INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rovnovážné modely v teorii portfolia

Lenka Křivánková

3. září 2013, Podlesí

Obsah

Portfolio a jeho charakteristiky

- Definice portfolia
- Výnosnost a riziko aktiv
- Výnosnost a riziko portfolia

Klasická teorie portfolia

- Markowitzův model
- Tobinův model
- CAPM - model oceňování kapitálových aktiv

Dynamická teorie portfolia

- Mertonův model
- Stochastická teorie portfolia
- Rovnovážný model s očekávanou výnosností jako funkcí ceny

Obsah

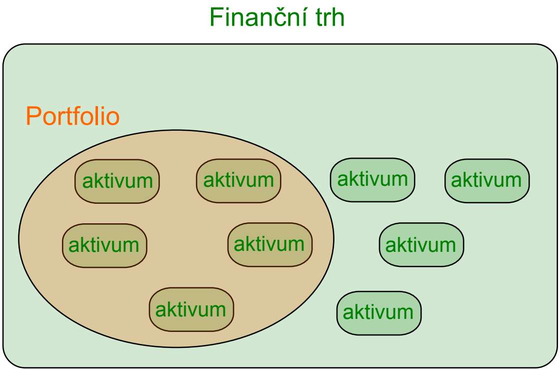
Portfolio a jeho charakteristiky
- Definice portfolia
- Výnosnost a riziko aktiv
- Výnosnost a riziko portfolia

Klasická teorie portfolia
- Markowitzův model
- Tobinův model
- CAPM - model oceňování kapitálových aktiv

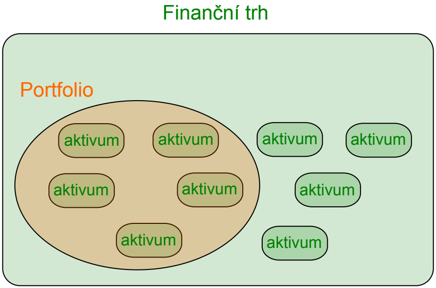
Dynamická teorie portfolia
- Mertonův model
- Stochastická teorie portfolia
- Rovnovážný model s očekávanou výnosností jako funkcí ceny

Portfolio

- množina aktiv (akcií, dluhopisů, peněz...)



Portfolio



Váhy portfolia

- relativní podíly aktiv obsažených v portfoliu
- $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$, kde $\sum_{j=1}^{n} X_j = 1$

Výnosnost a riziko

Výnosnost aktiva

Míra výnosnosti

- relativní zisk nebo ztráta z investice
- náhodná veličina r_j
- očekávaná výnosnost $\mathrm{E}(r_j) = \mu_j$
- rozptyl výnosnosti $\mathrm{D}(r_j) = \sigma_j^2$
- $r_j(t, t + \Delta t) = \frac{P_j(t+\Delta t) - P_j(t)}{P_j(t)}$

Riziko aktiva

Riziko

- směrodatná odchylka výnosnosti aktiva
- $\sqrt{\mathrm{D}(r_j)} = \sigma_j$

Výnosnost portfolia

Výnosnost portfolia

- náhodná veličina $r_p = \sum_{j=1}^{n} X_j r_j$
- očekávaná výnosnost portfolia $\mathrm{E}(r_p) = \mu_p = \sum_{j=1}^{n} X_j \mu_j$
- rozptyl výnosnosti portfolia $\mathrm{D}(r_p) = \sigma_p^2$

Riziko portfolia

Riziko

- směrodatná odchylka výnosnosti portfolia $\sqrt{\mathrm{D}(r_p)} = \sigma_p$
- $\sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} X_j X_k \sigma_{jk}}$,
  kde $\mathrm{C}(r_j, r_k) = \sigma_{jk}$ je kovariance výnosností aktiva j a aktiva k

Obsah

Portfolio a jeho charakteristiky
- Definice portfolia
- Výnosnost a riziko aktiv
- Výnosnost a riziko portfolia

Klasická teorie portfolia
- Markowitzův model
- Tobinův model
- CAPM - model oceňování kapitálových aktiv

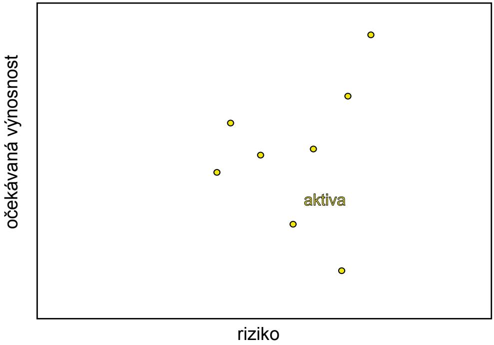
Dynamická teorie portfolia
- Mertonův model
- Stochastická teorie portfolia
- Rovnovážný model s očekávanou výnosností jako funkcí ceny

Moderní teorie portfolia

- Harry Markowitz (1952)
- Tobinův model (1958)
- CAPM - Sharpe (1964), Lintner (1965) a Mossin (1966)

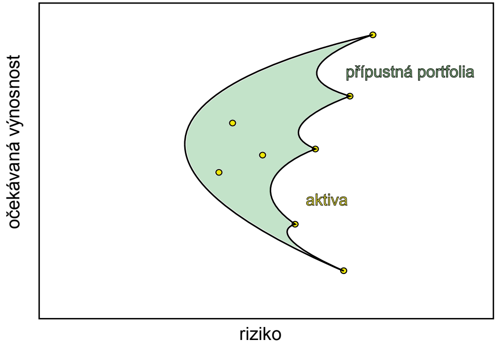
Markowitzova teorie portfolia

- prostor výnosnost-riziko



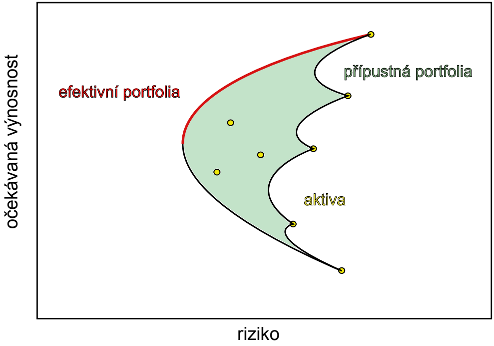
Markowitzova teorie portfolia

- množina přípustných portfolií



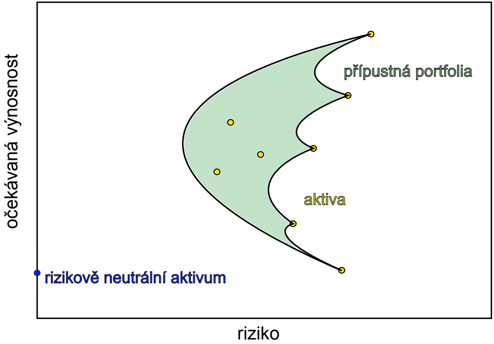
Markowitzova teorie portfolia

- množina efektivních portfolií



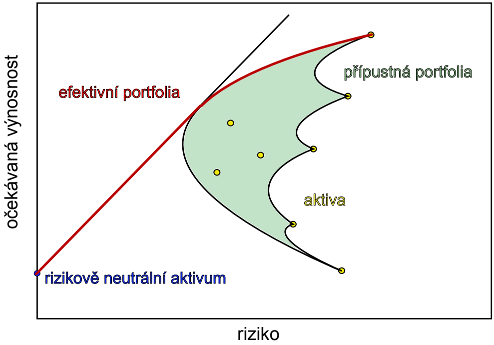
Tobinův model

- rizikově neutrální aktivum



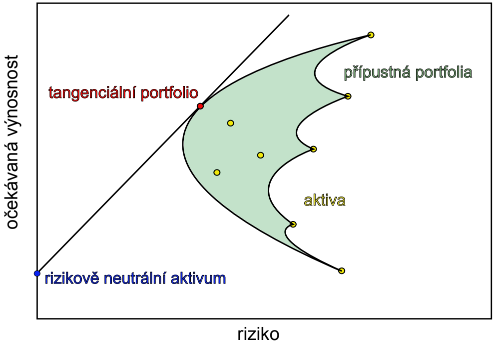
Tobinův model

- množina efektivních portfolií



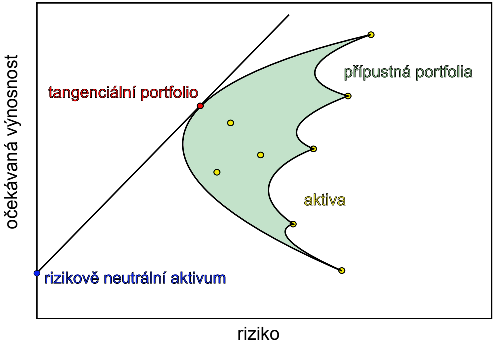
Tobinův model

- tangenciální portfolio



Tobinův model

- tangenciální portfolio → separační věta



CAPM

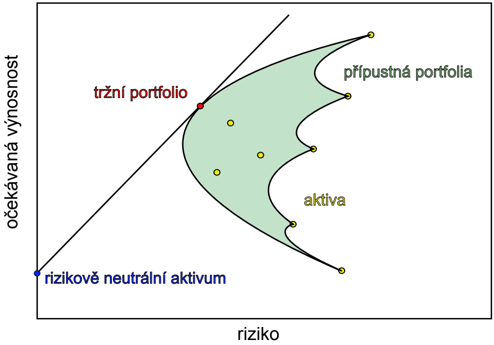
- zkoumá chování trhu
- vychází z Tobinova modelu

Předpoklady modelu:

- investoři při sestavování portfolia využívají Markowitzův přístup
- investoři mají homogenní očekávání

CAPM

- tržní portfolio



Důsledky CAPM

Důsledkem CAPM je tržní rovnováha a separační věta.

Věta (Separační věta)

Všichni investoři drží portfolia se stejnými relativními podíly rizikových aktiv bez ohledu na svou rizikovou averzi a své portfolio doplňují bezrizikovým aktivem dle svých rizikových preferencí.

Definice (Tržní rovnováha)

Pojem *tržní rovnováha* označuje takovou situaci, při které je nabídka vyrovnána s poptávkou.

Dynamická tržní rovnováha

Definice (Dynamická rovnováha)

Kapitálový trh je v *dynamické rovnováze* právě tehdy, když v každém čase t, pro každé aktivum j a každého investora i existuje vektor cen aktiv $\boldsymbol{P}(t)$ takový, že

$$\sum_{i \in I} w_j(i,t) = N_j(t) P_j(t) = V_j(t),$$

kde $V_j(t)$ je tržní hodnota aktiva j v čase t a $w_j(i,t)$ je optimální množství bohatství investované investorem i do aktiva j v čase t.
Ceny $\boldsymbol{P}(t)$ se nazývají *tržní ceny*.

Obsah

Portfolio a jeho charakteristiky
- Definice portfolia
- Výnosnost a riziko aktiv
- Výnosnost a riziko portfolia

Klasická teorie portfolia
- Markowitzův model
- Tobinův model
- CAPM - model oceňování kapitálových aktiv

Dynamická teorie portfolia
- Mertonův model
- Stochastická teorie portfolia
- Rovnovážný model s očekávanou výnosností jako funkcí ceny

Klasická teorie portfolia x Dynamická teorie portfolia

	Klasická teorie portfolia	Dynamická teorie portfolia
čas	diskrétní	spojitý
výhody	intuitivní	realistický
nevýhody	nezohledňuje změny	složitý

Mertonův model

- předpokládá rovnováhu na trhu (CAPM)
- Model pro proces ceny aktiva $P(t)$ je dán

$$\mathrm{d}P(t) = P(t)\mu\mathrm{d}t + P(t)\sigma\mathrm{d}W(t),$$

  kde $P(t)$ je cena podkladového aktiva v čase t a $W(t)$ je Wienerův proces.
- separační věta – bezrizikové aktivum & tržní portfolio

Bezrizikové aktivum & Tržní portfolio

- Cena bezrizikového aktiva se řídí následujícím modelem

$$\mathrm{d}B(t) = B(t)r_f(t)\mathrm{d}t,$$

kde $B(t)$ je cena bezrizikového aktiva v čase t, $r_f(t)$ je míra výnosnosti bezrizikového aktiva.

- Cena tržního portfolia $P(t)$ se řídí modelem

$$\mathrm{d}P(t) = P(t)\mu_p\mathrm{d}t + P(t)\sigma_p\mathrm{d}W(t),$$

kde $W(t)$ je Wienerův proces a μ_p, σ_p jsou konstanty.

Optimální portfolio

Investorovo bohatství $w(t)$ je proces popsaný modelem

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{w(t)} = X_p(t)\frac{\mathrm{d}P(t)}{P(t)} + \big(1 - X_p(t)\big)r_f\mathrm{d}t,$$

kde $X_p(t)$ označuje váhu pro tržní portfolio a $X_f = (1 - X_p(t))$ označuje váhu pro bezrizikové aktivum.

Merton odvodil explicitní řešení pro případ, kdy charakteristiky (očekávaná hodnota a rozptyl) výnosností aktiv jsou konstanty.

Ohlson-Rosenbergův Paradox

- Rosenberg and Ohlson (1976)
- objevili nekonzistenci Mertonova modelu
- rozpor mezi předpoklady:
  μ_p, σ_p jsou konstanty & tržní rovnováhou

Stochastická teorie portfolia

- Robert Fernholz (2002)

Předpoklady modelu:

- parametry procesu ceny aktiva jsou také stochastické procesy
- nepředpokládá tržní rovnováhu
- nepředpokládá neexistenci arbitráže

Logaritmický model cen aktiv

Fernholz používá logaritmický model

$$\mathrm{d}\log P_j(t) = \gamma_j(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \xi_{jk}(t)\mathrm{d}W_k(t),$$

kde $P_j(t)$ je cena aktiva j v čase t, $\gamma_j(t)$ a $\xi_{jk}(t)$ jsou stochastické procesy a $\boldsymbol{W}(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))^{\mathrm{T}}$ je n-rozměrný Wienerův proces.

- $\gamma_j(t)$ se nazývá *tempo růstu*
- $\xi_{jk}(t)$ se nazývá proces *volatility*

Tempo růstu a volatilita

- Tempo růstu a míra výnosnosti jsou spolu ve vztahu

$$\mu_j(t) = \gamma_j(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} {\xi_{jk}}^2(t).$$

- Volatilita ξ je maticová odmocnina kovarianční matice $\mathbf{\Sigma}$,

$$\mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}.$$

Rovnovážný model s očekávanou výnosností jako funkcí ceny

Předpoklady modelu:

- očekávaná výnosnost není konstantní (je funkcí ceny)
- tržní rovnováha

Ceny aktiv

Předpokládáme, že ceny aktiv splňují stochastickou diferenciální rovnici (SDE)

$$\mathrm{d}P_j(t) = P_j(t)\mu_j(t)\mathrm{d}t + P_j(t)\sum_{k=1}^{n}\xi_{jk}(t)\mathrm{d}W_k(t), \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{W}(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))^{\mathrm{T}}$ je n-rozměrný Wienerův proces, $\mu_j(t)$ je očekávaná výnosnost aktiva j a $\xi_{jk}(t)$ jsou volatility aktiv.

Váhy tržního portfolia

- Pro vektor vah tržního portfolia uvažujeme následující vztah
$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}, \tag{2}$$
kde $\mathbf{1}$ je vektor jedniček, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^{\mathrm{T}}$ je vektor očekávaných výnosností aktiv a $\boldsymbol{\Sigma}$ je kovarianční matice výnosností aktiv.
- váhy tržního portfolia jsou rovny relativní tržní hodnotě
$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{V}}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}} \tag{3}$$
- vektor očekávaných výnosností
$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V} \tag{4}$$

Zjednodušující předpoklady pro SDE cen aktiv

Předpoklady modelu:

- matice $\mathbf{\Sigma}$ je diagonální
- rizika aktiv σ_j jsou konstantní
- počety aktiv N_j jsou konstantní

Z těchto předpokladů a z SDE (1) dostáváme

$$\mathrm{d}P_j(t) = P_j^2(t){\sigma_j}^2 N_j \mathrm{d}t + P_j(t)\sigma_j \mathrm{d}W_j(t).$$

Očekávaná cena aktiva

Hledáme vztah pro očekávanou cenu aktiva.

$$\mathsf{E}\big(\mathrm{d}P_j(t)\big) = \mathsf{E}\big(P_j^2(t)\sigma_j{}^2 N_j \mathrm{d}t\big)$$

Očekávaná cena aktiva

Hledáme vztah pro očekávanou cenu aktiva.

$$\mathsf{E}\left(\mathrm{d}P_j(t)\right) = \mathsf{E}\left(P_j^2(t)\sigma_j{}^2 N_j \mathrm{d}t\right)$$

Úpravami získáme obyčejnou diferenciální rovnici (ODE)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathsf{E}\left(P_j(t)\right) &= \sigma_j{}^2 N_j \mathsf{E}\left(P_j^2(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \sigma_j{}^2 N_j \left[\mathsf{D}\left(P_j(t)\right) + \mathsf{E}^2\left(P_j(t)\right)\right]\mathrm{d}t \\
&= \sigma_j{}^2 N_j \left[\sigma_j{}^2 + \mathsf{E}^2\left(P_j(t)\right)\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Očekávaná cena aktiva

Hledáme vztah pro očekávanou cenu aktiva.

$$\mathsf{E}\big(\mathrm{d}P_j(t)\big) = \mathsf{E}\big(P_j^2(t)\sigma_j{}^2 N_j \mathrm{d}t\big)$$

Úpravami získáme obyčejnou diferenciální rovnici (ODE)

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{d}\mathsf{E}\big(P_j(t)\big)} &= \sigma_j{}^2 N_j \mathsf{E}\big(P_j^2(t)\big)\mathrm{d}t \\ &= \sigma_j{}^2 N_j \big[\mathsf{D}\big(P_j(t)\big) + \mathsf{E}^2\big(P_j(t)\big)\big]\mathrm{d}t \\ &\underline{= \sigma_j{}^2 N_j \big[\sigma_j{}^2 + \mathsf{E}^2\big(P_j(t)\big)\big]\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Očekávaná cena aktiva

Hledáme vztah pro očekávanou cenu aktiva.

$$\mathrm{E}\big(\mathrm{d}P_j(t)\big) = \mathrm{E}\big(P_j^2(t){\sigma_j}^2 N_j \mathrm{d}t\big)$$

Úpravami získáme obyčejnou diferenciální rovnici (ODE)

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{d}\mathrm{E}\big(P_j(t)\big)} &= {\sigma_j}^2 N_j \mathrm{E}\big(P_j^2(t)\big)\mathrm{d}t \\ &= {\sigma_j}^2 N_j \big[\mathrm{D}\big(P_j(t)\big) + \mathrm{E}^2\big(P_j(t)\big)\big]\mathrm{d}t \\ &\underline{= {\sigma_j}^2 N_j \big[{\sigma_j}^2 + \mathrm{E}^2\big(P_j(t)\big)\big]\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Řešení ODE je

$$\boxed{\mathrm{E}\big(P_j(t)\big) = \sigma_j \tan\big({\sigma_j}^3 N_j t\big)}.$$

Předpoklady pro SDE cen aktiv

Předpoklady modelu:

- matice $\mathbf{\Sigma}$ ~~je diagonální~~
- rizika aktiv σ_j jsou konstantní
- počety aktiv N_j jsou konstantní

Z těchto předpokladů a z SDE (1) dostáváme

$$\mathrm{d}P_j(t) = P_j(t)\sum_{k=1}^{n} P_k(t)N_k(t)\sigma_{jk}\mathrm{d}t + P_j(t)\sum_{k=1}^{n}\xi_{jk}(t)\mathrm{d}W_k(t).$$

Očekávaná cena aktiva

Hledáme vztah pro očekávanou cenu aktiva.

$$\mathrm{E}\big(\mathrm{d}P_j(t)\big) = \mathrm{E}\left(P_j(t)\sum_{k=1}^{n} P_k(t)N_k(t)\sigma_{jk}\mathrm{d}t\right)$$

Úpravami získáme systém diferenciálních rovnic

$$\mathrm{d}\mathrm{E}\big(P_j(t)\big) = N_j\left[\sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}{}^2 + \mathrm{E}\big(P_j(t)\big)\sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}\mathrm{E}\big(P_k(t)\big)\right]\mathrm{d}t$$

Kam dál?

- numerické metody
- simulace x reálná data
- odhad ξ? $\boldsymbol{\Sigma} = \xi\xi^{\mathrm{T}}$
- ???

Literatura

- FABOZZI, F. J. et al. 2008. *Bayesian Methods in Finance*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons. ISBN 978-0-471-92083-0.
- FERNHOLZ, E. R., 2002. *Stochastic Portfolio Theory*. New York: Springer-Verlag. ISBN 0-387-95405-8.
- MERTON, R. C., 1971. Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. *Journal of Economic Theory*. 3, p. 373–413.
- ROSENBERG, B., OHLSON, J. A., 1976. The Stationary Distribution of Returns and Portfolio Separation in Capital Markets: A Fundamental Contradiction. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 11, p. 393–402.

Děkuji za pozornost.