

PÍSEMNÁ ČÁST SZZ Z MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

15. února 2021

1. Pro dané číslo $a > 0$ uvažujme funkci $f: y = a^2 - x^2$ a její graf v rovině s kartézskou soustavou Oxy . V polorovině $y \geq 0$ hledáme obdélník $ABCD$, jehož vrcholy A, B leží na ose x a vrcholy C, D na grafu funkce f , a který má přitom největší možný obsah.
 - a) Vypočtete rozměry hledaného obdélníku.
 - b) Vyjádřete podíl obsahu nalezeného obdélníku k obsahu celého útvaru omezeného osou x a grafem funkce f . Vyjde-li tento podíl nezávislý na hodnotě parametru a , vyjádřete ho v procentech (zaokrouhleně na celý počet).
 - c) Dokažte, že tečny ke grafu funkce f s dotyky v nalezených bodech C, D vymezují spolu s osou x trojúhelník, jehož dvě strany mají středy právě v bodech C, D . (5b)
2. V oboru \mathbb{C} vyřešte každou z rovnic

$$2x^6 - 14x^5 + 43x^4 - 72x^3 + 71x^2 - 38x + 10 = 0,$$

$$x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 29x + 5 = 0,$$
 víte-li, že mají aspoň jeden společný kořen. (5b)
3. V oboru \mathbb{R} řešte nerovnici $|9^x - 4| \leq |3^x - 1| + 3$. (3b)
4. V pytlíku máme bílé a černé kuličky, černých je o 10 více než bílých. Vytáhneme-li z pytlíku náhodně dvě kuličky, budou mít stejnou barvu s pravděpodobností 1 : 2. Určete, kolik je v pytlíku kuliček bílých a kolik černých. (3b)
5. Najděte obecnou rovnici přímky a , která prochází bodem $A[0, 4]$, a obecnou rovnici přímky b , která prochází bodem $B[5, 0]$, je-li přímka $o: 2x - 2y + 1 = 0$ osou dvou ze čtyř úhlů, které přímky a, b svírají. [Návod: Nejprve určete obrazy bodů A a B v osové souměrnosti podle přímky o .] (3b)
6. V oboru $\langle 0, 2\pi \rangle$ řešte rovnici $2 \sin x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$. [Návod: Levou stranu rovnice zapište jako $\sin u + \sin v$ pro vhodná u a v .] (3b)
7. Do daného ostroúhlého trojúhelníku ABC vepište trojúhelník KLM tak, aby platilo $K \in AB, L \in BC, M \in AC$ a zároveň $KL \perp BC, LM \perp AC, KM \perp AB$. Zapište rozbor a popis konstrukce. Nakonec zdůvodněte, proč oba trojúhelníky (daný a jemu vepsaný) jsou navzájem podobné. (3b)

Postupy řešení, rozborů a diskuse objasněte didakticky vhodným slovním komentářem. Popis konstrukce u příkladu 7 formalizujte do přesné posloupnosti kroků (základních konstrukcí), rýsovat řešení sami nemusíte.

Čas vypracování: 3,5 hodiny

Nejsou povoleny programovatelné kalkulačky s grafikou, středoškolské tabulky ani žádná jiná literatura. Zadání písemky neodnášejte, ponechte uvnitř dvojlistu.

PÍSEMNÁ ČÁST SZZ Z DIDAKTIKY MATEMATIKY

15. února 2021

1. V oboru \mathbb{R} řešte nerovnici $|9^x - 4| \leq |3^x - 1| + 3$. (5b)
2. V pytlíku máme bílé a černé kuličky, černých je o 10 více než bílých. Vytáhneme-li z pytlíku náhodně dvě kuličky, budou mít stejnou barvu s pravděpodobností 1 : 2. Určete, kolik je v pytlíku kuliček bílých a kolik černých. (5b)
3. Najděte obecnou rovnici přímky a , která prochází bodem $A[0, 4]$, a obecnou rovnici přímky b , která prochází bodem $B[5, 0]$, je-li přímka $o: 2x - 2y + 1 = 0$ osou dvou ze čtyř úhlů, které přímky a , b svírají. [Návod: Nejprve určete obrazy bodů A a B v osově souměrnosti podle přímky o .] (5b)
4. V oboru $\langle 0, 2\pi \rangle$ řešte rovnici $2 \sin x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$. [Návod: Levou stranu rovnice zapište jako $\sin u + \sin v$ pro vhodná u a v .] (5b)
5. Do daného ostroúhlého trojúhelníku ABC vepište trojúhelník KLM tak, aby platilo $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in AC$ a zároveň $KL \perp BC$, $LM \perp AC$, $KM \perp AB$. Zapište jen rozbor a popis konstrukce. Nakonec zdůvodněte, proč oba trojúhelníky (daný a jemu vepsaný) jsou navzájem podobné. (5b)
6. Vypočtete první člen a kvocient nekonečné geometrické řady se součtem rovným číslu 49, rovná-li se součet jejích prvních dvou členů číslu 48. (5b)

Postupy řešení, rozborů a případné diskuse objasněte didakticky vhodným slovním komentářem (4 body bude hodnocena matematická správnost každého řešení, 1 bodem odpovídající slovní komentář). Popis konstrukce u příkladu 5 formalizujte do přesné posloupnosti kroků (základních konstrukcí), rýsovat řešení sami nemusíte.

Čas vypracování: 3 hodiny

Nejsou povoleny programovatelné kalkulačky s grafikou, středoškolské tabulky ani žádná jiná literatura. Zadání písemky neodnášejte, ponechte uvnitř dvojlistu.

PÍSEMNÁ ČÁST SZZ Z MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

12. července 2021

1. Vyšetřete průběh funkce $f: y = x - 2 \sin x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ (zjistěte intervaly monotonie, lokální a globální extrémy, intervaly konvexnosti a konkávnosti, inflexní body). Pak načrtněte její graf (průsečík s osou x nepočítejte). (5b)
2. V euklidovském prostoru \mathbb{E}_3 jsou dány body $A[1, 2, 3]$, $B[0, 0, 6]$, $D[3, 4, 2]$, $E[4, 3, 8]$. Určete:
 - a) souřadnice zbývajících vrcholů rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$,
 - b) obecnou rovnici roviny ABC ,
 - c) odchylku přímky AE od roviny ABC ,
 - d) objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$,
 - e) výšku rovnoběžnostěnu příslušnou stěně $ABCD$.(Ve výsledcích mohou být hodnoty cyklometrických funkcí.) (5b)
3. V oboru \mathbb{R} řešte nerovnici $1 - \sqrt{13 + 3x^2} \leq 2x$. (3b)
4. Určete počet všech sedmimístných přirozených čísel, které mají ve svém zápisu právě tři nuly a právě tři pětky (a jednu další číslici). Pak určete, s jakou pravděpodobností bude jedno takové (náhodně vybrané) číslo dělitelné číslem 50, mají-li všechna vyhovující sedmimístná čísla stejnou pravděpodobnost výběru. Odpověď zapište zlomkem v základním tvaru. (3b)
5. Součet prvních čtyř členů dané geometrické posloupnosti je roven 180, přitom třetí člen je o 36 větší než první člen. Určete první člen a kvocient dané posloupnosti. (3b)
6. V oboru $\langle 0, 2\pi \rangle$ řešte rovnici $\sin\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$. (3b)
7. Uvnitř jedné poloroviny s danou hraniční přímkou p leží daný bod P a dvě dané kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$. Přitom platí $|S_1S_2| > r_1 + r_2$, $|S_1P| > r_1$ a $|S_2P| > r_2$. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnou AB na přímce p , vrcholem C na kružnici k_1 , vrcholem D na kružnici k_2 a průsečíkem úhlopříček P . Zapište jen rozbor (návod: uvažte vhodnou souměrnost) a popis konstrukce. Pak ještě načrtněte příklad zadání, při kterém má daná polohová úloha právě jedno řešení. (3b)

Postupy řešení objasněte didakticky vhodným slovním komentářem. Popis konstrukce u příkladu 7 formalizujte do přesné posloupnosti kroků (základních konstrukcí), rýsovat řešení sami nemusíte.

Čas vypracování: 3,5 hodiny.

Nejsou povoleny programovatelné kalkulačky s grafikou, středoškolské tabulky, ani žádná jiná literatura. Zadání písemky neodnášejte, ponechte uvnitř dvojlistu.

PÍSEMNÁ ČÁST SZZ Z DIDAKTIKY MATEMATIKY

12. července 2021

1. V oboru \mathbb{R} řešte nerovnici $1 - \sqrt{13 + 3x^2} \leq 2x$. (5b)
2. Určete počet všech sedmimístných přirozených čísel, které mají ve svém zápisu právě tři nuly a právě tři pětky (a jednu další číslici). Pak určete, s jakou pravděpodobností bude jedno takové (náhodně vybrané) číslo dělitelné číslem 50, mají-li všechna vyhovující sedmimístná čísla stejnou pravděpodobnost výběru. Odpověď zapište zlomkem v základním tvaru. (5b)
3. Součet prvních čtyř členů dané geometrické posloupnosti je roven 180, přitom třetí člen je o 36 větší než první člen. Určete první člen a kvocient dané posloupnosti. (5b)
4. V oboru $\langle 0, 2\pi \rangle$ řešte rovnici $\sin\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$. (5b)
5. Uvnitř jedné poloroviny s danou hraniční přímkou p leží daný bod P a dvě dané kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$. Přitom platí $|S_1S_2| > r_1 + r_2$, $|S_1P| > r_1$ a $|S_2P| > r_2$. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnou AB na přímce p , vrcholem C na kružnici k_1 , vrcholem D na kružnici k_2 a průsečíkem úhlopříček P . Zapište jen rozbor (návod: uvažte vhodnou souměrnost) a popis konstrukce. Pak ještě načrtněte příklad zadání, při kterém má daná polohová úloha právě jedno řešení. (5b)
6. V rovině s kartézskou soustavou souřadnic je dán trojúhelník ABC . Vypočítejte souřadnice vrcholů B a C , jestliže znáte vrchol $A[2, 3]$, patu $B_0[3, 5]$ výšky BB_0 a střed $O[6, 6]$ kružnice tomuto trojúhelníku opsané. (5b)

Postupy řešení, rozbor a případné diskuse objasněte didakticky vhodným slovním komentářem (4 body bude hodnocena matematická správnost každého řešení, 1 bodem odpovídající slovní komentář). Popis konstrukce u příkladu 5 formalizujte do přesné posloupnosti kroků (základních konstrukcí), rýsovat řešení sami nemusíte.

Čas vypracování: 3 hodiny

Nejsou povoleny programovatelné kalkulačky s grafikou, středoškolské tabulky, ani žádná jiná literatura. Zadání písemky neodnášejte, ponechte uvnitř dvojlistu.