T^2}}{\overline{T}}$$

    - **Fano factor** (FF) - variabilita počtu impulsů

$$\mathrm{FF} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{FF}_t = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(N_t)}{\mathrm{E}(N_t)}, \quad \widehat{\mathrm{FF}} = \frac{s_{N_t}^2}{\overline{N}_t}$$

MODEL ISIs

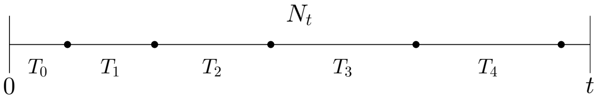
- Jako model posloupností impulsů uvažujeme rovnovážný proces obnovy.
- Tedy meziimpulsové intervaly jsou IID náhodné veličiny (T) s hustotou $f(t)$.
- Doba do prvního impulsu (T_0) - forward recurrence time.



- Pro ISIs splňující podmínky procesu obnovy platí

$$\mathrm{FF} = \mathrm{CV}^2 \tag{1}$$

PROBLÉMY ODHADŮ



- CV - ISIs jsou cenzorované pro malé t.
- FF - rychlost konvergence FF_t k FF. Rozdíl $\mathrm{FF} - \mathrm{FF}_t$ je (asymptotické) vychýlení odhadu $\widehat{\mathrm{FF}}$.
  - Jak malé t lze zvolit?
  - Jaké t je nejvhodnější v případě jednoho záznamu?

Průběh FF_t

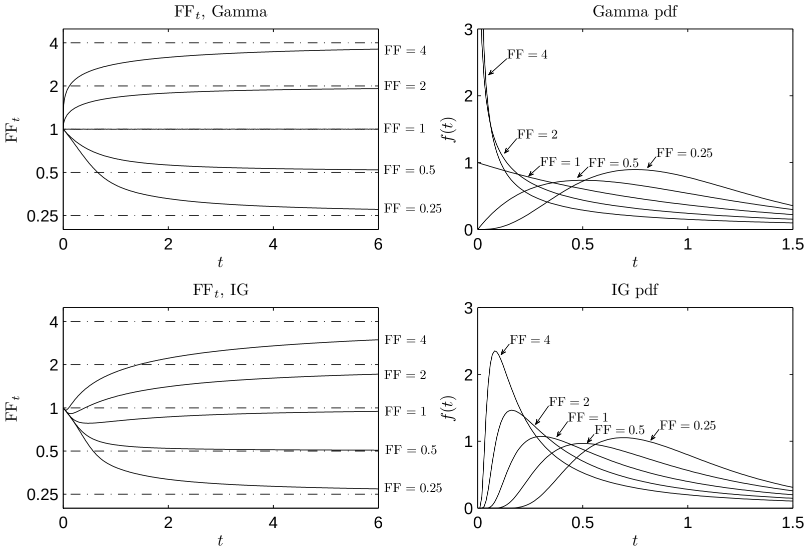
$$\lim_{t \to 0} \mathrm{FF}_t = 1,$$

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{FF}_t = \mathrm{CV}^2,$$

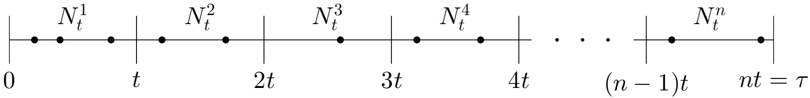
$$\mathrm{FF}_t = \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 + \mathcal{L}\{f\}(s)}{s^2[1 - \mathcal{L}\{f\}(s)]}\right\}(t) - \frac{t}{\mathrm{E}(T)}, \tag{2}$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{dFF}_t}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\mathrm{E}(T)}.$$

Průběh FF_t



SEGMENTACE DLOUHÉHO ZÁZNAMU

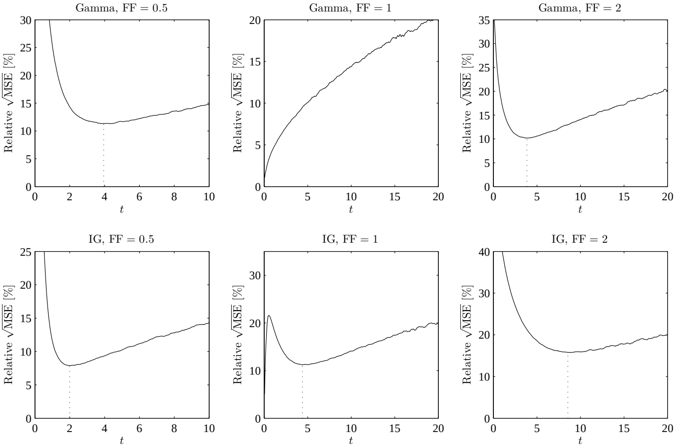


- Způsob segmentace (délky intervalů) neuronového záznamu má vliv na chybu odhadu $\widehat{\mathrm{FF}} = s^2_{N_t}/\overline{N}_t$:
  - zmenšení $t \Rightarrow$ vzrůst vychýlení ($\mathrm{Bias}(\widehat{\mathrm{FF}})$),
  - zvětšení $t \Rightarrow$ vzrůst rozptylu ($\mathrm{Var}(\widehat{\mathrm{FF}})$).

$\Rightarrow$ Existuje t, které minimalizuje střední kvadratickou chybu,

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\mathrm{FF}}) = \mathrm{E}(\widehat{\mathrm{FF}} - \mathrm{FF})^2 = \mathrm{Bias}^2(\widehat{\mathrm{FF}}) + \mathrm{Var}(\widehat{\mathrm{FF}}).$$

Mean square error - simulace



$\mathrm{E}(T) = 1$, $\tau = 1000$.

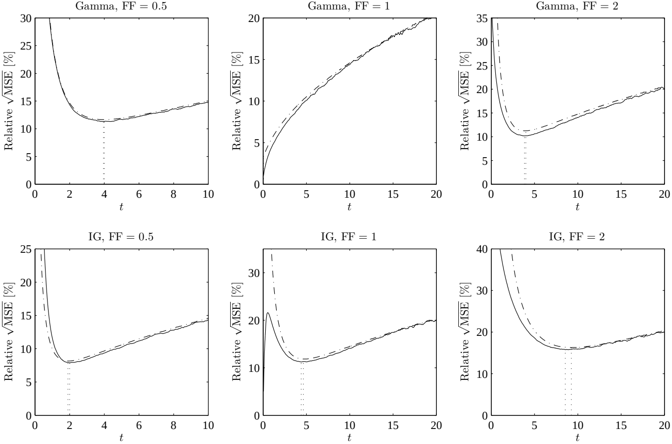
Mean square error - aproximace

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(\widehat{\mathrm{FF}}) &= \mathrm{Bias}^2(\widehat{\mathrm{FF}}) + \mathrm{Var}(\widehat{\mathrm{FF}}) \approx \\
&\approx \left[\frac{1}{t}\mathrm{E}(T)\mathrm{G}(T)\right]^2 + \frac{\mathrm{E}^2(T)}{t^2}\left[\frac{2}{n-1} + \frac{\mathrm{E}^2(T)}{nt^2}\left(\mathrm{G}(T) + \frac{\mathrm{CV}^2}{\mathrm{E}(T)}t\right)\right] \\
&\cdot \left[\mathrm{G}(T) + \frac{\mathrm{CV}^2}{\mathrm{E}(T)}t\right]^2, \quad \text{pro } t, n \to \infty,
\end{aligned} \tag{3}
$$

kde

$$
\mathrm{G}(T) = \frac{1}{2}(1+\mathrm{CV}^2)^2 - \frac{1}{3}\frac{\mathrm{E}(T^3)}{\mathrm{E}^3(T)}.
$$

MEAN SQUARE ERROR - APROXIMACE



$\mathrm{E}(T) = 1$, $\tau = 1000$.

Použití, problémy

- Problémy přímé minimalizace $\mathrm{MSE}(\widehat{\mathrm{FF}})$:
  - Neznámé hodnoty $\mathrm{E}(T)$, CV, $\mathrm{E}(T^3)$.
  - Minima příliš blízko 0 pro $\mathrm{FF} \approx 1$.

$\Rightarrow$ Odhadneme přibližné hodnoty a minimalizujeme

$$\max\{\mathrm{MSE}(\widehat{\mathrm{FF}}); \mathrm{CV} \in I\},$$

případně

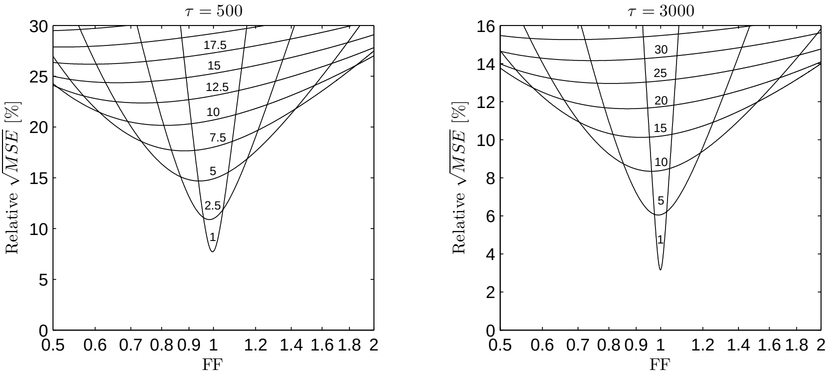
$$\max\{\mathrm{MSE}(\widehat{\mathrm{FF}}); \mathrm{CV} \in I, \mathrm{E}(T^3) \in J\},$$

pro vhodné intervaly I, J. Tedy

$$t_o = \min_{t>0} \max\{\mathrm{MSE}(\widehat{\mathrm{FF}}); \mathrm{CV} \in I, \mathrm{E}(T^3) \in J\}.$$

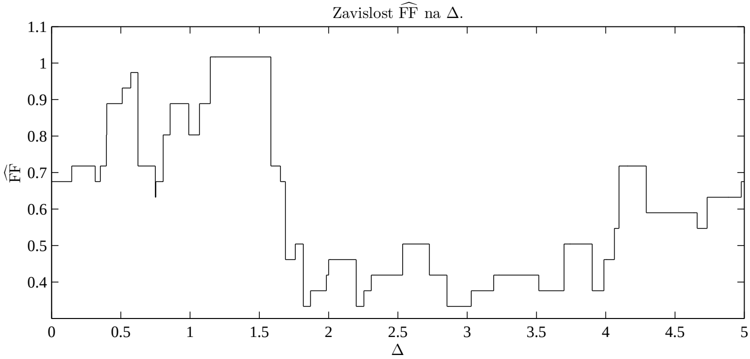
PŘÍKLAD MINIMALIZACE

- Poissonův proces ($\mathrm{FF} = 1$):



Závislost odhadu na posunutí intervalů

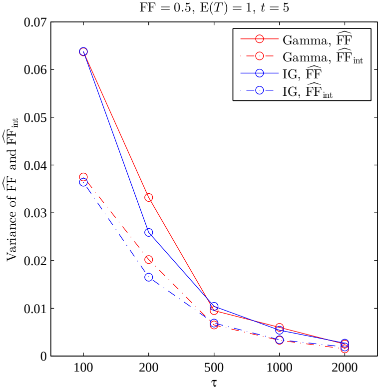
- Po volbě t lze intervaly před výpočtem odhadu ještě posunout o $\Delta \in [0, t]$.

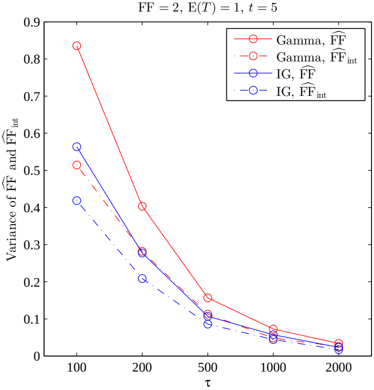


$$\Rightarrow \widehat{\mathrm{FF}}_{\mathrm{int}} = \frac{1}{t} \int_0^t \widehat{\mathrm{FF}}(\Delta) \mathrm{d}\Delta$$

Závislost odhadu na posunutí intervalů

- Tato modifikace snižuje rozptyl odhadu.





Děkuji za pozornost.