

Transformované exponenciální a Weibullovo rozdělení v analýze přežití

ANALÝZA PŘEŽITÍ V PRAXI

- Analýza přežití (survival analysis)
 - lékařství
- Analýza spolehlivosti (reliability analysis)
 - inženýrské aplikace
- Analýza historie událostí (event history analysis)
 - sociologie
- Analýza doby trvání (duration analysis)
 - ekonomie, finance

ZÁKLADNÍ POJMY

- Analýza přežití
= studie času mezi vstupem jedince do pozorování a sledovanou událostí
- Doba přežití T (t)
- Cenzorování
= koncový bod zájmu nebyl pozorován

CHARAKTERISTIKY DOBY PŘEŽITÍ

- Funkce přežití
= pravděpodobnost, že jedinec přežije déle než čas t

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$$

- Riziková funkce
= pravděpodobnost, že jedinec zemře v čase t za předpokladu, že do tohoto času byl naživu

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} [\log S(t)]$$

METODY ODHADU FUNKCE PŘEŽITÍ

- Neparametrické
 - Kaplan-Meierův odhad

$$\hat{S}(t) = \prod_{j=1}^k \frac{n_j - d_j}{n_j}$$

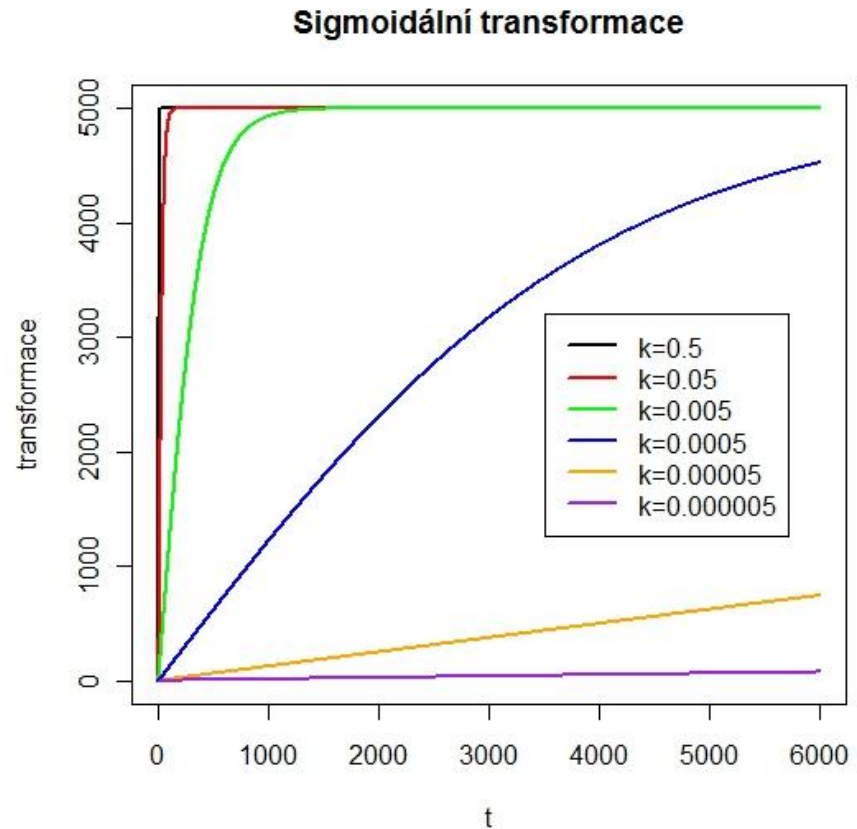
- Parametrické
 - Exponenciální, Weibullovo, log-normální, gamma rozdělení

SIGMOIDÁLNÍ TRANSFORMACE

$$y = \frac{a}{1 + e^{-kt}}$$

$$y = \frac{2a}{1 + e^{-kt}} - a$$

$$y = -\frac{1}{k} \ln \frac{a-t}{a+t}$$



EXPONENCIÁLNÍ ROZDĚLENÍ

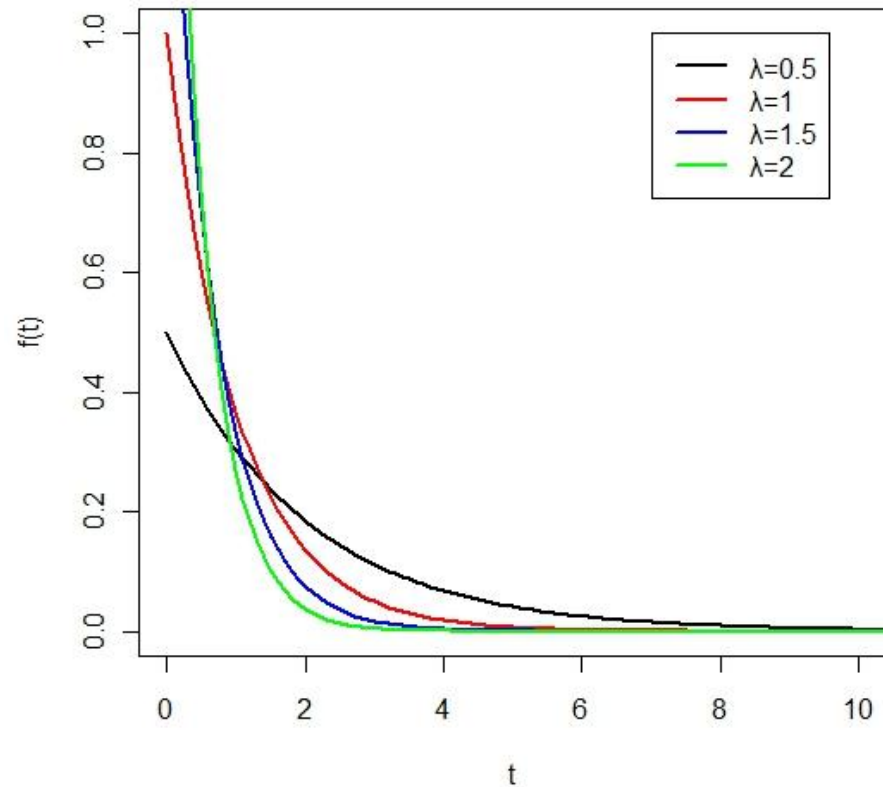
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$S(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \lambda$$

Hustota exponenciálního rozdělení



WEIBULLOVO ROZDĚLENÍ

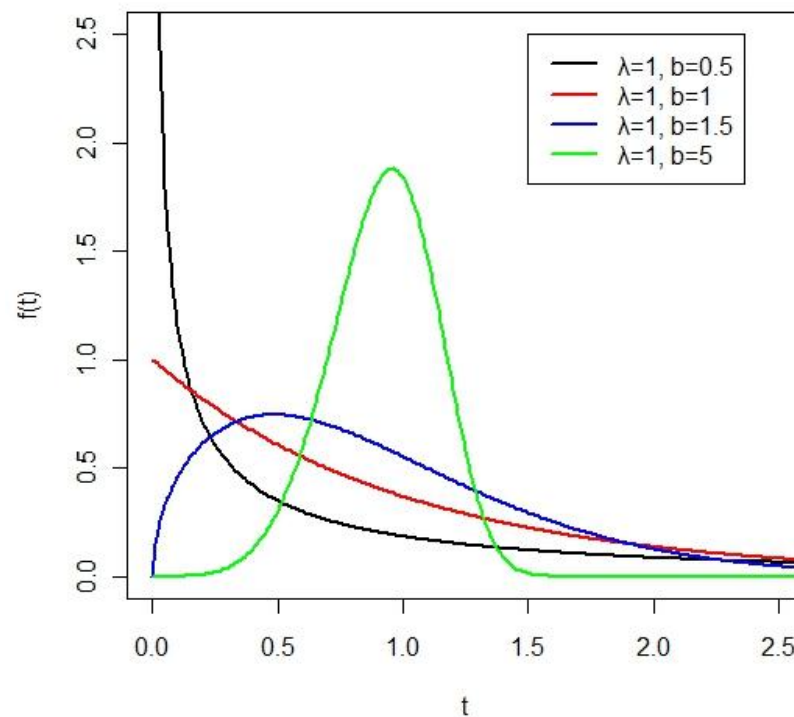
$$f(t) = \frac{b}{\lambda^b} t^{b-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^b}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^b}$$

$$S(t) = 1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^b}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{b}{\lambda^b} t^{b-1}$$

Hustota Weibullova rozdělení



TRANSFORMOVANÉ EXPONENCIÁLNÍ ROZDĚLENÍ

$$f(t) = \frac{2ad}{(a^2 - t^2)} e^{d \ln \frac{a-t}{a+t}}$$

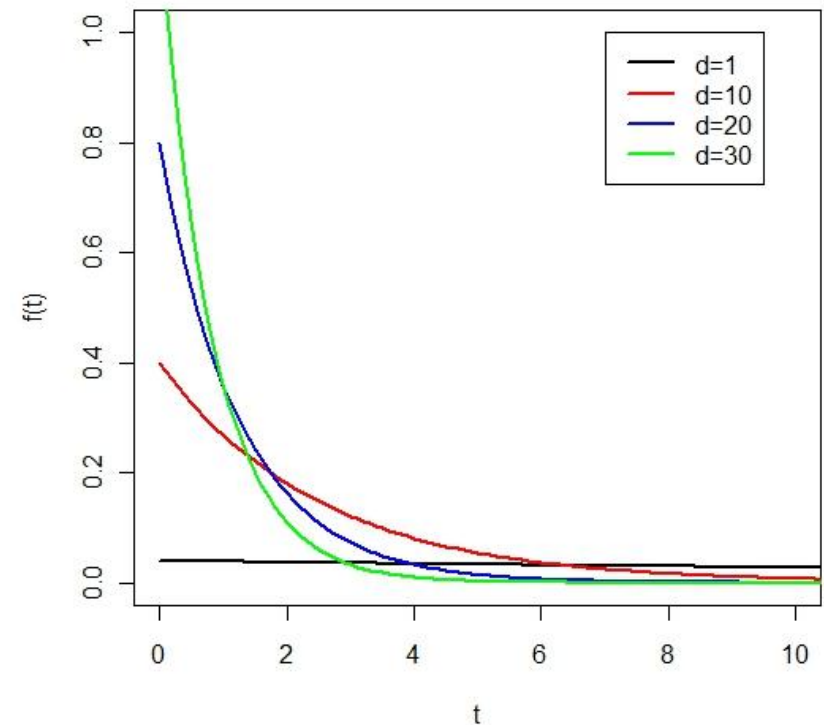
$$F(t) = 1 - e^{d \ln \frac{a-t}{a+t}}$$

$$S(t) = 1 - F(t) = e^{d \ln \frac{a-t}{a+t}}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{2ad}{(a^2 - t^2)}$$

$$d = \frac{\lambda}{k}$$

Hustota transformovaného exponenciálního rozdělení



TRANSFORMOVANÉ WEIBULLOVO ROZDĚLENÍ

$$f(t) = \frac{2ab}{l(a^2 - t^2)} \cdot \left(-\frac{1}{l} \ln \frac{a-t}{a+t}\right)^{b-1} \cdot e^{-\left(-\frac{1}{l} \ln \frac{a-t}{a+t}\right)^b}$$

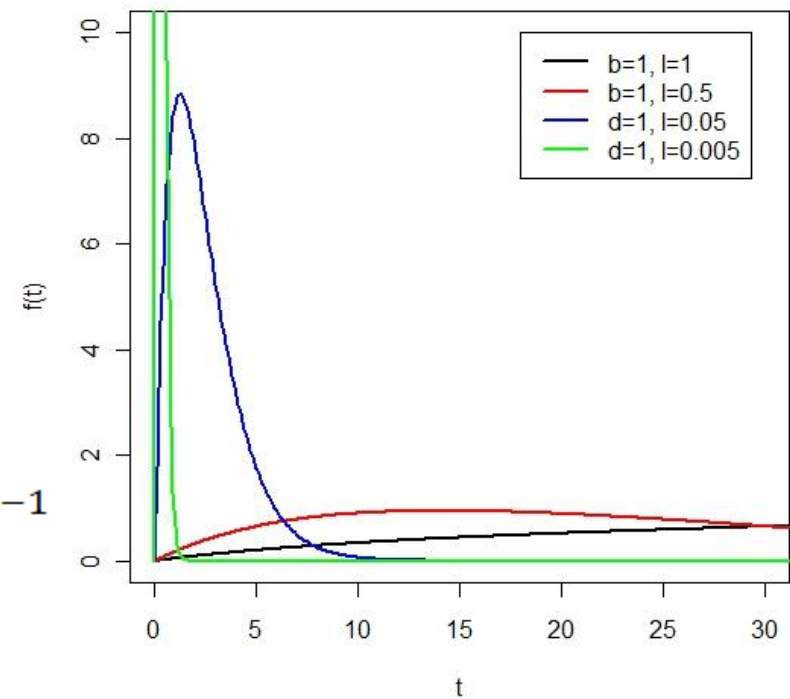
$$F(t) = 1 - e^{-\left(-\frac{1}{l} \ln \frac{a-t}{a+t}\right)^b}$$

$$S(t) = 1 - F(t) = e^{-\left(-\frac{1}{l} \ln \frac{a-t}{a+t}\right)^b}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{2ab}{l(a^2 - t^2)} \cdot \left(-\frac{1}{l} \ln \frac{a-t}{a+t}\right)^{b-1}$$

$$l = k\lambda$$

Hustota transformovaného Weibullova rozdělení



METODA MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI

$$L((\mathbf{t}, \mathbf{c}), \boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^n \{[f(t_i, \boldsymbol{\beta})]^{c_i} [S(t_i, \boldsymbol{\beta})]^{1-c_i}\}$$

$$l((\mathbf{t}, \mathbf{c}), \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \{c_i \ln[f(t_i, \boldsymbol{\beta})] + (1 - c_i) \ln[S(t_i, \boldsymbol{\beta})]\}$$

$$l_{\text{texp}}((\mathbf{t}, \mathbf{c}), \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \left\{ c_i \ln \left[\frac{2ad}{(a^2 - t_i^2)} \right] + d \ln \left[\frac{a - t_i}{a + t_i} \right] \right\}$$

$$l_{\text{twei}}((\mathbf{t}, \mathbf{c}), \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \left\{ c_i \ln \left[\frac{2ad}{l(a^2 - t_i^2)} \cdot \left(-\frac{1}{l} \ln \frac{a - t_i}{a + t_i} \right)^{b-1} \right] - \left(-\frac{1}{l} \ln \frac{a - t_i}{a + t_i} \right)^b \right\}$$

POUŽITÁ DATA

- 333 žen s rakovinou prsu ve čtvrtém stadiu
- Začátek studie v roce 1990
- Ukončení studie 2005
- Nejdelší necenzorované přežití 5506 dní
- 8 cenzorovaných pozorování

ODHADY PARAMETRŮ

- Transformované exponenciální rozdělení:

$$\hat{d} = 3,2764$$

$$\hat{a} = 6839,3238 \text{ dní} \doteq 18,5 \text{ let}$$

- Transformované Weibullovo rozdělení:

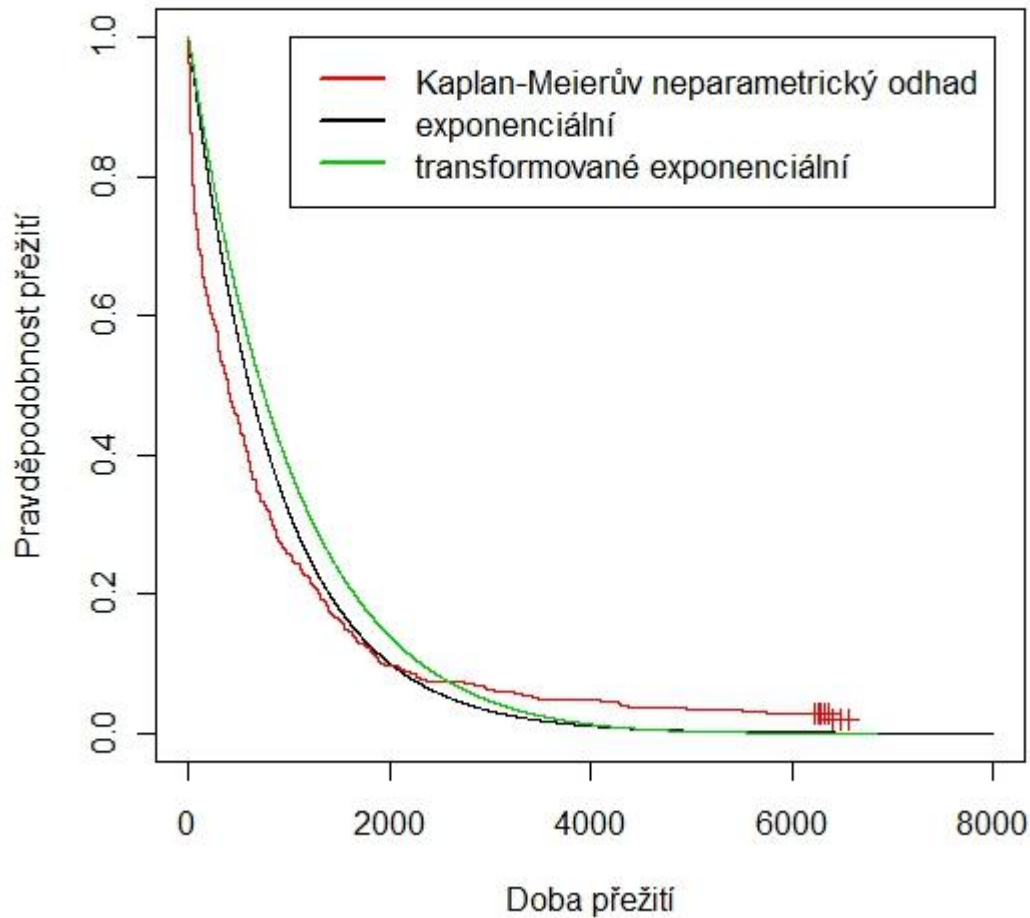
$$\hat{b} = 0,6136$$

$$\hat{l} = 0,1729$$

$$\hat{a} = 7247,6464 \text{ dní} \doteq 20 \text{ let}$$

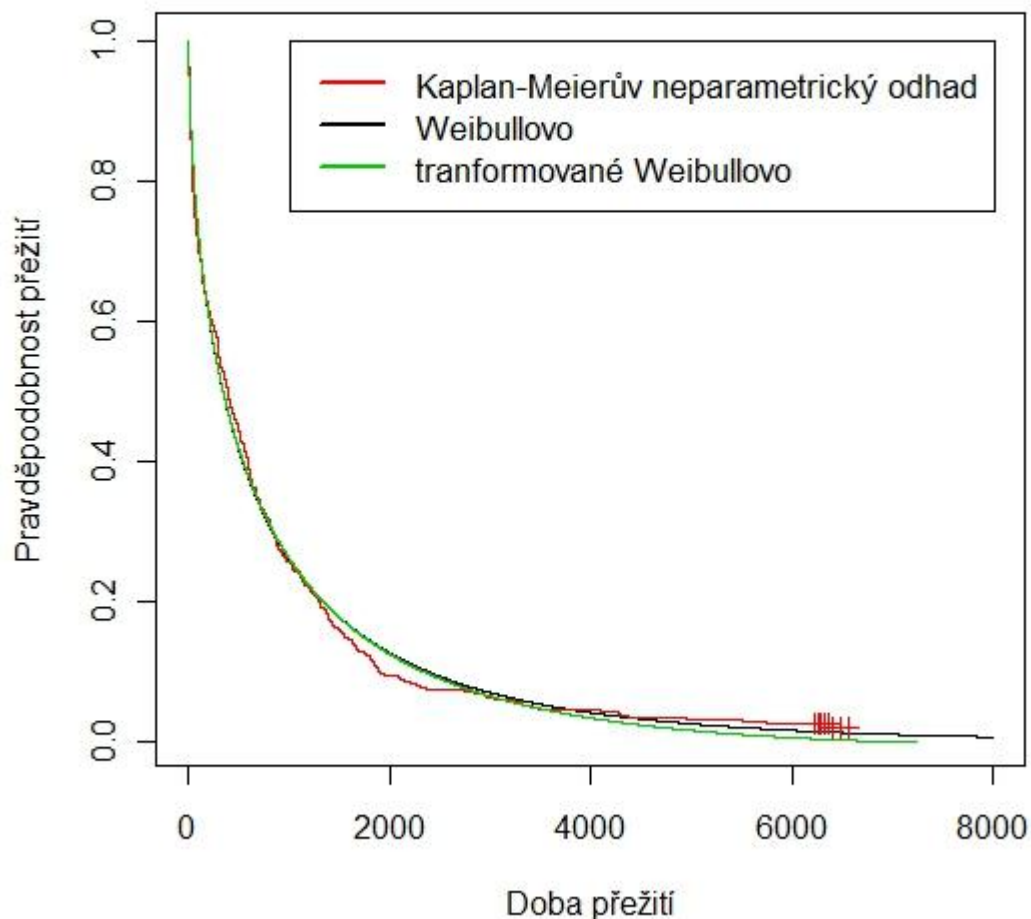
FUNKCE PŘEŽITÍ I

Odhady funkce přežití s využitím exponenciálního a transformovaného exponenciálního rozdělení



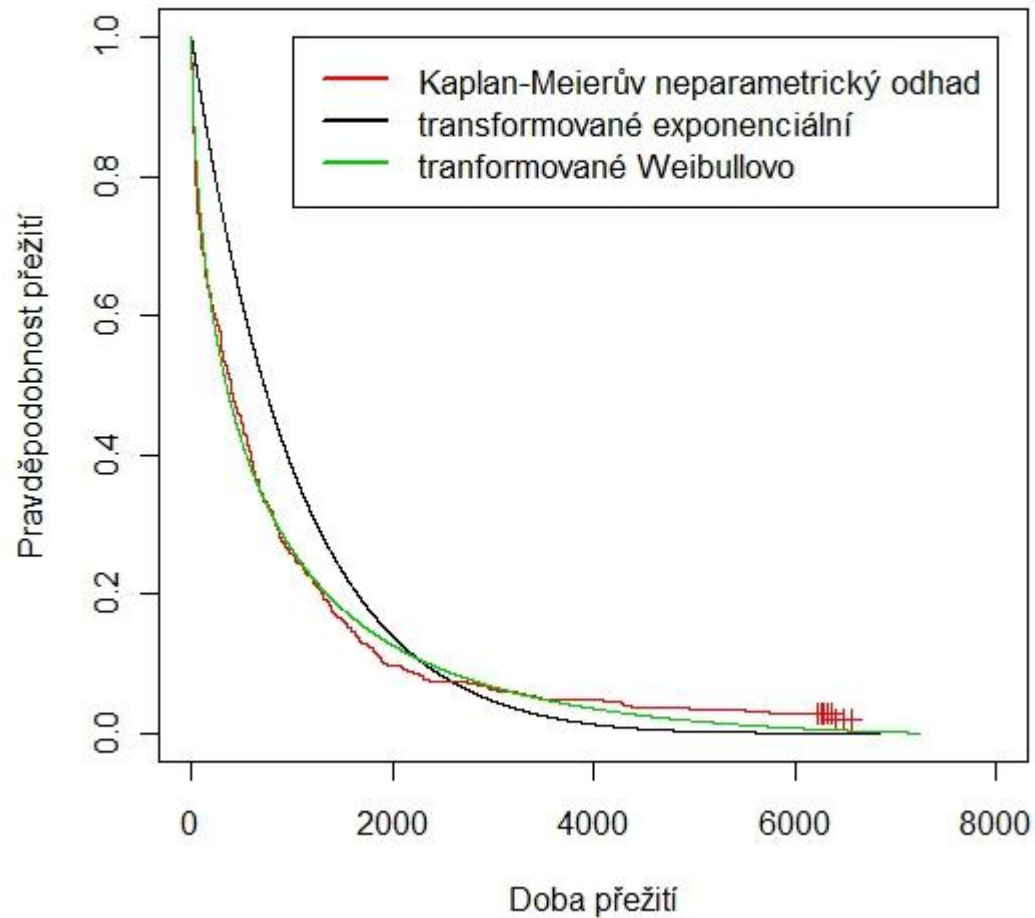
FUNKCE PŘEŽITÍ II

Odhady funkce přežití s využitím Weibullova
a transformovaného Weibullova rozdělení



FUNKCE PŘEŽITÍ III

Srovnání odhadů
s využitím transformovaných rozdělí



LITERATURA

- HOSMER, D.W., LEMESHOW, S.: *Applied Survival Analysis: Regression Modeling of Time to Event Data*. Wiley, 1998.
- GUO, S. *Survival Analysis*. Oxford University Press, 2010.
- LAWLESS, J.F.: *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, Wiley, 2003.
- LEE, E.T., WANG, J.W.: *Statistical Methods for Survival Data Analysis*. Wiley, 2003.