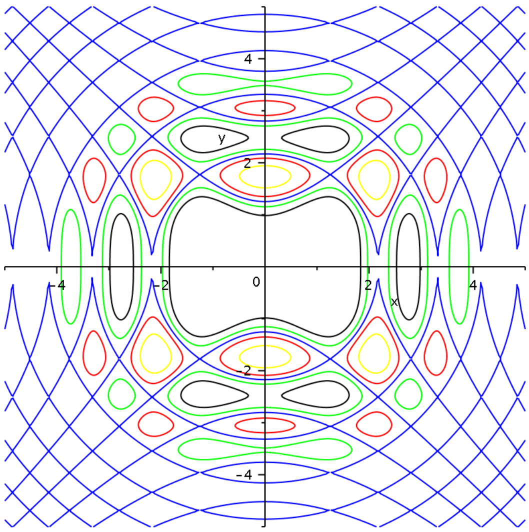
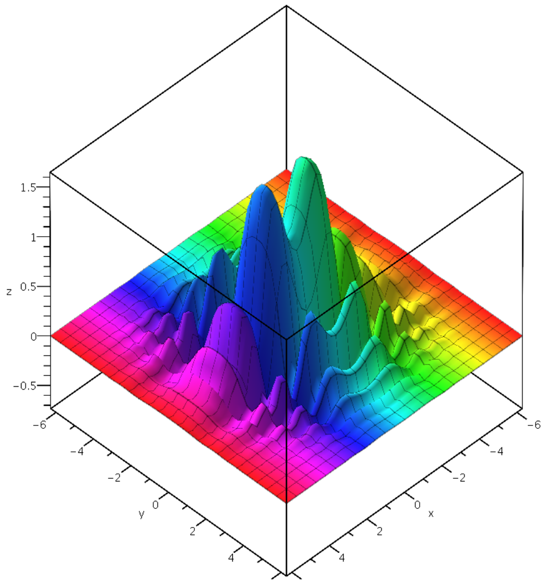
 

Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy II

AKTUALIZOVÁNO: 21. října 2020

Petr Hasil
hasil@math.muni.cz
http://www.math.muni.cz/~hasil
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita, Brno

Petr Zemánek
zemanekp@math.muni.cz
http://www.math.muni.cz/~zemanekp
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita, Brno

Tato publikace vznikla v rámci projektu Fondu rozvoje MU (MUNI/FR/0901/2015) realizovaného v období 01/2016–12/2016.

Úvod

Milé čtenářky, milý čtenáři,

dostává se Vám do rukou (nebo snad spíše na monitor) druhý díl trilogie sbírek s řešenými příklady ze základních partií matematické analýzy. Zatímco v prvním díle publikovaném na Elportálu MU jsme se věnovali diferenciálnímu a integrálnímu počtu funkcí jedné proměnné (viz http://elportal.cz/publikace/matematicka-analyza), tentokrát jsme se zaměřili na obyčejné diferenciální rovnice (153 příkladů), metrické prostory (18 příkladů) a diferenciální počet funkcí více proměnných (185 příkladů). Ačkoli je sbírka primárně koncipována jako doplněk pro studenty předmětu M2100: Matematická analýza II vyučovaného na PřF MU, věříme, že může stejně dobře posloužit i studentům z jiných fakult, vysokých škol nebo univerzit. Pro úplnost ještě dodejme, že většina uvedených příkladů pochází především ze cvičení, která byla vedena autory v minulých letech, přičemž některé z těchto příkladů jsou přejaty z [1–5,7–10].

Doufáme, že Vám tato sbírka bude užitečným pomocníkem při studiu matematické analýzy. Současně si však jsme vědomi, že publikace tohoto typu mohou být stále a stále vylepšovány a doplňovány. Proto jakékoli náměty, komentáře, připomínky a nalezené chyby/překlepy/nejasnosti jsou vítány na emailové adrese kteréhokoli z autorů.

Rádi bychom na tomto místě také poděkovali za podporu z Fondu rozvoje MU, s jejíž pomocí tento dokument vznikl.

prosinec 2016 Autoři

$$\ln\left[\lim_{t\to\infty}\left(\left\|\left(A^T\right)^{-1}-\left(A^{-1}\right)^T\right\|!+\frac{1}{t}\right)^t\right]+\alpha^2\prod_{j=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{\alpha}{j\pi}\right)^2\right]^2+\frac{\binom{0}{0}+\cos(2\alpha)}{\Gamma(3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cosh\beta\sqrt{1-\tanh^2\beta}}{2^n}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]+\sin^2\alpha+\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cosh\beta\sqrt{1-\tanh^2\beta}}{2^n}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln e+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{1+1=2}}$$

Obsah

Kapitola I.
Obyčejné diferenciální rovnice

Definice 1.1.

Buď F funkce, jejíž definiční obor G je podmnožinou trojrozměrného euklidovského prostoru $\mathbb{R}^3$. Rovnice

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu*. Nebude-li s rovnicí současně uveden obor G, budeme jím rozumět množinu všech bodů, pro něž je funkce F definována. *Řešením* (někdy též *integrálem*) této rovnice se rozumí funkce $y(x)$, která je definována v nějakém intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ a splňuje pro všechna $x \in J$ tyto podmínky

$$[x, y(x), y'(x)] \in G, \quad F\left(x, y(x), y'(x)\right) = 0.$$

Není-li interval J otevřený, pak v každém krajním bodě $\xi \in J$ značí $y'(x)$ jednostrannou derivaci. Graf řešení se nazývá *integrální křivka*. *Obecným řešením* diferenciální rovnice (1.1) se rozumí každé její řešení $y(x, C)$, z něhož lze vhodnou volbou konstanty C obdržet libovolné řešení této rovnice. *Partikulární řešení* je řešení $y(x)$ diferenciální rovnice (1.1), v němž integrační konstanty mají konkrétní číselnou hodnotu.

Definice 1.2.

Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu (1.1) se nazývá *rozřešená vzhledem k derivaci*, pokud ji lze upravit do tvaru

$$y' = f(x, y). \tag{1.2}$$

V opačném případě nazýváme rovnici (1.1) *nerozřešenou vzhledem k derivaci*.

Věta 1.3.

Nechť funkce $f : (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ je spojitá, přičemž $-\infty \leq a < b \leq \infty$ a současně $-\infty \leq c < d \leq \infty$. Nechť $[x_0, y_0] \in (a, b) \times (c, d)$, pak pro počáteční problém

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.3}$$

existuje řešení $y(x)$ s maximálním definičním oborem $(\alpha, \omega) \subset (a, b)$, kde $\alpha < t_0 < \omega$.

Jestliže $a < \alpha$*, pak*

$$\lim_{t\to\alpha^+} y(t) = c \quad \textit{nebo} \quad \lim_{t\to\alpha^+} y(t) = d,$$

a pokud $\omega < b$*, potom*

$$\lim_{t\to\omega^-} y(t) = c \quad \textit{nebo} \quad \lim_{t\to\omega^-} y(t) = d.$$

Jsou-li navíc parciální derivace funkce f *vzhledem k* y*, tj.* $\frac{\partial f}{\partial y}$*, spojité na* $(a,b) \times (c,d)$*, pak má počáteční problém* (1.3) *jediné řešení.*

I. 1. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Definice 1.1.1.

Diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

kde $f(x)$ a $g(y)$ jsou spojité funkce na (nějakých) otevřených intervalech, nazýváme *diferenciální rovnice se separovanými proměnnými*.

Věta 1.1.2.

Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce (přičemž může nastat $a = -\infty$, $c = -\infty$, $b = +\infty$, $d = +\infty$) takové, že $g(y) \neq 0$ na (c,d). Pak počáteční problém

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

kde $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$, má právě jedno řešení, které je určeno implicitně vzorcem

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Věta 1.1.3.

Nechť G je konvexní oblast v $\mathbb{R}^2$, $f : G \to \mathbb{R}$ funkce, která má spojité parciální derivace do druhého řádu včetně a $f(x,y) \neq 0$. Diferenciální rovnici

$$y' = f(x,y)$$

je možné převést na rovnici se separovanými proměnnými právě tehdy, když

$$D(x,y) := \det \begin{pmatrix} f(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = 0 \quad \textit{pro každé } [x,y] \in G.$$

Poznámka 1.1.4. Diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = f(ax + by + c)$$

lze snadno pomocí substituce $z = ax + by + c$ převést na rovnici se separovanými proměnnými.

Příklad 1.1.1.

Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{y^2+1}{x+1}.$$

Určete také řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$.

Řešení. Ze zadání je zřejmé, že se jedná o rovnici se separovanými proměnnými. Proto ze vztahu $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{\mathrm{d}x}{x+1},$$

z čehož integrováním získáme

$$\operatorname{arctg} y = \ln|x+1| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{1.1.1}$$

Proto zadaná diferenciální rovnice má obecné řešení

$$y(x) = \operatorname{tg}(\ln|x+1| + C), \quad C \in \mathbb{R}. \tag{1.1.2}$$

Nyní z využití počáteční podmínky dosazené do vztahu (1.1.1) dostaneme

$$y(0) = 1: \quad \operatorname{arctg} 1 = \ln|1| + C \Longleftrightarrow C = \frac{\pi}{4}.$$

Proto řešením počátečního problému je funkce $y(x) = \operatorname{tg}\left(\ln|x+1| + \frac{\pi}{4}\right)$. Dodejme ještě, že konstantu C bylo také možné vypočítat ze vztahu (1.1.2) ovšem s uvědoměním si, že platí $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + k\pi) = x$. ▲

Příklad 1.1.2.

Rozhodněte, zda je možné zapsat funkci dvou proměnných

$$F(x,y) = x^3 \,\mathrm{e}^{x+2y}$$

jako součin funkcí jedné proměnné $f(x)$ a $g(y)$. Je-li to možné, určete tyto funkce. Není-li to možné, zdůvodněte.

Řešení. Nejprve vypočítáme parciální derivace

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x^2 \,\mathrm{e}^{x+2y}(3+x), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^3 \,\mathrm{e}^{x+2y}\, 2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = x^2(3+x)\,\mathrm{e}^{x+2y}\, 2.$$

Nyní určíme determinant

$$\begin{pmatrix} f(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 \,\mathrm{e}^{x+2y} & 2x^3 \,\mathrm{e}^{x+2y} \\ x^2 \,\mathrm{e}^{x+2y}(3+x) & 2x^2(3+x)\,\mathrm{e}^{x+2y} \end{pmatrix} = 0.$$

Tedy dle Věty 1.1.3 to možné je. Tyto funkce jsou zřejmě

$$f(x) = x^3 \,\mathrm{e}^x, \qquad g(x) = \mathrm{e}^{2y}.$$

▲

Příklad 1.1.3.

Rozhodněte, zda je možné zapsat funkci dvou proměnných

$$F(x,y) = \sin(2x - y)$$

jako součin funkcí jedné proměnné $f(x)$ a $g(y)$. Je-li to možné, určete tyto funkce. Není-li to možné, zdůvodněte.

Řešení. Nejprve vypočítáme parciální derivace

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2\cos(2x-y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\cos(2x-y),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = 2\sin(2x-y).$$

Nyní určíme determinant

$$\begin{pmatrix} f(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2x-y) & -\cos(2x-y) \\ 2\cos(2x-y) & 2\sin(2x-y) \end{pmatrix} =$$
$$= 2\sin^2(2x-y) + 2\cos^2(2x-y) = 2.$$

Determinant z Věty 1.1.3 je nenulový, tedy možné to není. ▲

Příklad 1.1.4.

Rozhodněte, zda je možné zapsat funkci dvou proměnných

$$F(x,y) = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

jako součin funkcí jedné proměnné $f(x)$ a $g(y)$. Je-li to možné, určete tyto funkce. Není-li to možné, zdůvodněte.

Řešení. Vypočítáme parciální derivace

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \cos(x+y) + \cos(x-y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \cos(x+y) - \cos(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = -\sin(x+y) + \sin(x-y)$$

a určíme determinant

$$\begin{pmatrix} f(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x+y) + \sin(x-y) & \cos(x+y) - \cos(x-y) \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) & -\sin(x+y) + \sin(x-y) \end{pmatrix} =$$
$$= -\sin^2(x+y) + \sin^2(x-y) - \cos^2(x+y) + \cos^2(x-y) = -1 + 1 = 0.$$

Tedy dle Věty 1.1.3 to možné je. Užitím vzorce

$$2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

snadno zjistíme, že hledané funkce jsou

$$f(x) = 2\sin x, \qquad g(y) = \cos y.$$

▲

Příklad 1.1.5.

Řešte následující rovnici

$$y' - \sin x = 5.$$

Řešení. Rovnici lze vyřešit přímou integrací

$$y = \int (5 + \sin x)\,\mathrm{d}x = 5x - \cos x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.1.6.

Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{y \ln y}{x}.$$

Řešení. Rovnici si přepíšeme jako

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y \ln y}{x}$$

a provedeme separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}y}{y \ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

kde předpokládáme, že $y \neq 1$ (nenulovost plyne z definičního oboru zadání). Dosazením do rovnice ovšem vidíme, že funkce $y(x) = 1$ je jejím řešením, proto ho musíme na závěr zohlednit.

Integrováním a úpravami pak získáme

$$\begin{aligned} \ln|\ln y| &= \ln|x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\ |\ln y| &= |x|\, C_2, \quad C_2 > 0, \\ \ln y &= xC_3, \quad C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ y &= \mathrm{e}^{xC_3}. \end{aligned}$$

Přitom řešení $y(x) = 1$ lze získat volbou $C_3 = 0$. Proto zadaná diferenciální rovnice má obecné řešení

$$y(x) = \mathrm{e}^{Cx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.1.7.

Řešte následující rovnici

$$y' \operatorname{cotg} x = 2 - y.$$

Řešení. Rovnici si přepíšeme jako

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (2 - y) \operatorname{tg} x$$

a provedeme separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}y}{2 - y} = \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x,$$

kde předpokládáme, že $y \neq 2$. Dosazením do rovnice ovšem vidíme, že funkce $y(x) = 2$ je jejím řešením, proto ho musíme na závěr zohlednit.

Integrováním a úpravami pak získáme

$$\begin{aligned} -\ln|2 - y| &= -\ln|\cos x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\ |2 - y| &= |\cos x| \, C_2, \quad C_2 > 0, \\ 2 - y &= C_3 \cos x, \quad C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ y &= 2 - C_3 \cos x. \end{aligned}$$

Přitom řešení $y(x) = 2$ lze získat volbou $C_3 = 0$. Proto zadaná diferenciální rovnice má obecné řešení

$$y(x) = 2 - C \cos x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.1.8.

Řešte následující rovnici

$$x^3yy' + xyy' - y^2 - 1 = 0.$$

Řešení. Rovnici si přepíšeme jako

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}xy(x^2+1) = y^2+1$$

a provedeme separaci proměnných

$$\frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Pravou stranu rozložíme na parciální zlomky a integrováním a úpravami pak získáme

$$\ln\sqrt{y^2+1} = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$
$$\sqrt{y^2+1} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}C_2, \quad C_2 > 0.$$

Zadaná diferenciální rovnice má tedy obecné řešení

$$\sqrt{y^2+1} = \frac{|Cx|}{\sqrt{x^2+1}}, \quad C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

▲

Příklad 1.1.9.

Řešte následující rovnici

$$7-\sqrt{y}=xy'.$$

Řešení. Rovnici si přepíšeme jako

$$x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=7-\sqrt{y}$$

a provedeme separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}y}{7-\sqrt{y}}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

kde předpokládáme, že $y\neq 49$. Dosazením do rovnice ovšem vidíme, že funkce $y(x)=49$ je jejím řešením, proto ho musíme na závěr zohlednit.

Integrováním (na levé straně lze užít substituci $t=\sqrt{y}$) získáme

$$-2\sqrt{y}-14\ln|\sqrt{y}-7|=\ln|x|+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Přitom řešení $y(x)=49$ nelze získat volbou konstanty C. Proto má zadaná diferenciální rovnice řešení

$$y=49,\quad -2\sqrt{y}-14\ln|\sqrt{y}-7|=\ln|x|+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.1.10.

Řešte následující rovnici

$$2y - x^3 y' = 0.$$

Řešení. Rovnici si přepíšeme jako

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y}{x^3}$$

a provedeme separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x,$$

kde předpokládáme, že $y \neq 0$. Dosazením do rovnice ovšem vidíme, že funkce $y(x) = 0$ je jejím řešením, proto ho musíme na závěr zohlednit.

Integrováním a úpravami pak získáme

$$\begin{aligned} \ln|y| &= -\frac{1}{x^2} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\ |y| &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\,C_2, \quad C_2 > 0, \\ y &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\,C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \end{aligned}$$

Přitom řešení $y(x) = 0$ lze získat volbou $C_3 = 0$. Proto zadaná diferenciální rovnice má obecné řešení

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.1.11.

Řešte následující rovnici

$$(x+1)\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}x = 0.$$

Řešení. Provedeme separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{-x}{x+1}\,\mathrm{d}x,$$

kde předpokládáme, že $y \neq 0$. Dosazením do rovnice ovšem vidíme, že funkce $y(x) = 0$ je jejím řešením, proto ho musíme na závěr zohlednit.

Integrováním a úpravami pak získáme

$$\begin{aligned}
\ln|y| &= -x + \ln|x+1| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},\\
|y| &= \mathrm{e}^{-x+\ln|x+1|}\,C_2, \quad C_2 > 0,\\
|y| &= \mathrm{e}^{-x}\,|x+1|\,C_2\\
y &= \mathrm{e}^{-x}(x+1)C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.
\end{aligned}$$

Přitom řešení $y(x) = 0$ lze získat volbou $C_3 = 0$. Proto zadaná diferenciální rovnice má obecné řešení

$$y(x) = C(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.1.12.

Řešte následující rovnici

$$y' \cos x = y \ln y.$$

Řešení. Rovnici si přepíšeme jako

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cos x = y \ln y$$

a provedeme separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}y}{y \ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{\cos x},$$

kde předpokládáme, že $y \neq 0$ a $y \neq 1$. Dosazením do rovnice vidíme, že funkce $y_0(x) = 0$ ji nesplňuje, ale $y_1(x) = 1$ je jejím řešením, proto ji musíme na závěr zohlednit.

Integrováním (na levou stranu použijeme substituci $t = \ln y$, na pravou stranu substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$) a úpravami pak získáme

$$\begin{aligned}
\ln |\ln y| &= \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\
|\ln y| &= \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| C_2, \quad C_2 > 0, \\
\ln y &= \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\
y &= \mathrm{e}^{\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} C_3}.
\end{aligned}$$

Přitom řešení $y(x) = 1$ lze získat volbou $C_3 = 0$. Proto zadaná diferenciální rovnice má obecné řešení

$$y(x) = \mathrm{e}^{C \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.1.13.

Řešte následující rovnici

$$\frac{x-1}{2y} = \mathrm{e}^{-x}\, y'.$$

Řešení. Rovnici si přepíšeme jako

$$\mathrm{e}^{-x}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-1}{2y}$$

a provedeme separaci proměnných

$$2y\,\mathrm{d}y = (x-1)\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integrováním pak získáme obecné řešení

$$y^2 = (x-2)\,\mathrm{e}^{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.1.14.

Řešte následující rovnici

$$y' = 16x^2 + 8xy + y^2.$$

Řešení. Rovnici si přepíšeme jako

$$y' = (4x + y)^2$$

a použijeme substituci $u(x) = 4x + y(x)$, tedy $u' = 4 + y'$, proto $y' = u' - 4$. Tím získáme rovnici

$$u' = u^2 + 4.$$

Nyní provedeme separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 4} = \mathrm{d}x.$$

Integrováním a vrácením substituce pak získáme obecné řešení zadané rovnice

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} &= x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{arctg} \frac{4x + y}{2} &= 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{arctg} \left(2x + \tfrac{y}{2}\right) &= 2x + C. \end{aligned}$$

▲

Příklad 1.1.15.

Řešte následující rovnici

$$y - y^2 + xy' = 0.$$

Řešení. Rovnici si přepíšeme jako

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\, x = y^2 - y$$

a provedeme separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(y-1)} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

kde předpokládáme, že $y \neq 0$ a $y \neq 1$. Dosazením do rovnice vidíme, že funkce $y_0(x) = 0$ a $y_1(x) = 1$ jsou jejím řešením, proto je musíme na závěr zohlednit.

Integrováním (levou stranu např. rozložíme na parciální zlomky) a úpravami pak získáme

$$\begin{aligned}
\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= \ln|x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\
\left|\frac{y-1}{y}\right| &= |x|\, C_2, \quad C_2 > 0, \\
\frac{y-1}{y} &= xC_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\
y &= (1 - xC_3)^{-1}.
\end{aligned}$$

Přitom řešení $y_1(x) = 1$ lze získat volbou $C_3 = 0$, ale $y_0(x) = 0$ volbou C_3 získat nelze. Proto má zadaná diferenciální rovnice řešení

$$y(x) = 0, \quad y(x) = (1 - Cx)^{-1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.1.16.

Řešte následující rovnici

$$y' \cos^2 x = (1 + \cos^2 x)\sqrt{1 - y^2}.$$

Řešení. Rovnici si přepíšeme jako

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cos^2 x = (1 + \cos^2 x)\sqrt{1 - y^2}$$

a provedeme separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x,$$

kde předpokládáme, že $y \neq \pm 1$. Dosazením do rovnice vidíme, že funkce $y_0(x) = -1$ a $y_1(x) = 1$ jsou jejím řešením, proto je musíme na závěr zohlednit.

Integrováním (pravou stranu rozepíšeme na dva zlomky) a úpravami pak získáme

$$\begin{aligned} \arcsin y &= \operatorname{tg} x + x + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y &= \sin(\operatorname{tg} x + x + C). \end{aligned}$$

Přitom řešení $y_0(x) = -1$ ani $y_1(x) = 1$ nelze získat volbou konstanty C Proto má zadaná diferenciální rovnice řešení

$$y(x) = \pm 1, \quad y(x) = \sin(\operatorname{tg} x + x + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.1.17.

Řešte následující rovnici

$$\mathrm{e}^{-s}\left(1+\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)=1.$$

Řešení. Rovnici si přepíšeme jako

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{s}-1$$

a provedeme separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{e}^{s}-1}=\mathrm{d}t,$$

kde předpokládáme, že $s\neq 0$. Dosazením do rovnice vidíme, že funkce $s_0(t)=0$ je jejím řešením, proto ho musíme na závěr zohlednit.

Integrováním (levou stranu např. substitucí $u=\mathrm{e}^{s}-1$, tj. $\mathrm{d}u=(u+1)\mathrm{d}s$ a rozkladem na parciální zlomky) a úpravami pak získáme

$$\begin{aligned}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^{s}-1}{\mathrm{e}^{s}}\right|&=t+C_1,\quad C_1\in\mathbb{R},\\ \left|\frac{\mathrm{e}^{s}-1}{\mathrm{e}^{s}}\right|&=\mathrm{e}^{t}C_2,\quad C_2>0,\\ \frac{\mathrm{e}^{s}-1}{\mathrm{e}^{s}}&=\mathrm{e}^{t}C_3,\quad C_3\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ s&=-\ln(1-\mathrm{e}^{t}C_3).\end{aligned}$$

Přitom řešení $s_0(t)=0$ získáme volbou konstanty $C_3=0$. Proto má zadaná diferenciální rovnice řešení

$$s(t)=-\ln(1-C\,\mathrm{e}^{t}),\quad C\in\mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.1.18.

Řešte následující rovnici

$$y' \operatorname{tg} x - y^2 = 1 - 2y.$$

Řešení. Rovnici si přepíšeme jako

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \operatorname{tg} x = 1 - 2y + y^2$$

a provedeme separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}y}{(1-y)^2} = \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg} x},$$

kde předpokládáme, že $y \neq 1$. Dosazením do rovnice vidíme, že funkce $y_0(x) = 1$ je jejím řešením, proto ho musíme na závěr zohlednit.

Integrováním (levou stranu např. substitucí $t = 1 - y$ a pravou substitucí $u = \sin x$) a úpravami pak získáme

$$\frac{1}{1-y} = \ln|\sin x| + C, \quad C \in \mathbb{R},$$
$$y = 1 - \frac{1}{\ln|\sin x| + C}.$$

Přitom řešení $y_0(x) = 1$ nelze získat volbou konstanty C. Proto má zadaná diferenciální rovnice řešení

$$y(x) = 1, \quad y(x) = 1 - \frac{1}{\ln|\sin x| + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.1.19.

Řešte následující rovnici

$$y' = 6x + 2y + 3.$$

Řešení. Označíme $z = y'$. Potom rovnici $z = 6x + 2y + 3$ derivujeme podle x a upravujeme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= 6 + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= 6 + 2z, \\
\frac{\mathrm{d}z}{3+z} &= 2\mathrm{d}x, \quad z \neq 3, \\
\int \frac{\mathrm{d}z}{3+z} &= \int 2\mathrm{d}x, \\
\ln|3+z| &= 2x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\
3 + z &= \mathrm{e}^{2x} C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\
6x + 2y + 6 &= \mathrm{e}^{2x} C_2, \\
y &= \mathrm{e}^{2x} C_2 - 3(x+1),
\end{aligned}$$

přičemž $z = 3$ znamená $y = -3(x+1)$, což je řešením zadané rovnice a lze ho získat volbou $C_2 = 0$. Proto má zadaná diferenciální rovnice řešení

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{2x} - 3(x+1), \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.1.20.

Řešte následující počáteční problém

$$x + y' = 2, \quad y(2) = 5.$$

Řešení. Nejprve najdeme řešení rovnice separací proměnných, tj.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2 - x,\\
\mathrm{d}y &= (2 - x)\mathrm{d}x,\\
\int \mathrm{d}y &= \int (2 - x)\mathrm{d}x,\\
y &= 2x - \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dosazením počáteční podmínky do řešení určíme hodnotu konstanty C

$$y(2) = 4 - 2 + C = 2 + C = 5 \quad \Rightarrow \quad C = 3.$$

Řešení počátečního problému je tedy

$$y(x) = 2x - \frac{x^2}{2} + 3.$$

▲

Příklad 1.1.21.

Řešte následující počáteční problém

$$(1+\mathrm{e}^x)\frac{y'}{y}+\mathrm{e}^x=0, \quad y(0)=1.$$

Řešení. Nejprve najdeme řešení rovnice separací proměnných, tj.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y\mathrm{d}x} &= \frac{-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x},\\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x,\\
\int\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int\frac{-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x,\\
\ln|y| &= -\ln|1+\mathrm{e}^x|+C_1, \quad C_1\in\mathbb{R},\\
|y| &= |1+\mathrm{e}^x|^{-1}\,\mathrm{e}^{C_1},\\
y &= \frac{C}{1+\mathrm{e}^x}, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\},
\end{aligned}$$

kde jsme integrál vpravo určili např. substitucí $t=\mathrm{e}^x$.

Dosazením počáteční podmínky do řešení určíme hodnotu konstanty C

$$y(0)=\frac{C}{2}=1 \quad\Rightarrow\quad C=2.$$

Řešení počátečního problému je tedy

$$y(x)=\frac{2}{1+\mathrm{e}^x}.$$

▲

Příklad 1.1.22.

Řešte následující počáteční problém

$$y' \sin x \sin y = \cos x \cos y, \quad y(\tfrac{\pi}{4}) = 0.$$

Řešení. Nejprve najdeme řešení rovnice separací proměnných, tj.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\cos y\ \mathrm{d}x} &= \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \cos y \neq 0,\\
\frac{\mathrm{d}y}{\cos y} &= \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{\cos y} &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x,\\
-\ln|\cos y| &= \ln|\sin x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},\\
|\cos y|^{-1} &= |\sin x|\,\mathrm{e}^{C_1},\\
\cos y &= \frac{C_2}{\sin x}, \quad C_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\},
\end{aligned}$$

kde jsme předpokládali $\cos y \neq 0$, tedy $y \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tyto konstantní funkce splňují zadanou rovnici a lze je získat volbou $C_2 = 0$. Obecné řešení rovnice je tedy

$$\cos y = \frac{C}{\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počáteční podmínky do řešení určíme hodnotu konstanty C

$$y(\tfrac{\pi}{4}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 0 = \frac{C}{\sin\frac{\pi}{4}} \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{2}.$$

Řešení počátečního problému je tedy

$$\cos y(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sin x}.$$

▲

Příklad 1.1.23.

Řešte následující počáteční problém

$$2(1+e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 0.$$

Řešení. Nejprve najdeme řešení rovnice separací proměnných, tj.

$$\begin{aligned}
2y\frac{dy}{dx} &= \frac{e^x}{1+e^x}, \\
2y dy &= \frac{e^x}{1+e^x} dx, \\
\int 2y dy &= \int \frac{e^x}{1+e^x} dx, \\
y^2 &= \ln|1+e^x| + C, \quad C \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

kde jsme integrál vpravo určili např. substitucí $t = 1 + e^x$.

Dosazením počáteční podmínky do řešení určíme hodnotu konstanty C

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \ln 2 + C \quad \Rightarrow \quad C = -\ln 2.$$

Řešení počátečního problému je tedy

$$y^2 = \ln(1+e^x) - \ln 2, \quad \text{tj.} \quad y = \pm\sqrt{\ln(1+e^x) - \ln 2}.$$

▲

Příklad 1.1.24.

Řešte následující počáteční problém

$$\sin y \cos x \,\mathrm{d}y = \cos y \sin x \,\mathrm{d}x, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Řešení. Nejprve najdeme řešení rovnice separací proměnných, tj.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} y \,\mathrm{d}y &= \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x, \quad \cos y \neq 0,\\
\int \operatorname{tg} y \mathrm{d}y &= \int \operatorname{tg} x \mathrm{d}x,\\
-\ln|\cos y| &= -\ln|\cos x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},\\
|\cos y| &= |\cos x|\, \mathrm{e}^{C_1},\\
\cos y &= \cos x C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\},
\end{aligned}$$

kde jsme předpokládali $\cos y \neq 0$, tedy $y \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tyto konstantní funkce splňují zadanou rovnici a lze je získat volbou $C_2 = 0$. Obecné řešení rovnice je tedy

$$\cos y = C \cos x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počáteční podmínky do řešení určíme hodnotu konstanty C

$$y(0) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = C.$$

Řešení počátečního problému je tedy

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \cos y = \cos x.$$

▲

Příklad 1.1.25.

Řešte následující počáteční problém

$$(x^2+1)(y^2-1)+xyy'=0, \quad y(1)=\sqrt{2}.$$

Řešení. Nejprve najdeme řešení rovnice separací proměnných, tj.

$$\begin{aligned}
\frac{y}{y^2}\mathrm{d}y &= -\frac{x^2+1}{x}\mathrm{d}x, \quad y \neq \pm 1,\\
\int \frac{y}{y^2}\mathrm{d}y &= -\int \frac{x^2+1}{x}\mathrm{d}x,\\
\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right| &= -\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},\\
\ln\left|y^2-1\right| &= -x^2 - \ln x^2 + 2C_1,\\
\left|y^2-1\right| &= \mathrm{e}^{-x^2}\, x^{-2}\, \mathrm{e}^{2C_1},\\
y^2-1 &= \mathrm{e}^{-x^2}\, x^{-2} C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\\
y &= \pm\sqrt{\mathrm{e}^{-x^2}\, x^{-2} C_3 + 1},
\end{aligned}$$

kde jsme předpokládali $y \neq \pm 1$. Tyto konstantní funkce splňují zadanou rovnici a lze je získat volbou $C_3 = 0$. Obecné řešení rovnice je tedy

$$y = \pm\sqrt{\mathrm{e}^{-x^2}\, x^{-2} C + 1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počáteční podmínky do řešení určíme hodnotu konstanty C

$$y(1) = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 2 = C\,\mathrm{e}^{-1} + 1 \quad \Rightarrow \quad C = \mathrm{e}\,.$$

Řešení počátečního problému je tedy

$$y = \sqrt{\mathrm{e}^{1-x^2}\, x^{-2} + 1}.$$

▲

Příklad 1.1.26.

Řešte následující rovnici

$$y' = (x+y)^2.$$

Řešení. Označíme $z = x + y$, tedy $z' = 1 + y'$. Potom rovnici $z' = 1 + z^2$ vyřešíme separací proměnných.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= 1 + z^2, \\
\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} &= \mathrm{d}x, \\
\int \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} &= \int \mathrm{d}x, \\
\operatorname{arctg} z &= x + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\
z &= \operatorname{tg}(x + C),
\end{aligned}$$

tedy

$$y(x) = \operatorname{tg}(x + C) - x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.1.27.

Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{x - y + 1}{x - y}.$$

Řešení. Označíme $z = x - y$, tedy $z' = 1 - y'$. Potom rovnici $z' = 1 - \frac{z+1}{z} = -\frac{1}{z}$ vyřešíme separací proměnných.

$$\begin{aligned} z \, \mathrm{d}z &= -\mathrm{d}x, \\ \int z \, \mathrm{d}z &= -\int \mathrm{d}x, \\ \frac{z^2}{2} &= -x + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ z^2 + 2x &= C, \end{aligned}$$

tedy

$$(x - y)^2 + 2x + C = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

I. 2. Homogenní diferenciální rovnice

Poznámka 1.2.1. Diferenciální rovnici

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

nazýváme *homogenní diferenciální rovnicí 1. řádu*. Pomocí substituce $u = \frac{y}{x}$ ji převedeme na rovnici se separovanými proměnnými ve tvaru

$$u' = \frac{1}{x}(f(u) - u).$$

Definice 1.2.2.

Nechť funkce dvou proměnných $f(x,y)$ je definována na nějakém kuželu K, tj. s každým bodem $[x,y] \in K$ je také $[tx,ty] \in K$ pro každé $t > 0$. Tato funkce se nazývá *homogenní k-tého stupně*, jestliže pro každé $t > 0$ platí

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y).$$

Poznámka 1.2.3. Diferenciální rovnice ve tvaru

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

bude homogenní diferenciální rovnicí prvního řádu právě tehdy, když jsou funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ homogenní téhož stupně.

Poznámka 1.2.4. Rovnici typu

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$$

lze řešit následujícím způsobem:

i) pokud soustava
$$ax+by+c=0, \quad Ax+By+C=0 \tag{1.2.1}$$
má jediné řešení x_0, y_0, pak ji pomocí substituce
$$u = x - x_0, \quad v = y - y_0$$
převedeme na homogenní rovnici 1. řádu
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{v}{u}\right);$$

ii) pokud soustava (1.2.1) nemá řešení (tzn. $ax + by = K(Ax + By)$ a $c \neq KC$), pak ji lze převést na rovnici se separovanými proměnnými (např. pomocí $z = ax + by$), viz Příklad 1.1.27.

Příklad 1.2.1.

Vyřešte diferenciální rovnici

$$(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Protože funkce $y \equiv 0$ není řešením této diferenciální rovnice (zkuste si dosadit do zadání), můžeme tuto diferenciální rovnici přepsat do tvaru

$$y'(x) = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}},$$

ze kterého po substituci $u = \frac{y}{x}$ dostaneme

$$u'x + u = \frac{1 + u^2}{2u}.$$

Pokud vyloučíme $u = \pm 1$, obdržíme

$$\frac{2u}{1 - u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

nebo-li po integraci obou stran a dílčích úpravách

$$\begin{aligned}
-\ln\left|1 - u^2\right| &= \ln|x| + C, && C \in \mathbb{R},\\
-\ln\left|x(1 - u^2)\right| &= C, && C \in \mathbb{R},\\
\frac{1}{|x(1 - u^2)|} &= K, && K > 0,\\
\frac{1}{x(1 - u^2)} &= L, && L \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\\
1 - \frac{y^2}{x^2} &= \frac{L}{x}, && L \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\\
y &= \pm\sqrt{x^2 - Lx}, && L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.
\end{aligned}$$

Funkce $z = \pm 1$ je ekvivalentní s $y = \pm x$, což je řešením zadané diferenciální rovnice, které dostaneme volbou $L = 0$, je obecné řešení ve tvaru

$$y = \pm\sqrt{x^2 - Cx}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.2.2.

Řešte následující rovnici

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

Řešení. Rovnici upravíme na

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x} + \frac{y}{x} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}.$$

Substitucí $u = \frac{y}{x}$ (tj. $ux = y$, $u'x + u = y'$) dostaneme rovnici

$$u'x + u = \sqrt{1 - u^2} + u,$$

kterou vyřešíme separací proměnných následovně

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}} &= \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
\arcsin u &= \ln|x| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}, \\
\arcsin \frac{y}{x} &= \ln|Cx|, \qquad C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\
y &= x \sin \ln|Cx|,
\end{aligned}$$

kde jsme předpokládali $u \neq \pm 1$, tedy $y \neq \pm x$. Tyto funkce splňují zadanou rovnici a nelze je získat volbou konstanty. Obecné řešení rovnice je tedy

$$y \neq \pm x, \qquad y = x \sin \ln|Cx|, \quad C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

▲

Příklad 1.2.3.

Řešte následující rovnici

$$(y^2 - x^2)\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Protože funkce $y \equiv 0$ není řešením této diferenciální rovnice, můžeme tuto diferenciální rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 2y'.$$

Substitucí $u = \frac{y}{x}$ (tj. $ux = y$, $u'x + u = y'$) dostaneme rovnici

$$u - \frac{1}{u} = 2u'x + 2u.$$

kterou vyřešíme separací proměnných následovně

$$\begin{aligned}
\frac{u}{u^2+1}\mathrm{d}u &= -\frac{\mathrm{d}x}{2x}, \\
\int \frac{u}{u^2+1}\mathrm{d}u &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{2x}, \\
\frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right| &= -\frac{1}{2}\ln|x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\
\ln\left|u^2+1\right| &= -\ln|C_2 x|, \quad C_2 > 0, \\
u^2 + 1 &= \pm\frac{1}{C_2 x}, \\
\frac{y^2}{x^2} + 1 &= \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\
y &= \pm\sqrt{Cx - x^2},
\end{aligned}$$

kde jsme integrál vlevo vypočítali např. substitucí $t = u^2 + 1$. ▲

Příklad 1.2.4.

Řešte následující rovnici

$$xy' + y \ln x = y \ln y.$$

Řešení. Rovnici upravíme na

$$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}.$$

Substitucí $u = \frac{y}{x}$ (tj. $ux = y$, $u'x + u = y'$) dostaneme rovnici

$$u'x + u = u \ln u,$$

kterou vyřešíme separací proměnných následovně (integrál vlevo vypočítáme např. substitucí $t = \ln u - 1$)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} &= \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
\int \frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
\ln|\ln u - 1| &= \ln|x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\
|\ln u - 1| &= |C_2 x|, \quad C_2 > 0, \\
\ln u - 1 &= C_3 x, \quad C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\
u &= \mathrm{e}^{C_3 x + 1}, \\
y &= x\,\mathrm{e}^{C_3 x + 1},
\end{aligned}$$

kde jsme předpokládali $u \neq 0$ a $\ln u \neq 1$, tedy $y \neq 0$, což nevyhovuje rovnici, a $y = \mathrm{e}\,x$ což splňuje zadanou rovnici, ale lze získat volbou konstanty $C_3 = 0$. Obecné řešení rovnice je tedy

$$y = x\,\mathrm{e}^{Cx+1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.2.5.

Řešte následující rovnici

$$(xy' - y)\cos\frac{y}{x} = x.$$

Řešení. Rovnici upravíme na

$$\left(y' - \frac{y}{x}\right)\cos\frac{y}{x} = 1.$$

Substitucí $u = \frac{y}{x}$ (tj. $ux = y$, $u'x + u = y'$) dostaneme rovnici

$$(u'x + u - u)\cos u = 1,$$

kterou vyřešíme separací proměnných následovně

$$\begin{aligned}
\cos u \mathrm{d}u &= \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
\int \cos u \mathrm{d}u &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
\sin u &= \ln|x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\
\mathrm{e}^{\sin u} &= |C_2 x|, \quad C_2 > 0, \\
\mathrm{e}^{\sin u} &= Cx, \quad C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\
\mathrm{e}^{\sin\frac{y}{x}} &= Cx.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 1.2.6.

Řešte následující rovnici

$$(x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y=0.$$

Řešení. Rovnici upravíme na

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

Substitucí $u=\frac{y}{x}$ (tj. $ux=y$, $u'x+u=y'$) dostaneme rovnici

$$u'x+u=\frac{1+u}{1-u},$$

kterou vyřešíme separací proměnných následovně (integrál vlevo vypočítáme např. rozdělením na dva zlomky)

$$\begin{aligned}
u'x&=\frac{1+u^2}{1-u},\\
\frac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u&=\frac{\mathrm{d}x}{x},\\
\int\frac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u&=\int\frac{\mathrm{d}x}{x},\\
\operatorname{arctg}u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)&=\ln|x|+C,\quad C\in\mathbb{R},\\
\operatorname{arctg}u&=\ln\left(|x|\sqrt{1+u^2}\right)+C,\\
\operatorname{arctg}\frac{y}{x}&=\ln\left(|x|\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)+C,\\
2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}&=\ln(x^2+y^2)+C.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 1.2.7.

Řešte následující rovnici

$$xy' = y \cos\left(\ln \frac{y}{x}\right).$$

Řešení. Rovnici upravíme na

$$y' = \frac{y}{x} \cos \ln \frac{y}{x}.$$

Substitucí $u = \frac{y}{x}$ (tj. $ux = y$, $u'x + u = y'$) dostaneme rovnici

$$u'x + u = u \cos \ln u,$$

kterou vyřešíme separací proměnných následovně (integrál vlevo vypočítáme např. postupným použitím substitucí $t = \ln u$ a $z = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{u[\cos(\ln u) - 1]} &= \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
\int \frac{\mathrm{d}u}{u[\cos(\ln u) - 1]} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\ln u}{2}} &= \ln|x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\
\operatorname{cotg} \ln \sqrt{\frac{y}{x}} &= \ln|Cx|, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 1.2.8.

Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{x+2y-7}{x-3}.$$

Řešení. Soustava rovnic

$$x + 2y - 7 = 0, \qquad x - 3 = 0$$

má řešení $x = 3, y = 2$. Zavedeme proto substituci $u = x - 3$ a $v = y - 2$, tj. $x = u + 3, y = v + 2, y' = v'$. Řešíme tedy rovnici

$$v' = \frac{u+2v}{u} = 1 + 2\frac{v}{u}.$$

Substitucí $w = \frac{v}{u}$ (tj. $wu = v$, $w'u + w = v'$) dostaneme rovnici

$$w'u + w = 1 + 2w,$$

kterou vyřešíme separací proměnných následovně

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}w}{1+w} &= \frac{\mathrm{d}u}{u}, \\
\int \frac{\mathrm{d}w}{1+w} &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u}, \\
\ln|1+w| &= \ln|u| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\
|1+w| &= |u|\, C_2, \quad C_2 > 0, \\
1 + w &= uC_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\
1 + \frac{y-2}{x-3} &= C_3(x-3), \\
y &= C_3(x-3)^2 - x + 5,
\end{aligned}$$

kde jsme předpokládali $w \neq 1$, tedy $y \neq x - 5$, což splňuje zadanou rovnici, ale lze získat volbou konstanty $C_3 = 0$. Obecné řešení rovnice je tedy

$$y = C(x-3)^2 - x + 5, \qquad C \in \mathbb{R}$$

▲

Příklad 1.2.9.

Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{2x - y - 5}{x - 3y - 5}.$$

Řešení. Soustava rovnic

$$2x - y - 5 = 0, \qquad x - 3y - 5 = 0$$

má řešení $x = 2, y = -1$. Zavedeme proto substituci $u = x - 2$ a $v = y + 1$, tj. $x = u + 2, y = v - 1, y' = v'$. Řešíme tedy rovnici

$$v' = \frac{2u - v}{u - 3v} = \frac{2 - \frac{v}{u}}{1 - 3\frac{v}{u}}.$$

Substitucí $w = \frac{v}{u}$ (tj. $wu = v$, $w'u + w = v'$) dostaneme rovnici

$$w'u + w = \frac{2 - w}{1 - 3w},$$

kterou vyřešíme separací proměnných následovně (integrál vlevo lze vyřešit např. substitucí $t = 2 - 2w + 3w^2$)

$$\begin{aligned}
\frac{1 - 3w}{2 - 2w + 3w^2}\mathrm{d}w &= \frac{\mathrm{d}u}{u}, \\
\int \frac{1 - 3w}{2 - 2w + 3w^2}\mathrm{d}w &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u}, \\
-\frac{1}{2}\ln\left|2 - 2w + 3w^2\right| &= \ln|u| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\
\left|2 - 2w + 3w^2\right| &= u^{-2}C_2, \quad C_2 > 0, \\
2 - 2w + 3w^2 &= u^{-2}C, \quad C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\
2(x-2)^2 - 2(y+1)(x-2) + 3(y+1)^2 &= C.
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že výraz $2 - 2w + 3w^2$, kterým jsme dělili, nemá reálné kořeny. ▲

Příklad 1.2.10.

Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{x-y+3}{x+y-5}.$$

Řešení. Soustava rovnic

$$x-y+3=0, \qquad x+y-5=0$$

má řešení $x=1, y=4$. Zavedeme proto substituci $u=x-1$ a $v=y-4$, tj. $x=u+2, y=v+4, y'=v'$. Řešíme tedy rovnici

$$v' = \frac{u-v}{u+v} = \frac{1-\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}}.$$

Substitucí $w=\frac{v}{u}$ (tj. $wu=v$, $w'u+w=v'$) dostaneme rovnici

$$w'u+w = \frac{1-w}{1+w},$$

kterou vyřešíme separací proměnných následovně (integrál vlevo lze vyřešit např. substitucí $t=1-2w-w^2$)

$$\begin{aligned}
\frac{1+w}{1-2w-w^2}\mathrm{d}w &= \frac{\mathrm{d}u}{u},\\
\int \frac{1+w}{1-2w-w^2}\mathrm{d}w &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u},\\
-\frac{1}{2}\ln\left|1-2w-w^2\right| &= \ln|u| + C_1, \quad C_1\in\mathbb{R},\\
\left|1-2w-w^2\right| &= u^{-2}C_2, \quad C_2>0,\\
1-2w-w^2 &= u^{-2}C, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\
(x-1)^2-2(y-4)(x-1)-(y-4)^2 &= C.
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že výraz $1-2w-w^2$, kterým jsme dělili, má reálné kořeny $-1\pm\sqrt{2}$, tedy dostáváme $\frac{y-4}{x-1}=-1\pm\sqrt{2}$, tj. $y=(-1\pm\sqrt{2})(x-1)+4$, což nevyhovuje zadání. ▲

Příklad 1.2.11.

Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{5y - 5x - 1}{2y - 2x - 1}.$$

Řešení. Soustava rovnic

$$5y - 5x - 1 = 0, \qquad 2y - 2x - 1 = 0$$

nemá řešení. Zavedeme proto substituci $z = y - x$, tj. $z' = y' - 1$. Řešíme tedy rovnici

$$z' = \frac{5z - 1}{2z - 1} - 1 = \frac{3z}{2z - 1},$$

kterou vyřešíme separací proměnných následovně

$$\begin{aligned}
\frac{3z}{2z-1}\mathrm{d}z &= \mathrm{d}x, \\
\int \frac{2}{3} - \frac{1}{3z}\mathrm{d}z &= \int \mathrm{d}x, \\
\frac{2}{3}z - \frac{1}{3}\ln|z| &= x + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\
\ln|z| &= 2z - 3x + C, \\
5x - 2y + \ln|y - x| &= C.
\end{aligned}$$

Během výpočtu jsme předpokládali, že $z \neq 0$, tedy $y \neq x$. Dosazením do rovnice zjistíme, že jde o řešení. Výsledek je tedy

$$y = x, \quad C = 5x - 2y + \ln|y - x|\,, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.2.12.

Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{x-y-1}{x+y+3}.$$

Řešení. Soustava rovnic

$$x-y-1=0, \qquad x+y+3=0$$

má řešení $x=-1, y=-2$. Zavedeme proto substituci $u=x+1$ a $v=y+2$, tj. $x=u-1, y=v-2, y'=v'$. Řešíme tedy rovnici

$$v' = \frac{u-v}{u+v} = \frac{1-\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}}.$$

Substitucí $w=\frac{v}{u}$ (tj. $wu=v$, $w'u+w=v'$) dostaneme rovnici

$$w'u+w = \frac{1-w}{1+w},$$

kterou vyřešíme separací proměnných následovně (integrál vlevo lze vyřešit např. substitucí $t=1-2w-w^2$)

$$\begin{aligned}
\frac{1+w}{1-2w-w^2}\mathrm{d}w &= \frac{\mathrm{d}u}{u},\\
\int \frac{1+w}{1-2w-w^2}\mathrm{d}w &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u},\\
-\frac{1}{2}\ln\left|1-2w-w^2\right| &= \ln|u|+C_1, \quad C_1\in\mathbb{R},\\
\left|1-2w-w^2\right| &= u^{-2}C_2, \quad C_2>0,\\
1-2w-w^2 &= u^{-2}C, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\
(x+1)^2-2(x+1)(y+2)-(y+2)^2 &= C.
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že výraz $1-2w-w^2$, kterým jsme dělili, má reálné kořeny $-1\pm\sqrt{2}$, tedy dostáváme $\frac{y+2}{x+1}=-1\pm\sqrt{2}$, tj. $y=(-1\pm\sqrt{2})(x+1)-2$, což nevyhovuje zadání. ▲

Příklad 1.2.13.

Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{-x+2y-5}{2x-y+4}.$$

Řešení. Soustava rovnic

$$-x+2y-5=0, \qquad 2x-y+4=0$$

má řešení $x=-1, y=2$. Zavedeme proto substituci $u=x+1$ a $v=y-2$, tj. $x=u-1, y=v+2, y'=v'$. Řešíme tedy rovnici

$$v' = \frac{-u+2v}{2u-v} = \frac{-1+2\frac{v}{u}}{2-\frac{v}{u}}.$$

Substitucí $w=\frac{v}{u}$ (tj. $wu=v$, $w'u+w=v'$) dostaneme rovnici

$$w'u+w = \frac{-1+2w}{2-w},$$

kterou vyřešíme separací proměnných následovně

$$\begin{aligned}
\frac{2-w}{w^2-1}\mathrm{d}w &= \frac{\mathrm{d}u}{u}, \\
\int \frac{\frac{1}{2}}{w-1} - \frac{\frac{3}{2}}{w+1}\mathrm{d}w &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u}, \\
\ln\left|\sqrt{\frac{w-1}{(w+1)^3}}\right| &= \ln|u| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\
\left|\sqrt{\frac{w-1}{(w+1)^3}}\right| &= |u|\,C_2, \quad C_2 > 0, \\
\sqrt{\frac{w-1}{(w+1)^3}} &= uC, \quad C_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\
\sqrt{\tfrac{y-x-3}{(y+x-1)^3}} &= C_3.
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že výraz w^2-1, kterým jsme dělili, má reálné kořeny ± 1, tedy dostáváme $\frac{y-2}{x+1} = \pm 1$, tj. $y = \pm 1(x+1)+2$, což vyhovuje zadání. Přitom řešení $y_1 = x+3$ lze získat volbou $C_3 = 0$ a řešení $y_2 = 1-x$ musíme dodat. Celkem jsme tedy obdrželi

$$y = 1-x, \quad \sqrt{\tfrac{y-x-3}{(y+x-1)^3}} = C \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.2.14.

Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{x+y+1}{2x+2y-1}.$$

Řešení. Soustava rovnic

$$x+y+1=0, \qquad 2x+2y-1=0$$

nemá řešení. Ukažme si další možnost volby substituce. Lze ji přepsat jako

$$y' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2x+2y-1}.$$

Zavedeme tedy substituci $z = 2x+2y-1$, tj. $z' = 2y'+2$. Řešíme tedy rovnici

$$\frac{z'-2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z},$$

kterou vyřešíme separací proměnných následovně

$$\begin{aligned} \frac{z}{z+1}\mathrm{d}z &= 3\mathrm{d}x, \\ \int 1 - \frac{1}{z+1}\mathrm{d}z &= \int 3\mathrm{d}x, \\ z - \ln|z+1| &= 3x + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ 2x+2y-1-\ln|2x+2y| &= 3x + C. \end{aligned}$$

Během výpočtu jsme předpokládali, že $z \neq -1$, tedy $y \neq -x$. Dosazením do rovnice zjistíme, že jde o řešení. Výsledek je tedy

$$y = -x, \quad 2x+2y-1-\ln|2x+2y| = 3x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

I. 3. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 1.3.1.

Rovnice ve tvaru

$$y' = f(x)\,y + g(x)$$

se nazývá *lineární diferenciální rovnice 1. řádu* (pokud je $g(x) \equiv 0$ hovoříme o *homogenní* LDR, v opačném případě ji nazýváme *nehomogenní* LDR).

Poznámka 1.3.2. Obecné řešení homogenní LDR získáme pomocí metody separace proměnných. Řešení rovnice $y' = f(x)\,y$ lze potom explicitně vyjádřit

$$y = C\,\mathrm{e}^{\int f(x)\mathrm{d}x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Při hledání obecného řešení nehomogenní LDR je možné postupovat dvěma způsoby: buď s pomocí *metody integračního faktoru* (kdy nehomogenní rovnici vynásobíme členem $\mathrm{e}^{-\int f(x)\mathrm{d}x}$) nebo s pomocí *metody variace konstant* (kdy integrační konstantu získanou při řešení přidružené homogenní rovnice považujeme za funkci $C(x)$ a jejím dosazením dosazením do nehomogenní rovnice získáme její tvar). Řešení počátečního problému $y(x_0) = y_0$ lze explicitně zapsat ve tvaru

$$y = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s}\ \mathrm{d}t \right).$$

Příklad 1.3.1.

Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' + \frac{2y}{x^2-1} = x.$$

Řešení. Je zřejmé, že se jedná o nehomogenní lineární diferenciální rovnici 1. řádu. Proto si ukážeme obě metody řešení. Začneme s metodou integračního faktoru. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $e^{\int \frac{2\,dx}{x^2-1}} = e^{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} = \frac{x-1}{x+1}$ (všimněte si, že pro určení integračního faktoru není nutné uvažovat integrační konstantu C ani jeho znaménko – proto jsme odstranili absolutní hodnotu u posledního výrazu). Po úpravě dostaneme

$$y'\frac{x-1}{x+1} + \frac{2y}{(x+1)^2} = \frac{x(x-1)}{x+1}.$$

S využitím pravidla pro derivování součinu si můžeme všimnout, že výraz na levé straně lze napsat jako $\left(y\frac{x-1}{x+1}\right)'$, což je hlavní myšlenka metody integračního faktoru. Pak integrováním obou stran obdržíme

$$y\frac{x-1}{x+1} = \int \frac{x(x-1)}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní vyřešíme tutéž diferenciální rovnici pomocí metody variace konstant. Proto se nejdříve zaměříme na přidruženou homogenní diferenciální rovnici, tj. $y' = -\frac{2y}{x^2-1}$. To je rovnice se separovanými proměnnými, tedy za předpokladu $y \not\equiv 0$ máme

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y} &= -\frac{2\,dx}{x^2-1}, \\
\ln|y| &= -\ln|x-1| + \ln|x+1| + C, \qquad && C \in \mathbb{R}, \\
\ln\left|\frac{y(x-1)}{x+1}\right| &= C, && C \in \mathbb{R}, \\
\left|\frac{y(x-1)}{x+1}\right| &= K, && K > 0, \\
\frac{y(x-1)}{x+1} &= L, && L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\
y &= \frac{L(x+1)}{x-1}, && L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.
\end{aligned}$$

Protože funkce $y \equiv 0$ vždy vyhovuje homogenní lineární diferenciální rovnici, je nutné ji také zahrnout do obecného řešení (pokud to je možné – u tohoto typu diferenciálních rovnic to je možné vždy). Proto řešením přidružené homogenní rovnice je funkce

$$y = \frac{C(x+1)}{x-1}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní uvažujme tuto funkci ovšem konstantu C nahradíme nějakou neznámou funkcí $C(x)$, tj. $y(x) = \frac{C(x)\,(x+1)}{x-1}$. Nyní s využitím pravidla pro derivování součinu můžeme spočítat $y'(x)$ a dosadit do původního zadání, tj.

$$\frac{C'(x)\,(x+1)(x-1) + C(x)\,(x-1) - C(x)\,(x+1)}{(x-1)^2} + \frac{2\,C(x)\,(x+1)}{(x-1)(x^2-1)} = x.$$

Pokud jsme vše spočítali správně obdržíme diferenciální rovnici pro funkci $C(x)$, kde se žádný výraz obsahující nederivované $C(x)$ nevyskytuje. Dostáváme tedy

$$C'(x) = \frac{x(x-1)}{x+1},$$

což po integraci dává

$$C(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C.$$

Dosazením do řešení přidružené homogenní rovnice dostaneme obecné řešení původní rovnice ve tvaru

$$y = \frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme na závěr, že ačkoli se oba postupy liší, je při nich potřeba spočítat tytéž primitivní funkce (tedy v tomto směru není mezi oběma metodami žádný rozdíl). ▲

Příklad 1.3.2.

Řešte následující rovnici

$$y' = 6x - 2y.$$

Řešení. **Metodou integračního faktoru:**
Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{2x}$. Dostaneme rovnici

$$y' \mathrm{e}^{2x} + 2y \mathrm{e}^{2x} = 6x \mathrm{e}^{2x},$$

tedy

$$\left(y \mathrm{e}^{2x}\right)' = 6x \mathrm{e}^{2x}.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$y \mathrm{e}^{2x} = \int 6x \mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{d}x = 3x \mathrm{e}^{2x} - \frac{3}{2} \mathrm{e}^{2x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = 3x - \frac{3}{2} + C \mathrm{e}^{-2x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Metoda variace konstant:
Přidružená homogenní diferenciální rovnici je $y' = -2y$, což je rovnice se separovanými proměnnými, tedy za předpokladu $y \not\equiv 0$ máme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -2\,\mathrm{d}x, \\ \ln|y| &= -2x + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}, \\ |y| &= \mathrm{e}^{-2x} C_2, \qquad C_2 > 0, \\ y &= \mathrm{e}^{-2x} C_3, \qquad C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Protože funkce $y \equiv 0$ vždy vyhovuje homogenní lineární diferenciální rovnici, je nutné ji také zahrnout do obecného řešení. Proto řešením přidružené homogenní rovnice je funkce

$$y = \mathrm{e}^{-2x} C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní uvažujme tuto funkci ovšem konstantu C nahradíme nějakou neznámou funkcí $C(x)$, tj. $y(x) = \mathrm{e}^{-2x} C(x)$. S využitím pravidla pro derivování součinu můžeme spočítat $y'(x)$ a dosadit do původního zadání, tj.

$$-2 \mathrm{e}^{-2x} C(x) + \mathrm{e}^{-2x} C'(x) = 6x - 2 \mathrm{e}^{-2x} C(x).$$

Pokud jsme vše spočítali správně obdržíme diferenciální rovnici pro funkci $C(x)$, kde se žádný výraz obsahující nederivované $C(x)$ nevyskytuje. Dostáváme tedy

$$C'(x) = 6x \mathrm{e}^{2x},$$

což po integraci dává

$$C(x) = 3x\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + K.$$

Dosazením do řešení přidružené homogenní rovnice dostaneme obecné řešení původní rovnice ve tvaru

$$y = 3x - \frac{3}{2} + K\,\mathrm{e}^{-2x},\ K \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.3.3.

Řešte následující rovnici

$$y' = 4xy + (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x^2}.$$

Řešení. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int -4x\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2x^2}$. Dostaneme rovnici

$$y'\,\mathrm{e}^{-2x^2} - 4xy\,\mathrm{e}^{-2x^2} = 2x+1,$$

tedy

$$\left(y\,\mathrm{e}^{-2x^2}\right)' = 2x+1.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$y\,\mathrm{e}^{-2x^2} = \int 2x+1\,\mathrm{d}x = x^2+x+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = (x^2+x+C)\,\mathrm{e}^{2x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.3.4.

Řešte následující rovnici

$$y' \cos x = (y + 2\cos x) \sin x.$$

Řešení. Rovnici lze přepsat jako $y' = (y + 2\cos x) \operatorname{tg} x$. Přidružená homogenní diferenciální rovnici je $y' = y \operatorname{tg} x$, což je rovnice se separovanými proměnnými, tedy za předpokladu $y \not\equiv 0$ máme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x, \\
\ln|y| &= -\ln|\cos x| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}, \\
y &= \frac{C_2}{\cos x}, \qquad C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Protože funkce $y \equiv 0$ vždy vyhovuje homogenní lineární diferenciální rovnici, je nutné ji také zahrnout do obecného řešení. Proto řešením přidružené homogenní rovnice je funkce

$$y = \frac{C}{\cos x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní uvažujme tuto funkci ovšem konstantu C nahradíme nějakou neznámou funkcí $C(x)$, tj. $y(x) = \frac{C(x)}{\cos x}$. S využitím pravidla pro derivování součinu můžeme spočítat $y'(x)$ a dosadit do původního zadání, tj.

$$\frac{C'(x)}{\cos x} + \frac{C(x) \sin x}{\cos^2 x} = \left(\frac{C(x)}{\cos x} + 2\cos x \right) \operatorname{tg} x.$$

Pokud jsme vše spočítali správně obdržíme diferenciální rovnici pro funkci $C(x)$, kde se žádný výraz obsahující nederivované $C(x)$ nevyskytuje. Dostáváme tedy

$$C'(x) = 2 \sin x \cos x,$$

což po integraci dává

$$C(x) = \sin^x + K.$$

Dosazením do řešení přidružené homogenní rovnice dostaneme obecné řešení původní rovnice ve tvaru

$$y = \frac{\sin^2 x + K}{\cos x}, \; K \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.3.5.

Řešte následující rovnici

$$y'x + y = x \ln x.$$

Řešení. Pracujeme s rovnicí $y' + \frac{y}{x} = \ln x$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x} = x$. Dostaneme rovnici

$$y'x + y = x \ln x,$$

tedy

$$(yx)' = x \ln x.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$yx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \frac{x}{2} \ln x - \frac{x}{4} + \frac{C}{x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.3.6.

Řešte následující rovnici

$$y'x - y = x^2 \ln x.$$

Řešení. Pracujeme s rovnicí $y' - \frac{y}{x} = x \ln x$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem

$$\mathrm{e}^{\int -\frac{1}{x} \mathrm{d}x} = \frac{-1}{x}.$$

Dostaneme rovnici

$$\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \ln x,$$

tedy

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \ln x.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$\frac{y}{x} = x \ln x - x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = x^2 \ln x - x^2 + Cx, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.3.7.

Řešte následující rovnici

$$y' = -3y + x.$$

Řešení. Pracujeme s rovnicí $y' + 3y = x$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int 3\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{3x}$. Dostaneme rovnici

$$y' \mathrm{e}^{3x} + 3y \mathrm{e}^{3x} = x \mathrm{e}^{3x},$$

tedy

$$\left(y \mathrm{e}^{3x}\right)' = x \mathrm{e}^{3x}.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$y \mathrm{e}^{3x} = \frac{x}{3} \mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{9} \mathrm{e}^{3x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + C \mathrm{e}^{-3x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.3.8.

Řešte následující rovnici

$$y' - y \operatorname{tg} x - \sin x = 0.$$

Řešení. Pracujeme s rovnicí $y' - y \operatorname{tg} x = \sin x$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $e^{\int -\operatorname{tg} x \, dx} = \cos x$. Dostaneme rovnici

$$y' \cos x - y \sin x = \sin x \cos x,$$

tedy

$$(y \cos x)' = \sin x \cos x.$$

Integrováním obou stran obdržíme (na pravou stranu použijeme např. substituci $t = \sin x$)

$$y \cos x = \frac{\sin^2 x}{2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \frac{\sin^2 x}{2 \cos x} + \frac{C}{\cos x} = \frac{C}{\cos x} - \frac{\cos x}{2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.3.9.

Řešte následující rovnici

$$y' - \frac{xy}{1-x^2} = \frac{\arcsin x}{1-x^2}.$$

Řešení. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $e^{\int \frac{-x}{1-x^2}\,dx} = \sqrt{1-x^2}$, kde jsme vzali v úvahu, že přímo ze zadání je $x \in (-1, 1)$. Dostaneme rovnici

$$y'\sqrt{1-x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

tedy

$$\left(y\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integrováním obou stran obdržíme (na pravou stranu použijeme např. substituci $t = \sin x$)

$$y\sqrt{1-x^2} = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(\arcsin^2 x + C\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.3.10.

Řešte následující rovnici

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^3 x.$$

Řešení. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos x}$. Dostaneme rovnici

$$\frac{y'}{\cos x} - \frac{y\,\mathrm{tg}\,x}{\cos x} = \cos^2 x,$$

tedy

$$\left(\frac{y}{\cos x}\right)' = \cos^2 x.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$\frac{y}{\cos x} = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \cos x \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.3.11.

Řešte následující rovnici

$$y' \cos x + y \sin x = 1.$$

Řešení. Pracujeme s rovnicí $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int \operatorname{tg} x \mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos x}$. Dostaneme rovnici

$$\frac{y'}{\cos x} - \frac{y \operatorname{tg} x}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

tedy

$$\left(\frac{y}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$\frac{y}{\cos x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \sin x + C \cos x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.3.12.

Řešte následující rovnici

$$y' - y\sin x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Řešení. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int -\sin x \mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\cos x}$. Dostaneme rovnici

$$y' \,\mathrm{e}^{\cos x} - y\sin x\,\mathrm{e}^{\cos x} = \frac{\sin 2x}{2}\,\mathrm{e}^{\cos x},$$

tedy

$$(y\,\mathrm{e}^{\cos x})' = \frac{\sin 2x}{2}\,\mathrm{e}^{\cos x}.$$

Integrováním obou stran obdržíme (vpravo použijeme vzorec $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ a substituci $t = \cos x$)

$$y\,\mathrm{e}^{\cos x} = \mathrm{e}^{\cos x}(1-\cos x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = 1 - \cos x + C\,\mathrm{e}^{-\cos x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.3.13.

Řešte následující rovnici

$$y' - 3x^2 y = (x+2)\,\mathrm{e}^{x^3}.$$

Řešení. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int -3x^2 \mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x^3}$. Dostaneme rovnici

$$y'\,\mathrm{e}^{-x^3} - 3x^2 y\,\mathrm{e}^{-x^3} = x+2,$$

tedy

$$\left(y\,\mathrm{e}^{-x^3}\right)' = x+2.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$y\,\mathrm{e}^{-x^3} = \frac{x^2}{2} + 2x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + 2x + C\right)\mathrm{e}^{x^3}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.3.14.

Řešte následující rovnici

$$y' \, \mathrm{e}^{x^2} + 2xy \, \mathrm{e}^{x^2} = \cos x.$$

Řešení. Pracujeme s rovnicí $y' + 2xy = \cos x \, \mathrm{e}^{-x^2}$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int 2x \mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x^2}$. Dostaneme rovnici

$$y' \, \mathrm{e}^{x^2} + 2xy \, \mathrm{e}^{x^2} = \cos x,$$

tedy

$$\left(y \, \mathrm{e}^{x^2} \right)' = \cos x.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$y \, \mathrm{e}^{x^2} = \sin x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = (C + \sin x) \, \mathrm{e}^{-x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.3.15.

Řešte následující počáteční problém

$$y' = x^2 \mathrm{e}^x + \frac{y}{x}, \quad y(1) = \mathrm{e}\,.$$

Řešení. Nejprve najdeme řešení rovnice $y' - \frac{y}{x} = x^2 \mathrm{e}^x$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int \frac{-1}{x} \mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$. Dostaneme rovnici

$$\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = x \mathrm{e}^x,$$

tedy

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = x \mathrm{e}^x\,.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$\frac{y}{x} = x \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením dané diferenciální rovnice je funkce

$$y = x^2 \mathrm{e}^x - x \mathrm{e}^x + Cx, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní určíme pomocí počáteční podmínky $y(1) = \mathrm{e}$ hodnotu konstanty C. Dosazením do řešení máme

$$y(1) = \mathrm{e} - \mathrm{e} + C = \mathrm{e},$$

tedy $C = \mathrm{e}$ a řešení počátečního problému je

$$y = x^2 \mathrm{e}^x - x \mathrm{e}^x + \mathrm{e}\, x = x(x \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}).$$

▲

Příklad 1.3.16.

Řešte následující počáteční problém

$$y' + 2xy = x\,\mathrm{e}^{-x^2}, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Řešení. Nejprve najdeme řešení rovnice $y' + 2xy = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x^2}$. Dostaneme rovnici

$$y'\,\mathrm{e}^{x^2} + 2xy\,\mathrm{e}^{x^2} = x,$$

tedy

$$\left(y\,\mathrm{e}^{x^2}\right)' = x.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$y\,\mathrm{e}^{x^2} = \frac{x^2}{2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením dané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \left(C + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní určíme pomocí počáteční podmínky $y(0) = \frac{1}{2}$ hodnotu konstanty C. Dosazením do řešení máme

$$y(0) = (C + 0) \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

tedy $C = \frac{1}{2}$ a řešení počátečního problému je

$$y = \frac{x^2 + 1}{2\,\mathrm{e}^{x^2}}.$$

▲

Příklad 1.3.17.

Řešte následující počáteční problém

$$y' - 4y = \cos x, \quad y(0) = 1.$$

Řešení. Nejprve najdeme řešení rovnice $y' - 4y = \cos x$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int -4\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-4x}$. Dostaneme rovnici

$$y' \mathrm{e}^{-4x} - 4y \mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{e}^{-4x} \cos x,$$

tedy

$$\left(y \mathrm{e}^{-4x}\right)' = \mathrm{e}^{-4x} \cos x.$$

Integrováním obou stran obdržíme (pravou stranu integrujeme per partes)

$$y \mathrm{e}^{-4x} = \frac{-4}{17} \mathrm{e}^{-4x} \cos x + \frac{1}{17} \mathrm{e}^{-4x} \sin x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením dané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \frac{-4}{17} \cos x + \frac{1}{17} \sin x + C \mathrm{e}^{4x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní určíme pomocí počáteční podmínky $y(0) = 1$ hodnotu konstanty C. Dosazením do řešení máme

$$y(0) = \frac{-4}{17} + C = 1,$$

tedy $C = \frac{21}{17}$ a řešení počátečního problému je

$$y = \frac{1}{17} \sin x - \frac{4}{17} \cos x + \frac{21}{17} \mathrm{e}^{4x}.$$

▲

Příklad 1.3.18.

Řešte následující počáteční problém

$$y' + y\sin x = \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Řešení. Nejprve najdeme řešení rovnice $y' + y\sin x = \sin x$. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int \sin x \mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\cos x}$. Dostaneme rovnici

$$y' \mathrm{e}^{-\cos x} + y\,\mathrm{e}^{-\cos x} \sin x = \mathrm{e}^{-\cos x} \sin x,$$

tedy

$$\left(y\,\mathrm{e}^{-\cos x}\right)' = \mathrm{e}^{-\cos x} \sin x.$$

Integrováním obou stran (pravou stranu integrujeme např. substitucí $t = -\cos x$) obdržíme

$$y\,\mathrm{e}^{-\cos x} = \mathrm{e}^{-\cos x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením dané diferenciální rovnice je funkce

$$y = 1 + C\,\mathrm{e}^{\cos x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní určíme pomocí počáteční podmínky $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ hodnotu konstanty C. Dosazením do řešení máme

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + C = 2,$$

tedy $C = 1$ a řešení počátečního problému je

$$y = \mathrm{e}^{\cos x} + 1.$$

▲

Příklad 1.3.19.

V 13 hodin 28 minut byla v hotelovém pokoji, vytopeném na 18, 3 °C *nalezena mrtvola, jejíž teplota byla* 26, 6 °C*. O tři hodiny později je její teplota* 21, 1 °C*. Určete čas úmrtí za předpokladu teploty živého těla* 37 °C*.*

Řešení. Označíme-li teplotu těla v čase t jako $y(t)$, teplotu okolí jako T a konstantu úměrnosti jako $k > 0$, můžeme ze zadání sestavit rovnici a podmínky

$$y'(t) = -k[y(t) - T]; \quad T = 18,3; \quad y(0) = 26,6; \quad y(3) = 21,1.$$

Rovnici vyřešíme např. metodou integračního faktoru, tedy vynásobíme obě strany rovnice $y' + ky = kT$ výrazem $\mathrm{e}^{\int k \mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{kt}$. Dostaneme rovnici

$$y' \mathrm{e}^{kt} + ky \mathrm{e}^{kt} = kT \mathrm{e}^{kt},$$

tedy

$$\left(y \mathrm{e}^{kt}\right)' = kT \mathrm{e}^{kt}.$$

Integrováním obou stran obdržíme (k a T jsou konstanty)

$$y \mathrm{e}^{kt} = T \mathrm{e}^{kt} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením dané diferenciální rovnice je funkce

$$y = T + C \mathrm{e}^{-kt}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní potřebujeme určit hodnoty konstant C a k. Dosadíme-li do řešení $T = 18,3$ a $y(0) = 26,6$, získáme rovnici

$$26,6 = 18,3 + C \mathrm{e}^{-k \cdot 0},$$

tedy $C = 8,3$. Využijeme-li této znalosti a navíc do řešení dosadíme $T = 18,3$ a $y(3) = 21,1$, dostaneme

$$21,1 = 18,3 + 8,3 \mathrm{e}^{-3k},$$

tedy $\mathrm{e}^{-3k} = \frac{2,8}{8,3} \doteq 0,33735$. Logaritmováním snadno zjistíme, že $k \doteq 0,36221$.

Nyní potřebujeme odhadnout čas úmrtí. Ze zadání předpokládáme $y(t) = 37$ a najdeme příslušný čas t, tj.

$$18,3 + 8,3 \mathrm{e}^{-0,36221t} = 37,$$

tedy ihned $t \doteq -2,24254$. Dle dostupných informací smrt nastala přibližně před dvěma a čtvrt hodinou, tj. cca v 11:13. ▲

Příklad 1.3.20.

V nádrži vody je jisté počáteční množství nečistot. Do nádrže začneme napouštět čistou vodu, která se smísí s vodou znečištěnou a poté výsledná směs odtéká stejnou rychlostí, jakou přitéká čistá voda. Sestavte diferenciální rovnici popisující časový vývoj množství nečistot v nádrži. Poté výsledný model modifikujte předpokladem, že v přitékající vodě je přítomno konstantní množství nečistot.

Řešení. Nejprve označíme veličiny, se které jsou k dispozici a které budeme studovat, tedy

$y = y(t)$	$\dots$	množství nečistot v nádrži v čase t
$V \in \mathbb{R}$	$\dots$	objem vody v nádrži
$r \in \mathbb{R}$	$\dots$	rychlost přítoku a odtoku vody,
		tj. množství vody vyměněné v nádrži za jednotku času.

Ihned vidíme, že při tomto značení je změna množství znečistot v čase rovna derivaci funkce y podle času, tedy $y'(t)$ je množství nečistot, které je vyplaveno za jednotku času. Toto množství ale lze vypočítat také jako rychlost toku r krát koncentrace nečistot ve směsi, která odtéká z nádrže, tedy $y(t)/V$. Vzhledem k tomu, že jde o odtok nečistot, je samozřejmě rychlost změny záporná a výsledná rovnice má proto tvar

$$y'(t) = -\frac{r}{V}\, y(t).$$

Uvažujeme-li nenulové množství nečistot na přítoku, je nutné toto množství ke změně nečistot přičíst, rovnice se tedy změní na

$$y'(t) = -\frac{r}{V}\, y(t) + P,$$

kde $P \in \mathbb{R}$ je množství nečistot, které přiteče do nádrže za jednotku času. ▲

Příklad 1.3.21.

Do těla pacienta je konstantní rychlostí dodávan lék pomocí infuze. Tělo pacienta odbourává lék rychlostí, která je úměrná koncentraci léku v krvi. Sestavte diferenciální rovnici popisující koncentraci léku v krvi pacienta.

Řešení. Jedná se o podobnou situaci jako v příkladu 1.3.20. Označíme

$y = y(t)$	...	koncentrace léku v těle v čase t
$V \in \mathbb{R}$	...	celkový objem krve pacienta
$P \in \mathbb{R}$	...	rychlost dodávání léku v infuzi
$k \in \mathbb{R}$	...	konstanta úměrnosti specifická pro daný lék
$L = L(t)$	...	množství léku v těle v čase t

Koncentrace léku v těle je tedy $y(t) = L(t)/V$, odtud $L(t) = Vy(t)$. Změna koncentrace je proto

$$L'(t) = Vy'(t). \tag{1.3.1}$$

Nyní se znovu zaměříme se na změnu množství léku v čase, tedy na L' a provedeme stejnou úvahu jako v příkladu 1.3.20, kde rychlost dodávání léku v infuzi odpovídá nečistotě v přitékající vodě. Zjistíme, že

$$L'(t) = P - ky(t). \tag{1.3.2}$$

Dáme-li dohromady obdržené rovnice (1.3.1) a (1.3.2) obdržíme jednoduchou úpravou výslednou rovnici

$$\begin{aligned} Vy'(t) &= P - ky(t), \\ y'(t) &= \frac{P}{V} - \frac{k}{V}y(t). \end{aligned}$$

▲

I. 4. Bernoulliova diferenciální rovnice

Definice 1.4.1.

Rovnice ve tvaru

$$y' + f(x)y = g(x)y^n, \quad n \neq 0,\ n \neq 1,\ n \in \mathbb{R}.$$

se nazývá *Bernoulliova rovnice*.

Poznámka 1.4.2. Při řešení Bernoulliovy rovnice ji nejdříve vydělíme členem y^n (pro n>0 je také $y = 0$ jejím řešením). Zavedením substituce $z = y^{1-n}$ obdržíme LDR 1. řádu

$$z' = (1-n)\left[g(x) - f(x)z\right],$$

kterou již vyřešíme dříve uvedeným postupem.

Příklad 1.4.1.

Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{y^3}{x^3}.$$

Řešení. Jedná se o Bernoulliovu rovnici s $n = 3$. Rovnici nejdříve upravíme tak, aby na pravé straně rovnice nebylo žádné y, tj. za předpokladu $y \not\equiv 0$ podělíme výrazem y^3. Pak dostáváme

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{xy^2} = \frac{1}{x^3}.$$

Nyní zavedeme substituci $z = \frac{1}{y^2}$. Potom $z' = -\frac{2y'}{y^3}$, z čehož dostaneme diferenciální rovnici

$$z' = \frac{4z}{x} - \frac{2}{x^3}.$$

Toto je již lineární diferenciální rovnice, jejíž řešením (určeným pomocí některé z metod z Kapitoly I. 3) je funkce

$$z = Cx^4 + \frac{1}{3x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Zpětným dosazením obdržíme obecné řešení původní diferenciální rovnice

$$y^2 = \frac{3x^2}{3Cx^6 + 1}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

což ještě můžeme upravit do tvaru

$$y = \pm\frac{3x}{\sqrt{9Cx^6 + 3}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Během výpočtu jsme také vyloučili funkci $y \equiv 0$, která je řešením zadané diferenciální rovnice (jak se lze snadno přesvědčit přímým dosazením). Ovšem toto řešení není zahrnuto v obecném řešení (nelze jej získat žádnou volbou konstanty C), proto všechna řešení zadané diferenciální rovnice jsou

$$y \equiv 0 \quad \text{a} \quad y = \pm\frac{3x}{\sqrt{9Cx^6 + 3}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.4.2.

Řešte následující rovnici

$$y' + y = x\sqrt{y}.$$

Řešení. Rovnici vynásobíme $y^{-\frac{1}{2}}$ (za předpokladu $y \neq 0$) a dostaneme

$$y'y^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} = x.$$

Vidíme, že funkce $y(x) = 0$ je řešením rovnice, proto ho musíme na závěr zohlednit. Dále použijeme substituci

$$z = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}, \quad z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'.$$

Odtud

$$2z' + z = x.$$

Integrační faktor je $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, proto

$$\begin{aligned}
z' + \frac{1}{2}z &= \frac{x}{2} \quad / \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \\
z'\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}z\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} &= \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \\
\left(z\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)' &= \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \\
z\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} &= \int \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \frac{x}{2} & u' = \frac{1}{2} \\ v' = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} & v = 2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \end{vmatrix} = \\
&= x\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \int \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + c \\
z &= x - 2 + c\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

Tedy řešením rovnice je

$$y = 0, \quad \sqrt{y} = x - 2 + C\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.4.3.

Řešte následující rovnici

$$y' + \frac{2y}{x} = -x^4 \,\mathrm{e}^x\, y^3.$$

Řešení. Rovnici vydělíme y^3 za předpokladu nenulovosti. Avšak $y = 0$ je řešením rovnice, proto jej musíme na závěr zohlednit. Na upravenou rovnici

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{xy^2} = -x^4 \,\mathrm{e}^x$$

aplikujeme Bernoulliovu substituci

$$z = y^{-2}, z' = -2y^{-3}y'.$$

Dostaneme tak lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}z' + \frac{2}{x}z &= -x^4 \,\mathrm{e}^x \qquad / \cdot (-2) \\ z' - \frac{4}{x}z &= 2x^4 \,\mathrm{e}^x, \end{aligned}$$

kterou vyřešíme pomocí integračního faktoru $\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-4\ln|x|} = \frac{1}{|x|^4}$

$$\begin{aligned} \frac{z'}{x^4} - 4\frac{z}{x^5} &= 2\,\mathrm{e}^x \\ \left(\frac{z}{x^4}\right)' &= 2\,\mathrm{e}^x \\ \frac{z}{x^4} &= 2\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{e}^x + c \\ z &= x^4(2\,\mathrm{e}^x + c). \end{aligned}$$

Tedy řešením rovnice jsou funkce

$$y = 0, \quad x^4(2\,\mathrm{e}^x + C)y^2 = 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.4.4.

Řešte následující rovnici

$$y' - 2xy = 2x^3y^2.$$

Řešení. Rovnici upravíme (pro $y \neq 0$, což je řešení, které na závěr zohledníme)

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2x}{y} = 2x^3$$

a substitucí $z = y^{-1}, z' = -y^{-2}y'$ převedeme na

$$z' + 2xz = -2x^3.$$

Integračním faktorem $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int 2x\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x^2}$ vyřešíme

$$\begin{aligned}
z'\,\mathrm{e}^{x^2} + 2xz\,\mathrm{e}^{x^2} &= -2x^3\,\mathrm{e}^{x^2} \\
\left(z\,\mathrm{e}^{x^2}\right)' &= -2x^3\,\mathrm{e}^{x^2} \\
z\,\mathrm{e}^{x^2} - 2\int x^3\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} t = x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \\
&= -\int t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = t & u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^t & v = \mathrm{e}^t \end{vmatrix} = \\
&= -t\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t + c = (1 - x^2)\,\mathrm{e}^{x^2} + c \\
z &= 1 - x^2 + c\,\mathrm{e}^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Tedy řešním rovnice jsou funkce

$$y = 0, \quad y = \left(1 - x^2 + C\,\mathrm{e}^{-x^2}\right)^{-1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.4.5.

Řešte následující rovnici

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Řešení. Upravíme za předpokladu $y \neq 0$ (což je řešení, které na závěr zohledníme)

$$\frac{xy'}{y^2} + \frac{1}{y} = \ln x.$$

Substitucí $z = \frac{1}{y}$, $z' = -\frac{y'}{y^2}$ dostaneme

$$\begin{aligned} -z'x + z &= \ln x \quad \Big/ : (-x) \\ z' - \frac{z}{x} &= -\frac{\ln x}{x}. \end{aligned}$$

Integrační faktor je $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\ln|x|} = x^{-1}$, proto

$$\begin{aligned} z'x^{-1} - zx^{-2} &= -\frac{\ln x}{x^2} \\ \left(zx^{-1}\right)' &= -\frac{\ln x}{x^2} \\ zx^{-1} &= -\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c \\ z &= 1 + \ln x + cx. \end{aligned}$$

Řešením jsou funkce

$$y = 0, \quad y(1 + \ln x + Cx) = 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.4.6.

Řešte následující rovnici

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}.$$

Řešení. Pro $y \neq 0$ (což je řešení, které na závěr zohledníme) lze psát

$$y'y^{-\frac{1}{2}} + \frac{xy^{\frac{1}{2}}}{1-x^2} = x$$

a substitucí $z = y^{\frac{1}{2}}, z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$ dostaneme

$$\begin{aligned} 2z' + \frac{xz}{1-x^2} &= x \\ z' + \frac{xz}{2(1-x^2)} &= \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Integračním faktorem $\mu(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\ln|1-x^2|} = (1-x^2)^{-\frac{1}{4}}$ převedeme na rovnici

$$\begin{aligned} z'(1-x^2)^{-\frac{1}{4}} + \frac{xz}{(1-x^2)^{\frac{5}{4}}} &= \frac{x}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \\ \left(z(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}\right)' &= \frac{x}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \\ z(1-x^2)^{-\frac{1}{4}} &= \int \frac{x}{2\sqrt[4]{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = 1-x^2 \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \\ &= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt[4]{t}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} = \\ &= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}} + c \\ z &= c\sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1-x^2}{3}. \end{aligned}$$

Tedy řešením jsou funkce

$$y = 0, \quad y = \left(C\sqrt[4]{1-x^2} - \tfrac{1-x^2}{3}\right)^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

▲

Příklad 1.4.7.

Řešte následující rovnici

$$y' - \frac{xy}{2(x^2-1)} = \frac{x}{2y}.$$

Řešení. Rovnici vynásobíme y a dostaneme

$$y'y - \frac{xy^2}{2(x^2-1)} = \frac{x}{2},$$

kterou substitucí $z = y^2, z' = 2yy'$ převedeme na rovnici

$$\begin{aligned} \frac{z'}{2} - \frac{xz}{2(x^2-1)} &= \frac{x}{2} \qquad / \cdot 2 \\ z' - \frac{xz}{x^2-1} &= x \end{aligned}$$

s integračním faktorem $\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln|x^2-1|} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\begin{aligned} \frac{z'}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{xz}{(x^2-1)^{3/2}} &= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \\ \left(\frac{z}{\sqrt{x^2-1}}\right)' &= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = x^2-1 \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = \\ &= \sqrt{x^2-1} + c \\ z &= x^2 - 1 + c\sqrt{x^2-1}. \end{aligned}$$

Řešením je funkce

$$y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{x^2-1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.4.8.

Řešte následující rovnici

$$y' - xy = -y^3\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Řešení. Za předpokladu nenulovosti rovnici vydělíme y^3 (přičemž $y = 0$ je řešení, které na závěr zohledníme)

$$\frac{y'}{y^3} - \frac{x}{y^2} = -\,\mathrm{e}^{x^2}$$

a substitucí $z = y^{-2}, z' = -2y^{-3}y'$ převedeme na rovnici

$$z' + 2zx = 2\,\mathrm{e}^{-x^2},$$

kterou řešíme pomocí integračního faktoru $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int 2x\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x^2}$

$$\begin{aligned} z'\,\mathrm{e}^{x^2} + 2xz\,\mathrm{e}^{x^2} &= 2 \\ \left(z\,\mathrm{e}^{x^2}\right)' &= 2 \\ z\,\mathrm{e}^{x^2} &= \int 2\,\mathrm{d}x = 2x + c \\ z &= (2x + c)\,\mathrm{e}^{-x^2}. \end{aligned}$$

Řešením jsou funkce

$$y = 0, \quad y^2 = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.4.9.

Řešte následující rovnici

$$3x^2y' + xy = y^{-2}.$$

Řešení. Vynásobením y^2 a vydělením $3x^2$ dostaneme

$$y'y^2 + \frac{y^3}{3x} = \frac{1}{3x^2}.$$

Substituce $z = y^3, z' = 3y^2y'$ vede na rovnici

$$z' + \frac{z}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Příslušný integrační faktor je $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln|x|} = |x| = \pm x$. Odtud máme dvě rovnice $z'x + z = \frac{1}{x}$ a $-z'x - z = -\frac{1}{x}$, které splynou v rovnici

$$\begin{aligned} (zx)' &= \frac{1}{x} \\ zx &= \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \\ z &= \frac{\ln|x| + c}{x}. \end{aligned}$$

Řešením je funkce

$$y^3 = \frac{\ln|x| + C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.4.10.

Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$$

Řešení. Za předpokladu nenulovosti rovnici vydělíme $\sqrt{y}$ (přičemž $y = 0$ je řešení, které na závěr zohledníme)

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Substituce $z = \sqrt{y}, z' = \frac{1}{2\sqrt{y}}y'$ vede na rovnici

$$\begin{aligned} 2z' - \frac{4}{x}z &= x \quad \Big/ : 2 \\ z' - \frac{2}{x}z &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

s integračním faktorem $\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2\ln|x|} = x^{-2}$

$$\begin{aligned} z'x^{-2} - 2x^{-3}z &= \frac{1}{2x} \\ \left(zx^{-2}\right)' &= \frac{1}{2x} \\ zx^{-2} &= \int \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x| + c \\ z &= x^2(\ln\sqrt{|x|} + c). \end{aligned}$$

Řešením jsou funkce

$$y = 0, \quad y = x^4\left(\ln\sqrt{|x|} + C\right)^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.4.11.

Řešte následující rovnici

$$y\,\mathrm{d}y = \left(\frac{ay^2}{x^2} + \frac{b}{x^2}\right)\mathrm{d}x, \quad a \neq 0.$$

Řešení. Rovnici upravíme

$$yy' - \frac{ay^2}{x^2} = \frac{b}{x^2}$$

a zavedeme substituci $z = y^2, z' = 2yy'$

$$\begin{aligned} \frac{z'}{2} - \frac{az}{x^2} &= \frac{b}{x^2} \quad \Big/ \cdot 2 \\ z' - \frac{2az}{x^2} &= \frac{2b}{x^2} \end{aligned}$$

s integračním faktorem $\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int \frac{2a}{x^2}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\frac{2a}{x}}$

$$\begin{aligned} z'\,\mathrm{e}^{\frac{2a}{x}} - \frac{2az}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{2a}{x}} &= \frac{2b}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{2a}{x}} \\ \left(z\,\mathrm{e}^{\frac{2a}{x}}\right)' &= \frac{2b}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{2a}{x}} \\ z\,\mathrm{e}^{\frac{2a}{x}} &= 2b\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{2a}{x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = \frac{2a}{x} \\ \mathrm{d}t = -\frac{2a}{x^2}\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \\ &= -\frac{2b}{2a}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -\frac{b}{a}\,\mathrm{e}^{\frac{2a}{x}} + c \\ z &= -\frac{b}{a} + c\,\mathrm{e}^{-\frac{2a}{x}}. \end{aligned}$$

Řešením je funkce

$$y^2 + \frac{b}{a} = C\,\mathrm{e}^{-\frac{2a}{x}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

▲

Příklad 1.4.12.

Řešte následující rovnici

$$xy' + 2y + x^5 y^3 \,\mathrm{e}^x = 0.$$

Řešení. Za předpokladu nenulovosti rovnici vydělíme xy^3 (přičemž $y = 0$ je řešení, které na závěr zohledníme)

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{xy^2} = -x^4 \,\mathrm{e}^x .$$

Substituce $z = y^{-2}, z' = -2y^{-3}y'$ vede na rovnici

$$\begin{aligned} z' &= -2 \left(-x^4 \,\mathrm{e}^x - \frac{2z}{x} \right) \\ z' &= 2x^4 \,\mathrm{e}^x + \frac{4z}{x} \end{aligned}$$

s integračním faktorem $\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-4\ln|x|} = x^{-4}$

$$\begin{aligned} z'x^{-4} - 4x^{-5}z &= 2\,\mathrm{e}^x \\ \left(zx^{-4}\right)' &= 2\,\mathrm{e}^x \\ zx^{-4} &= 2\,\mathrm{e}^x + c \\ z &= x^4(2\,\mathrm{e}^x + c). \end{aligned}$$

Řešením jsou funkce

$$y = 0, \quad \frac{1}{y^2} = x^4(2\,\mathrm{e}^x + c), \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.4.13.

Řešte následující rovnici

$$y' - \frac{y}{x} = y^2 \sin x.$$

Řešení. Za předpokladu nenulovosti rovnici vydělíme y^2 (přičemž $y = 0$ je řešení, které na závěr zohledníme)

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy} = \sin x.$$

Substituce $z = y^{-1}, z' = -y^{-2}y'$ vede na rovnici

$$\begin{aligned} z' &= -\left(\frac{z}{x} + \sin x\right) \\ z' + \frac{z}{x} &= -\sin x \end{aligned}$$

s integračním faktorem $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\ln|x|} = x$

$$\begin{aligned} z'x + z &= -x \sin x \\ (zx)' &= -x \sin x \\ zx &= x \cos x - \sin x + c \\ z &= \cos x - \frac{\sin x}{x} + \frac{c}{x}. \end{aligned}$$

Řešením jsou funkce

$$y = 0, \quad \frac{1}{y} = \frac{C}{x} + \cos x - \frac{\sin x}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

I. 5. Metoda záměny proměnných při řešení diferenciálních rovnic

Poznámka 1.5.1. U diferenciálních rovnic 1. řádu, v nichž se proměnná x vyskytuje pouze v první mocnině a hledaná funkce y se vyskytuje v argumentu elementárních funkcí, je možné užít tzv. *metodu záměny proměnných*. Pak hledáme řešení ve tvaru $x(y)$ a rovnici převedeme na některou z těch, jejíž řešení umíme explicitně určit.

Příklad 1.5.1.

Vyřešme diferenciální rovnici

$$y\,\mathrm{d}y - (x + y^2 \sin y)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Řešení. Jednoduchou úpravou dostaneme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{y}{x + y^2 \sin y},$$

která ovšem neodpovídá žádnému z předchozích typů. Záměnou proměnných dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} + y \sin y,$$

což je lineární diferenciální rovnice. S použitím některé z metod z Kapitoly I. 3 dostaneme řešení

$$x = -y \cos y + Cy, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.5.2.

Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{1}{2x - y^2}.$$

Řešení. Záměnou proměnných dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{2x - y^2}, \quad \text{tj.} \quad x' = 2x - y^2,$$

kterou vyřešíme použitím některé z metod z Kapitoly I. 3. Dostaneme řešení

$$x = \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4} + C\,\mathrm{e}^{2y}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.5.3.

Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}.$$

Řešení. Záměnou proměnných dostaneme diferenciální rovnici

$$x' = 2 \ln y + 1 - \frac{x}{y},$$

kterou vyřešíme použitím některé z metod z Kapitoly I. 3. Dostaneme řešení

$$x = y \ln y + \frac{C}{y}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.5.4.

Řešte následující rovnici

$$y' = \left(\mathrm{e}^{-y} - x\right)^{-1}.$$

Řešení. Záměnou proměnných dostaneme diferenciální rovnici

$$x' = \mathrm{e}^{-y} - x,$$

kterou vyřešíme použitím některé z metod z Kapitoly I. 3. Dostaneme řešení

$$x = (C + y)\,\mathrm{e}^{-y}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.5.5.

Řešte následující rovnici

$$(x+y)\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x + y\ln y\,\mathrm{d}y.$$

Řešení. Jednoduchou úpravou dostaneme diferenciální rovnici

$$(x+y-y\ln y)\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x,$$

tedy

$$\frac{x}{y} + 1 - \ln y = x',$$

kterou vyřešíme použitím některé z metod z Kapitoly I. 3. Dostaneme řešení

$$x = y\ln y - \frac{y\ln^2 y}{2} + Cy, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.5.6.

Řešte následující rovnici

$$x\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)\mathrm{d}y.$$

Řešení. Jednoduchou úpravou dostaneme diferenciální rovnici

$$x' = \frac{x}{y} - \frac{y^3}{x},$$

tedy

$$xx' - \frac{x^2}{y} = -y^3,$$

kterou vyřešíme použitím substituce $z = x^2$. Dostaneme řešení

$$x^2 + y^2(y^2 - C) = 0, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.5.7.

Řešte následující rovnici

$$2y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 2y^3\mathrm{d}y.$$

Řešení. Jednoduchou úpravou dostaneme diferenciální rovnici

$$x' = \frac{2y^3 - x}{2y},$$

tedy

$$x' + \frac{x}{2y} = y^2,$$

kterou vyřešíme použitím některé z metod z Kapitoly I. 3. Dostaneme řešení

$$x = \frac{2}{7}y^3 + \frac{C}{\sqrt{y}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

I. 6. Exaktní diferenciální rovnice

Definice 1.6.1.

Diferenciální rovnice

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

se nazývá *exaktní diferenciální rovnice*, jestliže platí

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Poznámka 1.6.2. Řešením exaktní diferenciální rovnice je ve tvaru

$$F(x,y) = C,$$

kde F je tzv. *kmenová funkce* splňující následující identity

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y),$$

z čehož lze postupnou integrací získat řešení. Pro exaktní rovnici s počáteční hodnotou $y(x_0) = y_0$ lze psát

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\mathrm{d}t.$$

Poznámka 1.6.3. V některých případech je nutné rovnici $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ vynásobit tzv. *integračním faktorem*, aby byla exaktní. Integrační faktor může být tvaru $m(x)$ nebo $n(y)$, přičemž platí

$$\ln m(x) = \int \frac{M_y - N_x}{N}\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \ln n(y) = \int \frac{N_x - M_y}{M}\,\mathrm{d}y.$$

Příklad 1.6.1.

Vyřešme diferenciální rovnici

$$y(1+xy)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$$

Řešení. Tuto diferenciální rovnici budeme řešit jako exaktní. Položme proto $M(x,y) = y(1+xy)$ a $N(x,y) = -x$. Snadno se přesvědčíme, že $M_y(x,y) \neq N_x(x,y)$, což znamená, že musíme najít vhodný integrační faktor, který nám diferenciální rovnici převede na exaktní. Proto určíme

$$\ln n(y) = \int \frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)}\mathrm{d}y = -\ln y^2,$$

tj. hledaný integrační faktor je funkce $n(y) = \frac{1}{y^2}$. Vynásobením rovnice tímto výrazem dostaneme

$$\frac{1+xy}{y}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y = 0,$$

která již je exaktní s $M(x,y) = \frac{1}{y} + x$ a $N(x,y) = -\frac{x}{y^2}$. Při hledání integračního faktoru jsme také mohli druhý využít výše uvedený vzorec pro funkci $m(x)$, ale námi zvolený integrační faktor je jednodušší. Určíme tedy kmenovou funkci, tj.

$$F(x,y) = -\int \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{x}{y} + C(x).$$

Zbývá určit funkci $C(x)$. Zderivováním pravé strany a ze vztahu $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ obdržíme

$$C'(x) = x, \qquad \text{tj. } C(x) = \frac{x^2}{2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.6.2.

Řešte následující rovnici

$$(y^2-1)\mathrm{d}x+(2xy+3y)\mathrm{d}y=0.$$

Řešení. Máme $M(x,y)=y^2-1$ a $N(x,y)=2xy+3y$. Protože $M_y(x,y)=N_x(x,y)$, jde o exaktní rovnici. Určíme tedy kmenovou funkci, tj.

$$F(x,y)=\int y^2-1\,\mathrm{d}x=xy^2-x+C(y).$$

Zbývá určit funkci $C(y)$. Zderivováním pravé strany a ze vztahu $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$ obdržíme

$$C'(y)=3y,\qquad \text{tj. } C(y)=\frac{3}{2}y^2+C,\qquad C\in\mathbb{R}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$xy^2-x+\tfrac{3}{2}y^2=C,\qquad C\in\mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.6.3.

Řešte následující rovnici

$$2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Máme $M(x,y) = 2x$ a $N(x,y) = 2y$. Protože $M_y(x,y) = N_x(x,y)$, jde o exaktní rovnici. Určíme tedy kmenovou funkci, tj.

$$F(x,y) = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C(y).$$

Zbývá určit funkci $C(y)$. Zderivováním pravé strany a ze vztahu $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ obdržíme

$$C'(y) = 2y, \qquad \text{tj. } C(y) = y^2 + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$x^2 + y^2 = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.6.4.

Řešte následující rovnici

$$\frac{2\,\mathrm{e}^{2y}}{3\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x + 2\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Máme $M(x,y) = \frac{2\,\mathrm{e}^{2y}}{3\sqrt[3]{x}}$ a $N(x,y) = 2\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{e}^{2y}$. Protože $M_y(x,y) = N_x(x,y)$, jde o exaktní rovnici. Určíme tedy kmenovou funkci, tj.

$$F(x,y) = \int \frac{2\,\mathrm{e}^{2y}}{3\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2y}\,\sqrt[3]{x^2} + C(y).$$

Zbývá určit funkci $C(y)$. Zderivováním pravé strany a ze vztahu $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ obdržíme

$$C'(y) = 0, \qquad \text{tj. } C(y) = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$\mathrm{e}^{2y}\,\sqrt[3]{x^2} = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.6.5.

Řešte následující rovnici

$$(x\cos 2y + 1)\mathrm{d}x - x^2 \sin 2y \,\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Máme $M(x,y) = x\cos 2y + 1$ a $N(x,y) = -x^2 \sin 2y$. Protože $M_y(x,y) = N_x(x,y)$, jde o exaktní rovnici. Určíme tedy kmenovou funkci, tj.

$$F(x,y) = \int -x^2 \sin 2y \,\mathrm{d}y = \frac{x^2}{2}\cos 2y + C(x).$$

Zbývá určit funkci $C(x)$. Zderivováním pravé strany a ze vztahu $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ obdržíme

$$C'(x) = 1, \qquad \text{tj. } C(x) = x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$y = \frac{1}{2}\arccos\frac{2C - 2x}{x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.6.6.

Řešte následující rovnici

$$(\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x + 3x^2)\mathrm{d}x = (2 - x\,\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}y.$$

Řešení. Máme $M(x,y) = \mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x + 3x^2$ a $N(x,y) = -(2 - x\,\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x)$. Protože $M_y(x,y) = N_x(x,y)$, jde o exaktní rovnici. Určíme tedy kmenovou funkci, tj.

$$F(x,y) = \int \mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x + 3x^2\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x + x^3 + C(y).$$

Zbývá určit funkci $C(y)$. Zderivováním pravé strany a ze vztahu $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ obdržíme

$$C'(y) = -2, \qquad \text{tj. } C(y) = -2y + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$C = x\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x + x^3 - 2y, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.6.7.

Řešte následující rovnici

$$\sin y \, \mathrm{d}x + [(x+1)\cos y - y \sin y] \, \mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Máme $M(x,y) = \sin y$ a $N(x,y) = (x+1)\cos y - y \sin y$. Protože $M_y(x,y) = N_x(x,y)$, jde o exaktní rovnici. Určíme tedy kmenovou funkci, tj.

$$F(x,y) = \int \sin y \, \mathrm{d}x = x \sin y + C(y).$$

Zbývá určit funkci $C(y)$. Zderivováním pravé strany a ze vztahu $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ obdržíme

$$C'(y) = \cos y - y \sin y, \qquad \text{tj. } C(y) = y \cos y + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$C = x \sin x + y \cos y, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.6.8.

Řešte následující rovnici

$$\left(\frac{1}{y^2+1}-\frac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{x}-\frac{2xy}{(y^2+1)^2}\right)\mathrm{d}y=0.$$

Řešení. Máme $M(x,y)=\frac{1}{y^2+1}-\frac{y}{x^2}$ a $N(x,y)=\frac{1}{x}-\frac{2xy}{(y^2+1)^2}$. Protože $M_y(x,y)=N_x(x,y)$, jde o exaktní rovnici. Určíme tedy kmenovou funkci, tj.

$$F(x,y)=\int\frac{1}{y^2+1}-\frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{y^2+1}+\frac{y}{x}+C(y).$$

Zbývá určit funkci $C(y)$. Zderivováním pravé strany a ze vztahu $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$ obdržíme

$$C'(y)=0,\qquad \text{tj. } C(y)=C,\qquad C\in\mathbb{R}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$C=\frac{x}{y^2+1}+\frac{y}{x},\qquad C\in\mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.6.9.

Řešte následující rovnici

$$\left(\operatorname{arctg} y + \frac{1}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x + \frac{x}{1+y^2} \mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Máme $M(x,y) = \operatorname{arctg} y + \frac{1}{x^2+1}$ a $N(x,y) = \frac{x}{1+y^2}$. Protože $M_y(x,y) = N_x(x,y)$, jde o exaktní rovnici. Určíme tedy kmenovou funkci, tj.

$$F(x,y) = \int \operatorname{arctg} y + \frac{1}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} x + C(y).$$

Zbývá určit funkci $C(y)$. Zderivováním pravé strany a ze vztahu $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ obdržíme

$$C'(y) = 0, \qquad \text{tj. } C(y) = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$C = x \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.6.10.

Řešte následující rovnici

$$(2x\cos^2 y)\mathrm{d}x + (2y - x^2 \sin 2y)\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Máme $M(x,y) = 2x\cos^2 y$ a $N(x,y) = 2y - x^2 \sin 2y$. Protože $M_y(x,y) = N_x(x,y)$, jde o exaktní rovnici. Určíme tedy kmenovou funkci, tj.

$$F(x,y) = \int 2x\cos^2 y \,\mathrm{d}x = x^2\cos^2 y + C(y).$$

Zbývá určit funkci $C(y)$. Zderivováním pravé strany a ze vztahu $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ obdržíme

$$C'(y) = 2y, \qquad \text{tj. } C(y) = y^2 + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$y^2 + x^2\cos^2 y = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.6.11.

Pomocí integračního faktoru řešte následující rovnici

$$(x^2 - 3y^2)\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Máme $M(x,y) = x^2 - 3y^2$ a $N(x,y) = 2xy$. Protože $M_y(x,y) \neq N_x(x,y)$, nejde o exaktní rovnici, což znamená, že musíme najít vhodný integrační faktor, který nám diferenciální rovnici převede na exaktní. Proto určíme

$$\ln m(x) = \int \frac{-6y - 2y}{2xy}\mathrm{d}x = -4\ln|x|,$$

tj. hledaný integrační faktor je funkce $m(x) = \frac{1}{x^4}$. Vynásobením rovnice tímto výrazem dostaneme

$$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3y^2}{x^4}\right)\mathrm{d}x + \frac{2y}{x^3}\,\mathrm{d}y = 0,$$

která již je exaktní s $M(x,y) = \frac{1}{x^2} - \frac{3y^2}{x^4}$ a $N(x,y) = \frac{2y}{x^3}$, tj. $M_y(x,y) = N_x(x,y)$. Určíme tedy kmenovou funkci

$$F(x,y) = \int \frac{2y}{x^3}\,\mathrm{d}y = \frac{y^2}{x^3} + C(x).$$

Zbývá určit funkci $C(x)$. Zderivováním pravé strany a ze vztahu $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ obdržíme

$$C'(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad \text{tj. } C(x) = -\frac{1}{x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$y^2 = Cx^3 + x^2, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.6.12.

Pomocí integračního faktoru řešte následující rovnici

$$2xy\ln y\,\mathrm{d}x + \left(x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right)\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Máme $M(x,y) = 2xy\ln y$ a $N(x,y) = x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}$. Protože $M_y(x,y) \neq N_x(x,y)$, nejde o exaktní rovnici, což znamená, že musíme najít vhodný integrační faktor, který nám diferenciální rovnici převede na exaktní. Proto určíme

$$\ln n(y) = \int \frac{2x - 2x\ln y - 2x}{2xy\ln y}\mathrm{d}y = \ln\left|\frac{1}{y}\right|,$$

tj. hledaný integrační faktor je funkce $n(y) = \frac{1}{y}$. Vynásobením rovnice tímto výrazem dostaneme

$$2x\ln y\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}\right)\mathrm{d}y = 0,$$

která již je exaktní s $M(x,y) = 2x\ln y$ a $N(x,y) = \frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}$, tj. $M_y(x,y) = N_x(x,y)$. Určíme tedy kmenovou funkci

$$F(x,y) = \int 2x\ln y\,\mathrm{d}x = x^2\ln y + C(y).$$

Zbývá určit funkci $C(y)$. Zderivováním pravé strany a ze vztahu $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = N(x,y)$ obdržíme

$$C'(y) = y\sqrt{y^2+1}, \qquad \text{tj. } C(y) = \frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$C = x^2\ln y + \frac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{3/2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.6.13.

Pomocí integračního faktoru řešte následující rovnici

$$\left(\frac{6y}{x} - 6y^2\right) \mathrm{d}x + (3 - 4xy)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Máme $M(x,y) = \frac{6y}{x} - 6y^2$ a $N(x,y) = 3 - 4xy$. Protože $M_y(x,y) \neq N_x(x,y)$, nejde o exaktní rovnici, což znamená, že musíme najít vhodný integrační faktor, který nám diferenciální rovnici převede na exaktní. Proto určíme

$$\ln m(x) = \int \frac{\frac{6}{x} - 12y + 4y}{3 - 4xy} \mathrm{d}x = 2 \ln |x|,$$

tj. hledaný integrační faktor je funkce $m(x) = x^2$. Vynásobením rovnice tímto výrazem dostaneme

$$\left(6xy - 6x^2y^2\right) \mathrm{d}x + \left(3x^2 - 4x^3y\right) \mathrm{d}y = 0,$$

která již je exaktní s $M(x,y) = 6xy - 6x^2y^2$ a $N(x,y) = 3x^2 - 4x^3y$, tj. $M_y(x,y) = N_x(x,y)$. Určíme tedy kmenovou funkci

$$F(x,y) = \int 6xy - 6x^2y^2\,\mathrm{d}x = 3x^2y - 2x^3y^2 + C(y).$$

Zbývá určit funkci $C(y)$. Zderivováním pravé strany a ze vztahu $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ obdržíme

$$C'(y) = 0, \qquad \text{tj. } C(y) = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$C = 3x^2y - 2x^3y^2, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.6.14.

Pomocí integračního faktoru řešte následující rovnici

$$y\,\mathrm{d}x + \left(2xy - \mathrm{e}^{-2y}\right)\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Máme $M(x,y) = y$ a $N(x,y) = 2xy - \mathrm{e}^{-2y}$. Protože $M_y(x,y) \neq N_x(x,y)$, nejde o exaktní rovnici, což znamená, že musíme najít vhodný integrační faktor, který nám diferenciální rovnici převede na exaktní. Proto určíme

$$\ln n(y) = \int \frac{2y-1}{y}\mathrm{d}y = \ln\left|\frac{\mathrm{e}^{2y}}{y}\right|,$$

tj. hledaný integrační faktor je funkce $n(y) = \frac{\mathrm{e}^{2y}}{y}$. Vynásobením rovnice tímto výrazem dostaneme

$$\mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}x + \left(2x\,\mathrm{e}^{2y} - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = 0,$$

která již je exaktní s $M(x,y) = \mathrm{e}^{2y}$ a $N(x,y) = 2x\,\mathrm{e}^{2y} - \frac{1}{y}$, tj. $M_y(x,y) = N_x(x,y)$. Určíme tedy kmenovou funkci

$$F(x,y) = \int \mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^{2y} + C(y).$$

Zbývá určit funkci $C(y)$. Zderivováním pravé strany a ze vztahu $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = N(x,y)$ obdržíme

$$C'(y) = -\frac{1}{y}, \qquad \text{tj. } C(y) = -\ln|y| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$C = x\,\mathrm{e}^{2y} - \ln|y|, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

I. 7. Clairautova diferenciální rovnice

Definice 1.7.1.

Diferenciální rovnice ve tvaru
$$y = xy' + g(y')$$
se nazývá *Clairautova diferenciální rovnice.*

Poznámka 1.7.2. Při řešení nejdříve zavedeme substituci $y' = p$. Derivování podle x získáme
$$0 = \left(x + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$
Pokud $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$, pak $p = C$, $C \in \mathbb{R}$, tedy obecné řešení je tvaru
$$y = Cx + g(C).$$
Pokud $x + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p} = 0$, obdržíme parametrické řešení
$$x = -g'(p) \quad \& \quad y = -pg'(p) + g(p).$$

Příklad 1.7.1.

Vyřešme diferenciální rovnici

$$y = xy' + 2 + (y')^3$$

Řešení. Ze zadání je snadno vidět, že se jedná o Clairautovu diferenciální rovnici. Zavedeme proto substituci $y' = p$. Zderivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = xp' + p + 3p^2p'$$

což po úpravě dává

$$0 = \left(x + 3p^2\right) \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

Mohou tedy nastat dvě možnosti:

- buď $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$, pak $p = C$ pro $C \in \mathbb{R}$ a máme obecné řešení zadané rovnice ve tvaru

$$y = Cx + 2 + C^3, \qquad C \in \mathbb{R},$$

- nebo $x + 3p^2 = 0$, což dává další řešení, které je vyjádřené parametricky jako

$$x = -3p^2, \quad y = xp + 2 + p^3.$$

  Pokud se pokusíme vyloučit parametr (u Clairautových diferenciálních rovnic to je obvykle relativně snadné) dostaneme toto řešení explicitně

$$y = 2 + \frac{2}{9}x\sqrt{-3x}.$$

▲

Příklad 1.7.2.

Řešte následující rovnici

$$y = xy' + (y')^2.$$

Řešení. Zavedeme substituci $y' = p$. Zderivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = p + xp' + 2pp'$$

což po úpravě dává

$$0 = \left(x + 2p\right) \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

Mohou tedy nastat dvě možnosti:

- buď $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$, pak $p = C$ pro $C \in \mathbb{R}$ a máme obecné řešení zadané rovnice ve tvaru

$$y = Cx + C^2, \qquad C \in \mathbb{R},$$

- nebo $x + 2p = 0$, což dává další řešení, které je vyjádřené parametricky jako

$$x = -2p, \quad y = -p^2.$$

  Pokud vyloučíme parametr dostaneme toto řešení explicitně

$$y = -\frac{x^2}{4}.$$

▲

Příklad 1.7.3.

Řešte následující rovnici

$$y = xy' + \sin y'.$$

Řešení. Zavedeme substituci $y' = p$. Zderivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = p + xp' + p' \cos p$$

což po úpravě dává

$$0 = \big(x + \cos p\big)\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

Mohou tedy nastat dvě možnosti:

- buď $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$, pak $p = C$ pro $C \in \mathbb{R}$ a máme obecné řešení zadané rovnice ve tvaru

$$y = Cx + \sin C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

- nebo $x + \cos p = 0$, což dává další řešení, které je vyjádřené parametricky jako

$$x = -\cos p, \quad y = -p \cos p + \sin p.$$

Pokud vyloučíme parametr dostaneme toto řešení explicitně

$$y = (\pi - \arccos x)x + \sqrt{1 - x^2}.$$

▲

Příklad 1.7.4.

Řešte následující rovnici

$$xy' - y = \ln y'.$$

Řešení. Zavedeme substituci $y' = p$. Zderivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = p + xp' + \frac{p'}{p}$$

což po úpravě dává

$$0 = \left(x - \frac{1}{p}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

Mohou tedy nastat dvě možnosti:

- buď $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$, pak $p = C$ pro $C \in \mathbb{R}$ a máme obecné řešení zadané rovnice ve tvaru

$$y = Cx - \ln C, \qquad C > 0,$$

- nebo $x - \frac{1}{p} = 0$, což dává další řešení, které je vyjádřené parametricky jako

$$x = \frac{1}{p}, \quad y = 1 - \ln p.$$

Pokud vyloučíme parametr dostaneme toto řešení explicitně

$$y = 1 + \ln x.$$

▲

Příklad 1.7.5.

Řešte následující rovnici

$$y = xy' + \frac{1}{2y'}.$$

Řešení. Zavedeme substituci $y' = p$. Zderivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = p + xp' - \frac{p'}{2p^2}$$

což po úpravě dává

$$0 = \left(x - \frac{1}{2p^2}\right) \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

Mohou tedy nastat dvě možnosti:

- buď $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$, pak $p = C$ pro $C \in \mathbb{R}$ a máme obecné řešení zadané rovnice ve tvaru

$$y = Cx + \frac{1}{2C}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

- nebo $x - \frac{1}{2p^2} = 0$, což dává další řešení, které je vyjádřené parametricky jako

$$x = \frac{1}{2p^2}, \quad y = \frac{1}{p}.$$

Pokud vyloučíme parametr dostaneme toto řešení jako

$$y^2 = 2x.$$

▲

Příklad 1.7.6.

Řešte následující rovnici

$$y = xy' + y' + e^{y'}.$$

Řešení. Zavedeme substituci $y' = p$. Zderivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = p + xp' + p' + p' e^p$$

což po úpravě dává

$$0 = (x + 1 + e^p)\,\frac{dp}{dx}.$$

Mohou tedy nastat dvě možnosti:

- buď $\frac{dp}{dx} = 0$, pak $p = C$ pro $C \in \mathbb{R}$ a máme obecné řešení zadané rovnice ve tvaru

$$y = Cx + C + e^C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

- nebo $x + 1 + e^p = 0$, což dává další řešení, které je vyjádřené parametricky jako

$$x = -1 - e^p, \quad y = e^p(1 - p).$$

  Pokud vyloučíme parametr dostaneme toto řešení jako

$$y = (x + 1)\ln(-1 - x) - x - 1.$$

▲

Příklad 1.7.7.

Řešte následující rovnici

$$y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}, \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

Řešení. Zavedeme substituci $y' = p$. Zderivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = p + xp' - a\frac{1}{2}(1 + p^2)^{-\frac{1}{2}}2pp'$$

což po úpravě dává

$$0 = \left(x - \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

Mohou tedy nastat dvě možnosti:

- buď $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$, pak $p = C$ pro $C \in \mathbb{R}$ a máme obecné řešení zadané rovnice ve tvaru

$$y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

- nebo $x - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = 0$, což dává další řešení, které je vyjádřené parametricky jako

$$x = \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad y = \frac{ap^2}{\sqrt{1 + p^2}} - a\sqrt{1 + p^2}.$$

  Pokud vyloučíme parametr dostaneme toto řešení jako

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

▲

Příklad 1.7.8.

Řešte následující rovnici

$$y = xy' - 3y'^3.$$

Řešení. Zavedeme substituci $y' = p$. Zderivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = p + xp' - 9p^2p'$$

což po úpravě dává

$$0 = \left(x - 9p^2\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

Mohou tedy nastat dvě možnosti:

- buď $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$, pak $p = C$ pro $C \in \mathbb{R}$ a máme obecné řešení zadané rovnice ve tvaru

$$y = Cx - 3C^3, \qquad C \in \mathbb{R},$$

- nebo $x - 9p^2 = 0$, což dává další řešení, které je vyjádřené parametricky jako

$$x = 9p^2, \quad y = 9p^3 - 3p^3.$$

Pokud vyloučíme parametr dostaneme toto řešení jako

$$y = \pm\tfrac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}.$$

▲

I. 8. Lagrangeova diferenciální rovnice

Definice 1.8.1.

Lagrangeova diferenciální rovnice (nebo též *d'Alembertova diferenciální rovnice*, případně *Lagrangeova–d'Alembertova diferenciální rovnice*) je diferenciální rovnice ve tvaru

$$y = f(y')x + g(y').$$

Poznámka 1.8.2. Při řešení nejdříve zavedeme substituci $y' = p$. Derivování podle x získáme

$$p = f(p) + \left[xf'(p) + g'(p)\right]\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \quad \text{tj.} \quad p - f(p) = \left[xf'(p) + g'(p)\right]\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

Pokud $x \neq f(p)$, pak

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{f'(p)}{p - f(p)}x + \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

je LDR 1. řádu. Řešení Lagrangeovy rovnice je potom popsáno parametricky rovnicemi

$$x = \varphi(p), \quad y = f(p)\varphi(p) + g(p).$$

Pokud pro nějaké hodnoty p_0 platí $p_0 = f(p_0)$, je funkce $y = xf(p_0) + g(p_0)$ také řešením Lagrangeovy rovnice.

Příklad 1.8.1.

Vyřešme diferenciální rovnici

$$y = 2xy' - (y')^3$$

Řešení. Jedná se o Lagrangeovu diferenciální rovnici, proto zavedeme substituci $y' = p$ a derivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = 2p + 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - 3p^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}.$$

Kterou za předpokladu $p \not\equiv 0$ můžeme přepsat jako lineární diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2x}{p} = 3p^3,$$

jejímž řešením bude funkce x v proměnné p. Řešením této lineární rovnice je funkce

$$x = \frac{3}{4}p^2 + \frac{C}{p^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Pokud toto vyjádření dosadíme do vztahu $y = 2xp - p^3$, dostaneme obecné řešení zadané diferenciální rovnice vyjádřené parametricky

$$x = \frac{3}{4}p^2 + \frac{C}{p^2} \quad \& \quad y = \frac{p^3}{2} + \frac{2C}{p}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Volba $p \equiv 0$ odpovídá $y = C$, což po dosazení do zadání dává, že nutně $C = 0$. Máme tedy ještě partikulární řešení $y \equiv 0$, které není zahrnuto do obecného řešení. Poznamenejme ještě, že tentokrát již není tak snadné vyloučit parametr p. Nicméně to možné je (ale potřebná metoda značně překračuje rámec tohoto textu) a obecné řešení lze vyjádřit v implicitní podobě

$$(27y^2 - 16x^3)y^2 + 16x(9y^2 - 4x^3)C - 128x^2C^2 - 64C^3 = 0.$$

▲

Příklad 1.8.2.

Řešte následující rovnici

$$y = x(y')^2 + (y')^3.$$

Řešení. Zavedeme substituci $y' = p$ a derivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = p^2 + 2pp'x + 3p^2p',$$

tedy

$$p(1-p) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}(2px + 3p^2).$$

Za předpokladu $p \not\equiv 0, p \not\equiv 1$ můžeme rovnici přepsat jako

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - \frac{2x}{1-p} = \frac{3p}{1-p},$$

jejímž řešením bude funkce x v proměnné p. Řešením této lineární rovnice je funkce

$$x = \frac{\frac{3p^2}{2} - p^3 + C}{(1-p)^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Pokud toto vyjádření dosadíme do vztahu $y = xp^2 + p^3$, dostaneme obecné řešení zadané diferenciální rovnice vyjádřené parametricky

$$x = \frac{\frac{3p^2}{2} - p^3 + C}{(1-p)^2} \;\&\; y = \frac{p^2}{(1-p)^2}\left(C + p - \frac{p^2}{2}\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Volba $p \equiv 0$ odpovídá $y = C$, což po dosazení do zadání dává, že nutně $C = 0$. Máme tedy ještě partikulární řešení $y \equiv 0$, které není zahrnuto do obecného řešení. Volba $p \equiv 1$ odpovídá $y = x + C$, což po dosazení do zadání dává $C = 1$. Máme tedy ještě partikulární řešení $y = x + 1$, které také není zahrnuto do obecného řešení. Celkem

$$y = 0,\ y = x + 1,\ x = \frac{\frac{3p^2}{2} - p^3 + C}{(1-p)^2} \;\&\; y = \frac{p^2}{(1-p)^2}\left(C + p - \frac{p^2}{2}\right),\ C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.8.3.

Řešte následující rovnici

$$y = x(1 + y') + (y')^2.$$

Řešení. Zavedeme substituci $y' = p$ a derivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = 1 + p + p'x + 2pp',$$

tedy

$$-x - 2p = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}.$$

Rovnici můžeme přepsat jako

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + x = -2p,$$

jejímž řešením bude funkce x v proměnné p. Řešením této lineární rovnice je funkce

$$x = -2p + 2 + C\,\mathrm{e}^{-p}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Pokud toto vyjádření dosadíme do vztahu $y = x(1 + p) + p^2$, dostaneme obecné řešení zadané diferenciální rovnice vyjádřené parametricky

$$x = -2p + 2 + C\,\mathrm{e}^{-p} \;\&\; y = C\,\mathrm{e}^{-p}(1 + p) + 2 - p^2, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.8.4.

Řešte následující rovnici

$$y = 2xy' + \ln y'.$$

Řešení. Zavedeme substituci $y' = p$ a derivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = 2p + 2p'x + \frac{p'}{p},$$

tedy

$$-p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = 2x + \frac{1}{p}.$$

Protože $p \not\equiv 0$, můžeme rovnici přepsat jako

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2x}{p} = -\frac{1}{p^2},$$

jejímž řešením bude funkce x v proměnné p. Řešením této lineární rovnice je funkce

$$x = -\frac{1}{p} + \frac{C}{p^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Pokud toto vyjádření dosadíme do vztahu $y = 2xp + \ln p$, dostaneme obecné řešení zadané diferenciální rovnice vyjádřené parametricky

$$x = -\frac{1}{p} + \frac{C}{p^2} \;\&\; y = -2 + \frac{2C}{p} + \ln p, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.8.5.

Řešte následující rovnici

$$y - (y')^2(x+1) = 0.$$

Řešení. Zavedeme substituci $y' = p$ a derivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = 2pp'x + p^2 + 2pp',$$

tedy

$$p(1-p) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}(2px + 2p).$$

Za předpokladu $p \not\equiv 0, p \not\equiv 1$ můžeme rovnici přepsat jako

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - \frac{2x}{1-p} = \frac{2}{1-p},$$

jejímž řešením bude funkce x v proměnné p. Řešením této lineární rovnice je funkce

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Pokud toto vyjádření dosadíme do vztahu $y = p^2(x+1)$, dostaneme obecné řešení zadané diferenciální rovnice vyjádřené parametricky

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1 \;\&\; y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Volba $p \equiv 0$ odpovídá $y = C$, což po dosazení do zadání dává, že nutně $C = 0$. Máme tedy ještě partikulární řešení $y \equiv 0$, které není zahrnuto do obecného řešení. Volba $p \equiv 1$ odpovídá $y = x + C$, což po dosazení do zadání dává $C = 1$. Máme tedy ještě partikulární řešení $y = x + 1$, které je zahrnuto do obecného řešení pro $C = 0$. Celkem

$$y = 0,\; x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1 \;\&\; y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.8.6.

Řešte následující rovnici

$$yy' = 2x(y')^2 + 1.$$

Řešení. Zavedeme substituci $y' = p$ a derivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = 2p + 2p'x - \frac{p'}{p^2},$$

tedy

$$-p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = 2x - \frac{1}{p^2}.$$

Protože $p \equiv 0$ nevyhovuje rovnici, můžeme rovnici přepsat jako

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2x}{p} = \frac{1}{p^3},$$

jejímž řešením bude funkce x v proměnné p. Řešením této lineární rovnice je funkce

$$x = \frac{\ln|p| + C}{p^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Pokud toto vyjádření dosadíme do vztahu $yp = 2xp^2 + 1$, dostaneme obecné řešení zadané diferenciální rovnice vyjádřené parametricky

$$x = \frac{\ln|p| + C}{p^2} \;\&\; y = 2\frac{\ln|p| + C}{p} + \frac{1}{p}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.8.7.

Řešte následující rovnici

$$2y(y' + 2) = xy'^2.$$

Řešení. Zavedeme substituci $y' = p$ a derivováním obou stran rovnice a úpravou dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{p+2}{x},$$

jejímž řešením bude funkce x v proměnné p. Řešením této rovnice je funkce

$$x = (p+2)C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Pokud toto vyjádření dosadíme do vztahu $2y(p+2) = xp^2$, dostaneme obecné řešení zadané diferenciální rovnice vyjádřené parametricky

$$x = (p+2)C \;\&\; y = \tfrac{Cp^2}{2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.8.8.

Řešte následující rovnici

$$y + xy'^3 + \sqrt{1 + y'^2} = 0.$$

Řešení. Zavedeme substituci $y' = p$ a derivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = -p^3 - 3p^2p'x - p'p(1 + p^2)^{-\frac{1}{2}},$$

tedy

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{-3xp}{1 + p^2} - \frac{1}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Řešením této lineární rovnice je funkce

$$x = \tfrac{C-p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Pokud toto vyjádření dosadíme do vztahu $y + xp^3 + \sqrt{1 + p^2}$, dostaneme obecné řešení zadané diferenciální rovnice vyjádřené parametricky

$$x = \tfrac{C-p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \ \&\ y = \tfrac{(p-C)p^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{1 + p^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.8.9.

Řešte následující rovnici

$$y = 2xy' - y'^2.$$

Řešení. Zavedeme substituci $y' = p$ a derivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = 2p + 2p'x - 2p'p,$$

tedy pro $p \not\equiv 0$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{2p - 2x}{p}.$$

Řešením této lineární rovnice je funkce

$$x = \tfrac{2}{3}p + \tfrac{C}{p^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Pokud toto vyjádření dosadíme do vztahu $y = 2xp - p^2$, dostaneme obecné řešení zadané diferenciální rovnice vyjádřené parametricky

$$x = \tfrac{2}{3}p + \tfrac{C}{p^2} \;\&\; y = \tfrac{2C}{p} + \tfrac{p^2}{3}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Volba $p \equiv 0$ odpovídá $y = C$, což po dosazení do zadání dává, že nutně $C = 0$. Máme tedy ještě partikulární řešení $y \equiv 0$, které není zahrnuto do obecného řešení. ▲

I. 9. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Definice 1.9.1.

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu má tvar

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

Pokud $f(x) \equiv 0$ je rovnice *homogenní*, v opačném případě je rovnice *nehomogenní*.

Poznámka 1.9.2. Nejdříve musíme učit řešení homogenní části. K tomu potřebujeme spočítat kořeny *charakteristického polynomu*

$$\lambda^n + a_1\, \lambda^{n-1} + a_2\, \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Každému k-násobnému reálnému kořenu odpovídá k partikulárních řešení ve tvaru

$$\mathrm{e}^{\lambda x},\ x\, \mathrm{e}^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{k-1}\, \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Každé k-násobné dvojici komplexních kořenů $\lambda = \alpha + i\beta$ odpovídá k dvojic partikulárních řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x,\ x\, \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}\, \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x, \\ &\mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x,\ x\, \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}\, \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned}$$

Řešení homogenní rovnice je potom součtem jednotlivých partikulárních řešení, tj.

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

kde $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty. Řešení nehomogenní rovnice můžeme získat pomocí *metody variace konstant*. Toto řešení je potom tvaru

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \cdots + C_n(x) y_n(x),$$

kde $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ jsou řešení systému

$$\begin{aligned} C_1'(x) y_1(x) + \cdots + C_n'(x) y_n(x) &= 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + \cdots + C_n'(x) y_n'(x) &= 0, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \ \ \vdots \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x) y_n^{(n-2)}(x) &= 0, \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Pokud je pravá strana ve tvaru tzv. *kvazipolynomu* lze použít i jednodušší postup. V takovém případě je řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y_p,$$

kde y_p získáme v závislosti na tvaru $f(x)$.

i) Pro nehomogenní část
$$f(x) = Q_m(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x},$$
kde $Q_m(x)$ je polynom m-tého stupně, platí
$$y_p = x^k \widetilde{Q}_m(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x},$$
kde k je násobnost čísla α coby kořene charakteristického polynomu a $\widetilde{Q}_m(x)$ je polynom nejvýše stupně m.

ii) Pro nehomogenní část
$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right),$$
kde $P_m(x)$ je polynom stupně m a $Q_n(x)$ je polynom stupně n, platí
$$y_p = x^k\,\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\widetilde{P}_r(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_r(x)\sin\beta x\right),$$
kde k je násobnost čísla $\alpha + i\beta$ coby kořene charakteristického polynomu a $\widetilde{P}_r(x)$, $\widetilde{Q}_r(x)$ jsou polynomy nejvýše stupně r, kde $r = \max\{m, n\}$.

Příklad 1.9.1.

Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}.$$

Řešení. Charakteristický polynom $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ má dvojnásobný reálný kořen $\lambda_{1,2} = 1$. Proto řešení přidružené homogenní diferenciální rovnice je funkce

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x .$$

Protože pravá strana není ve tvaru kvazipolynomu, je nutné použít metodu variace konstant. Tím dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} C_1' e^x + C_2' x e^x &= 0, \\ C_1' e^x + C_2'(x + x e^x) &= \frac{e^x}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Z této rovnice musíme vyjádřit neznámé C_1' a C_2'. K tomu je možné použít známé Cramerovo pravidlo, proto určíme následující determinanty (písmeno W napovídá, že se jedná o tzv. Wronskián)

$$W = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{vmatrix} = e^{2x}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{e^x}{x^2+1} \\ e^x & e^x + x e^x \end{vmatrix} = -\frac{x e^{2x}}{x^2+1},$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ 0 & \frac{e^x}{x^2+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x^2+1}.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \frac{W_1}{W} \, dx = -\int \frac{x}{x^2+1} \, dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R} \\ C_2(x) &= \int \frac{W_2}{W} \, dx = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dosazením těchto výrazů do $y_H(x)$ nalezneme obecné řešení zadané diferenciální rovnice

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{1}{2} e^x \ln(x^2+1) + x e^x \operatorname{arctg}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.2.

Vyřešme diferenciální rovnici

$$y''' + y'' + 9y' + 9y = \mathrm{e}^x + 10\cos 3x.$$

Řešení. Charakteristický polynom je v tomto případě $\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda + 9$, jehož kořeny jsou čísla $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = \pm 3i$. Proto řešení přidružené homogenní rovnice je

$$y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\cos 3x + C_3\sin 3x.$$

Nehomogenní část je součtem dvou kvazipolynomů, proto můžeme najít příslušná dvě partikulární řešení pomocí metody neurčitých koeficientů. Nejdříve pro funkci e^x, jíž odpovídající partikulární řešení bude $y_{p_1}(x) = A\,\mathrm{e}^x$. Protože

$$y_{p_1}(x) = y'_{p_1}(x) = y''_{p_1}(x) = y'''_{p_1}(x) = A\,\mathrm{e}^x$$

dostaneme po dosazení do zadané rovnice s pravou stranou pouze s funkcí e^x vztah

$$20A\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x, \quad \text{což znamená } A = \frac{1}{20}.$$

Nyní uvažujme pravou stranu pouze ve tvaru $10\cos 3x$. Protože číslo $3i$ je kořenem charakteristického polynomu, bude příslušné partikulární řešení mít tvar

$$y_{p_2}(x) = x(B\cos 3x + C\sin 3x).$$

Po spočítání jednotlivých derivací $y'_{p_2}(x)$, $y''_{p_2}(x)$, $y'''_{p_2}(x)$ a jejich dosazení do zadané rovnice s pravou stranou rovnou pouze $10\cos 3x$ dostaneme rovnici

$$-18B\cos 3x - 18C\sin 3x - 6B\sin 3x + 6C\cos 3x = 10\cos 3x.$$

Porovnáním jednotlivých koeficientů u výrazů $\cos 3x$ a $\sin 3x$ dostaneme soustavu

$$-18B + 6C = 10, \quad -18C - 6B = 0,$$

jejímž řešením je dvojice $B = -\frac{1}{2}$ a $C = \frac{1}{6}$. Celkem tedy dostáváme, že řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\cos 3x + C_3\sin 3x + \frac{1}{20}\,\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}x\cos 3x + \frac{1}{6}x\sin 3x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.3.

Řešte následující rovnici

$$\frac{y^{(4)}}{16} = y.$$

Řešení. Rovnici si můžeme pro jednoducjost přepsat jako

$$y^{(4)} - 16y = 0,$$

řešíme tedy homogenní rovnici. Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} \lambda^4 - 16 &= 0 \\ (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm 2,\ \lambda_{3,4} = \pm 2i. \end{aligned}$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1 \operatorname{e}^{2x} + C_2 \operatorname{e}^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.4.

Řešte následující rovnici

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Řešení. Řešíme homogenní rovnici. Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda - 2 &= 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda + 2) &= 0 \\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 &= -2. \end{aligned}$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.5.

Řešte následující rovnici

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Řešení. Řešíme homogenní rovnici. Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 4\lambda + 4 &= 0 \\ (\lambda + 2)^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -2. \end{aligned}$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 x \mathrm{e}^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.6.

Řešte následující rovnici

$$y'' - 4y' + 29y = 0.$$

Řešení. Řešíme homogenní rovnici. Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\lambda^2 - 4\lambda + 29 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 2 \pm 5i.$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1 \,\mathrm{e}^{2x} \cos 5x + C_2 \,\mathrm{e}^{2x} \sin 5x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.7.

Řešte následující rovnici

$$y'' - 3y' + 2y = x^2.$$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 3\lambda + 2 &= 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 2) &= 0 \\ \lambda_1 &= 1, \lambda_2 = 2. \end{aligned}$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{x}.$$

Vzhledem k tvaru pravé strany zadané rovnice budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$y_p = Ax^2 + Bx + C, \quad A, B, C \in \mathbb{R},$$

tedy

$$\begin{aligned} y_p' &= 2Ax + B, \\ y_p'' &= 2A. \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice obržíme vztah

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2,$$

odkud porovnáním jednotlivých koeficientů získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2A &= 1, \\ -6A + 2B &= 0, \\ 2A - 3B + 2C &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = \frac{7}{4}.$$

Partikulární řešení je tedy

$$y_p = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{x} + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{7}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.8.

Řešte následující rovnici

$$y'' - y = x^3.$$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y'' - y = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 1 &= 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda + 1) &= 0 \\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 &= -1. \end{aligned}$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-x}.$$

Vzhledem k tvaru pravé strany zadané rovnice budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R},$$

tedy

$$\begin{aligned} y_p' &= 3Ax^2 + 2Bx + C, \\ y_p'' &= 6Ax + 2B. \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice obržíme vztah

$$6Ax + 2B - (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = x^3,$$

odkud porovnáním jednotlivých koeficientů získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -A &= 1, \\ -B &= 0, \\ 6A - C &= 0, \\ 2B - D &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je

$$A = -1, \quad B = 0, \quad C = -6, \quad D = 0.$$

Partikulární řešení je tedy

$$y_p = -x^3 - 6x.$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-x} - x^3 - 6x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.9.

Řešte následující rovnici

$$y'' + 9y = 18x^2 - 3x - 5.$$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y'' + 9y = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\lambda^2 + 9 = 0$$
$$\lambda_1 = 3i,\ \lambda_2 = -3i.$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Vzhledem k tvaru pravé strany zadané rovnice budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$y_p = Ax^2 + Bx + C, \quad A, B, C \in \mathbb{R},$$

tedy

$$y_p' = 2Ax + B,$$
$$y_p'' = 2A.$$

Dosazením do rovnice obržíme vztah

$$2A + 9(Ax^2 + Bx + C) = 18x^2 - 3x - 5,$$

odkud porovnáním jednotlivých koeficientů získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 9A &= 18, \\ 9B &= -3, \\ 2A + 9C &= -5, \end{aligned}$$

jejímž řešením je

$$A = 2, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = -1.$$

Partikulární řešení je tedy

$$y_p = 2x^2 - \frac{x}{3} - 1.$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 2x^2 - \tfrac{x}{3} - 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.10.

Řešte následující rovnici

$$y'' - 8y' + 16y = P(x),$$

kde $P(x) = \quad a)\ 32, \quad b)\ 12x - 3, \quad c)\ -x^2 + 2x + 5.$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 4.$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 x \mathrm{e}^{4x}.$$

$a)$ Vzhledem k tvaru pravé strany zadané rovnice budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$y_p = A, \quad A \in \mathbb{R},$$

tedy

$$y_p' = 0 = y_p''.$$

Dosazením do rovnice obržíme vztah

$$16A = 32 \qquad \Longrightarrow \qquad A = 2.$$

Partikulární řešení je tedy

$$y_p = 2.$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 x \mathrm{e}^{4x} + 2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$b)$ Vzhledem k tvaru pravé strany zadané rovnice budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$y_p = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

tedy

$$y_p' = A,$$
$$y_p'' = 0.$$

Dosazením do rovnice obržíme vztah
$$-8A + 16(Ax + B) = 12x - 3,$$
odkud porovnáním jednotlivých koeficientů získáme soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 16A &= 12, \\ -8A + 16B &= -3, \end{aligned}$$
jejímž řešením je
$$A = \frac{3}{4}, \quad B = \frac{3}{16}.$$
Partikulární řešení je tedy
$$y_p = \tfrac{3}{4}x + \tfrac{3}{16}.$$
Obecné řešení je proto
$$y = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 x \mathrm{e}^{4x} + \tfrac{3}{4}x + \tfrac{3}{16}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Vzhledem k tvaru pravé strany zadané rovnice budeme partikulární řešení hledat ve tvaru
$$y_p = Ax^2 + Bx + C, \quad A, B, C \in \mathbb{R},$$
tedy
$$\begin{aligned} y_p' &= 2Ax + B, \\ y_p'' &= 2A. \end{aligned}$$
Dosazením do rovnice obržíme vztah
$$2A - 8(2Ax + B) + 16(Ax^2 + Bx + C) = -x^2 + 2x + 5,$$
odkud porovnáním jednotlivých koeficientů získáme soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 16A &= -1, \\ -16A + 16B &= 2, \\ 2A + -8B + 16C &= 5, \end{aligned}$$
jejímž řešením je
$$A = -\frac{1}{16}, \quad B = \frac{1}{16}, \quad C = \frac{45}{128}.$$
Partikulární řešení je tedy
$$y_p = -\tfrac{x^2}{16} + \tfrac{x}{16} + \tfrac{45}{128}.$$
Obecné řešení je proto
$$y = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 x \mathrm{e}^{4x} - \tfrac{x^2}{16} + \tfrac{x}{16} + \tfrac{45}{128}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.11.

Řešte následující rovnici

$$y''' - 5y'' - 8y' + 48y = 0.$$

Řešení. Řešíme homogenní rovnici. Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda + 48 &= 0 \\ (\lambda - 4)^2(\lambda + 3) &= 0 \\ \lambda_{1,2} = 4,\ \lambda_3 &= -3. \end{aligned}$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 x \mathrm{e}^{4x} + C_3 \mathrm{e}^{-3x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.12.

Řešte následující rovnici

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

Řešení. Řešíme homogenní rovnici. Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} \lambda^4 + 2\lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda^2 + 1)^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= i,\, \lambda_{3,4} = -i. \end{aligned}$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.13.

Řešte následující rovnici

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Řešení. Řešíme homogenní rovnici. Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 &= 0 \\ (\lambda^2 - 1)(\lambda - 2) &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm 1,\ \lambda_3 = 2. \end{aligned}$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\,\mathrm{e}^{2x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.14.

Řešte následující rovnici

$$y^{(6)} + 2y^{(5)} + 4y^{(4)} + 4y''' + 5y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Řešení. Řešíme homogenní rovnici. Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned}
\lambda^6 + 2\lambda^5 + 4\lambda^4 + 4\lambda^3 + 5\lambda^2 + 2\lambda + 2 &= 0\\
\lambda^6 + 2\lambda^5 + 2\lambda^4 + 2\lambda^4 + 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda^2 + 2\lambda + 2 &= 0\\
\lambda^4(\lambda^2 + 2\lambda + 2) + 2\lambda^2(\lambda^2 + 2\lambda + 2) + (\lambda^2 + 2\lambda + 2) &= 0\\
(\lambda^2 + 1)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 2) &= 0\\
\lambda_{1,2} = i,\ \lambda_{3,4} &= -i,\ \lambda_{5,6} = -1 \pm i.
\end{aligned}$$

Obecné řešení je proto

$$y = (C_1 + C_3 x + C_5\,\mathrm{e}^{-x})\cos x + (C_2 + C_4 x + C_6\,\mathrm{e}^{-x})\sin x, \quad C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, 6.$$

▲

Příklad 1.9.15.

Řešte následující rovnici

$$y'' + 3y' + 2y = (20x + 29)\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$
$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2.$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Vzhledem k tvaru pravé strany zadané rovnice budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$y_p = (Ax + B)\,\mathrm{e}^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

tedy

$$y_p' = A\,\mathrm{e}^{3x} + 3(Ax + B)\,\mathrm{e}^{3x},$$
$$y_p'' = 3A\,\mathrm{e}^{3x} + 3A\,\mathrm{e}^{3x} + 9(Ax + B)\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Dosazením do rovnice obržíme vztah

$$6A\,\mathrm{e}^{3x} + 9(Ax + B)\,\mathrm{e}^{3x} + 3A\,\mathrm{e}^{3x} + 9(Ax + B)\,\mathrm{e}^{3x} + 2(Ax + B)\,\mathrm{e}^{3x} = (20x + 29)\,\mathrm{e}^{3x},$$

odkud porovnáním jednotlivých koeficientů získáme soustavu rovnic

$$9A + 20B = 29,$$
$$20A = 20,$$

jejímž řešením je

$$A = 1, \quad B = 1.$$

Partikulární řešení je tedy

$$y_p = (x + 1)\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + (x + 1)\,\mathrm{e}^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.16.

Řešte následující rovnici

$$y'' - 2y' + 5y = 5\,\mathrm{e}^{2x} \sin x.$$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$
$$\lambda_1 = 1 + 2i,\ \lambda_2 = 1 - 2i.$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = C_1\,\mathrm{e}^x \cos 2x + C_2\,\mathrm{e}^x \sin 2x.$$

Vzhledem k tvaru pravé strany zadané rovnice budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$y_p = \mathrm{e}^{2x}(A \sin x + B \cos x), \quad A, B \in \mathbb{R},$$

tedy

$$\begin{aligned} y_p' &= 2\,\mathrm{e}^{2x}(A \sin x + B \cos x) + \mathrm{e}^{2x}(A \cos x - B \sin x), \\ y_p'' &= 4\,\mathrm{e}^{2x}(A \sin x + B \cos x) + 2\,\mathrm{e}^{2x}(A \cos x - B \sin x) \\ &\qquad + 2\,\mathrm{e}^{2x}(A \cos x - B \sin x) + \mathrm{e}^{2x}(-A \sin x - B \cos x). \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice obržíme vztah

$$\begin{aligned} 3\,\mathrm{e}^{2x}(A \sin x + B \cos x) + 4\,\mathrm{e}^{2x}(A \cos x - B \sin x) - 4\,\mathrm{e}^{2x}(A \sin x + B \cos x) \\ - 2\,\mathrm{e}^{2x}(A \cos x - B \sin x) + 5\,\mathrm{e}^{2x}(A \sin x + B \cos x) = 5\,\mathrm{e}^{2x} \sin x, \end{aligned}$$

odkud porovnáním jednotlivých koeficientů získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 4A - 2B &= 5, \\ 2A + 4B &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je

$$A = 1, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

Partikulární řešení je

$$y_p = \mathrm{e}^{2x}\left(\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right).$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1\,\mathrm{e}^x \cos 2x + C_2\,\mathrm{e}^x \sin 2x + \mathrm{e}^{2x}\left(\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.17.

Řešte následující rovnici

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y^{(3)} = 8x - 12.$$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y^{(3)} = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{gathered}\lambda^5 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3 = 0\\ \lambda^3(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0\\ \lambda_{1,2,3} = 0,\ \lambda_4 = 1, \lambda_5 = 2.\end{gathered}$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\,\mathrm{e}^{2x} + C_5\,\mathrm{e}^{x}.$$

Vzhledem k tvaru pravé strany zadané rovnice budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$y_p = x^3(Ax + B), \quad A, B \in \mathbb{R},$$

tedy

$$\begin{aligned}y_p' &= 4Ax^3 + 3Bx^2,\\ y_p'' &= 12Ax^2 + 6Bx,\\ y_p''' &= 24Ax + 6B,\\ y_p^{(4)} &= 24A,\\ y_p^{(5)} &= 0.\end{aligned}$$

Dosazením do rovnice obržíme vztah

$$0 - 3 \cdot 24A + 2(24Ax + 6B) = 8x - 12$$

odkud porovnáním jednotlivých koeficientů získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}48A &= 8,\\ -72A + 12B &= -12,\end{aligned}$$

jejímž řešením je

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = 0.$$

Partikulární řešení je

$$y_p = \frac{x^4}{6}.$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \,\mathrm{e}^{2x} + C_5 \,\mathrm{e}^{x} + \frac{x^4}{6}, \quad C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.18.

Řešte následující rovnici

$$y'' + y' + \frac{5}{2}y = 25\cos 2x.$$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{5}{2} = 0$$
$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i.$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{3}{2}x + C_2\sin\frac{3}{2}x\right).$$

Vzhledem k tvaru pravé strany zadané rovnice budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$y_p = A\cos 2x + B\sin 2x, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

tedy

$$y_p' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$
$$y_p'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Dosazením do rovnice obržíme vztah

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x + \frac{5}{2}(A\cos 2x + B\sin 2x) = 25\cos 2x$$

odkud porovnáním jednotlivých koeficientů získáme soustavu rovnic

$$-4A + 2B + \frac{5}{2}A = 25,$$
$$-4B - 2A + \frac{5}{2}B = 0.$$

jejímž řešením je

$$A = -6, \quad B = 8.$$

Partikulární řešení je

$$y_p = 8\sin 2x - 6\cos 2x.$$

Obecné řešení je proto

$$y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{3}{2}x + C_2\sin\frac{3}{2}x\right) + 8\sin 2x - 6\cos 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.19.

Řešte následující rovnici

$$y'' + y = \operatorname{tg}^2 x.$$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y'' + y = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 1 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm i. \end{aligned}$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Nyní použijeme metodu variace konstant, tj. řešení hledáme ve tvaru

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

Řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x &= 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x &= \operatorname{tg}^2 x \end{aligned}$$

pro neznámé funkce $C_1'(x), C_2'(x)$. Vynásobením první rovnice $\sin x$, druhé $\cos x$ a jejich sečtením dostáváme

$$C_2'(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

a následně

$$C_1'(x) = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}.$$

Integrací tedy

$$C_1(x) = \frac{-1}{\cos x} - \cos x + K_1, \quad C_2(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| - \sin x + K_2.$$

Obecné řešení je proto

$$y = K_1 \cos x + K_2 \sin x - 2 + \sin x \ln \sqrt{\left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right|}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.20.

Řešte následující rovnici

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}.$$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y'' + 4y = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 4 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm 2i. \end{aligned}$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Nyní použijeme metodu variace konstant, tj. řešení hledáme ve tvaru

$$y = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x.$$

Řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x &= 0, \\ -2C_1'(x) \sin 2x + 2C_2'(x) \cos 2x &= \frac{1}{\sin 2x} \end{aligned}$$

pro neznámé funkce $C_1'(x), C_2'(x)$. Vynásobením první rovnice $2 \sin 2x$, druhé $\cos 2x$ a jejich sečtením dostáváme

$$C_2'(x) = \frac{\cos 2x}{2 \sin 2x}$$

a následně

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}.$$

Integrací tedy

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}x + K_1, \quad C_2(x) = \frac{1}{4} \ln |\sin 2x| + K_2.$$

Obecné řešení je proto

$$y = K_1 \cos 2x + K_2 \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \ln |\sin 2x|, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.21.

Řešte následující rovnici

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 1. \end{aligned}$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Nyní použijeme metodu variace konstant, tj. řešení hledáme ve tvaru

$$y = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x.$$

Řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x &= 0, \\ C_1'(x) e^x + C_2'(x)(1 + x e^x) &= \frac{e^x}{x} \end{aligned}$$

pro neznámé funkce $C_1'(x), C_2'(x)$. Jejich sečtením dostáváme

$$C_2'(x) = \frac{1}{x}$$

a následně

$$C_1'(x) = -1.$$

Integrací tedy

$$C_1(x) = -x + K_1, \quad C_2(x) = \ln|x| + K_2.$$

Obecné řešení je proto

$$y = K_1 e^x + K_2 x e^x + x e^x (\ln|x| - 1), \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.22.

Řešte následující rovnici

$$y'' + y' = x^2 - x + 6\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y'' + y' = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$
$$\lambda_1 = 0,\, \lambda_2 = -1.$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Vzhledem k tvaru pravé strany zadané rovnice budeme partikulární řešení hledat ve jako součet dvou funkcí y_{p_1} a y_{p_2}. Nejprve najděme y_{p_1}. Zajímá nás pravá strana $x^2 - x$, takže funkci hledáme ve tvaru

$$y_{p_1} = x(Ax^2 + Bx + C), \quad A, B, C \in \mathbb{R},$$

tedy

$$\begin{aligned} y'_{p_1} &= 3Ax^2 + 2Bx + C, \\ y''_{p_1} &= 6Ax + 2B. \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice obržíme vztah

$$6Ax + 2B + 3Ax^2 + 2Bx + C = x^2 - x,$$

odkud porovnáním jednotlivých koeficientů získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2B + C &= 0, \\ 6A + 2B &= -1, \\ 3A &= 1, \end{aligned}$$

jejímž řešením je

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{3}{2}, \quad C = 3.$$

Funkce y_{p_1} je tedy

$$y_{p_1} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x.$$

Nyní najděme y_{p_2}. Zajímá nás pravá strana $6\,\mathrm{e}^{2x}$, takže funkci hledáme ve tvaru

$$y_{p_2} = D\,\mathrm{e}^{2x}, \quad D \in \mathbb{R},$$

tedy

$$\begin{aligned} y'_{p_2} &= 2D\,\mathrm{e}^{2x}, \\ y''_{p_2} &= 4D\,\mathrm{e}^{2x}. \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice obržíme vztah

$$4D\,\mathrm{e}^{2x} + 2D\,\mathrm{e}^{2x} = 6\,\mathrm{e}^{2x},$$

odkud porovnáním jednotlivých koeficientů získáme

$$D = 1.$$

Funkce y_{p_2} je tedy

$$y_{p_2} = \mathrm{e}^{2x}$$

a partikulární řešení zadané rovnice je

$$y_p = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + \mathrm{e}^{2x}.$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + \mathrm{e}^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.23.

Řešte následující rovnici

$$y'' + 2y' + 2y = 3\,\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i.$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = \mathrm{e}^{-x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right).$$

Vzhledem k tvaru pravé strany zadané rovnice budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$y_p = x\,\mathrm{e}^{-x}(A\cos x + B\sin x), \quad A, B \in \mathbb{R},$$

tedy

$$\begin{aligned}
y_p' &= -x\,\mathrm{e}^{-x}(A\cos x + B\sin x) + \mathrm{e}^{-x}(A\cos x + B\sin x) + x\,\mathrm{e}^{-x}(-A\sin x + B\cos x),\\
y_p'' &= x\,\mathrm{e}^{-x}(A\cos x + B\sin x) - \mathrm{e}^{-x}(A\cos x + B\sin x) - x\,\mathrm{e}^{-x}(-A\sin x + B\cos x)\\
&\quad - \mathrm{e}^{-x}(A\cos x + B\sin x) + \mathrm{e}^{-x}(-A\sin x + B\cos x)\\
&\quad + \mathrm{e}^{-x}(-A\sin x + B\cos x) - x\,\mathrm{e}^{-x}(-A\sin x + B\cos x)\\
&\quad + x\,\mathrm{e}^{-x}(-A\cos x - B\sin x).
\end{aligned}$$

Dosazením do rovnice obržíme vztah

$$-2\,\mathrm{e}^{-x}(A\sin x - B\cos x) = 3\,\mathrm{e}^{-x}\cos x,$$

odkud porovnáním jednotlivých koeficientů získáme

$$A = 0, \quad B = \frac{3}{2}.$$

Partikulární řešení je tedy

$$y_p = \frac{3}{2}x\,\mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

Obecné řešení je proto

$$y = \mathrm{e}^{-x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + \frac{3}{2}x\,\mathrm{e}^{-x}\sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.24.

Řešte následující rovnici

$$y''' + 2y'' + y' = x^2 + \sin x.$$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0 \\ \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -1. \end{aligned}$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = C_1 + C_2 \,\mathrm{e}^{-x} + C_3 x \,\mathrm{e}^{-x}.$$

Vzhledem k tvaru pravé strany zadané rovnice budeme partikulární řešení hledat ve jako součet dvou funkcí y_{p_1} a y_{p_2}. Nejprve najděme y_{p_1}. Zajímá nás pravá strana x^2, takže funkci hledáme ve tvaru

$$y_{p_1} = x(Ax^2 + Bx + C), \quad A, B, C \in \mathbb{R},$$

tedy

$$\begin{aligned} y'_{p_1} &= 3Ax^2 + 2Bx + C, \\ y''_{p_1} &= 6Ax + 2B, \\ y'''_{p_1} &= 6A. \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice obržíme vztah

$$6A + 2(6Ax + 2B) + 3Ax^2 + 2Bx + C = x^2,$$

odkud porovnáním jednotlivých koeficientů získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3A &= 1, \\ 12A + 2B &= 0, \\ 6A + 4B + C &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -2, \quad C = 6.$$

Funkce y_{p_1} je tedy

$$y_{p_1} = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x.$$

Nyní najděme y_{p_2}. Zajímá nás pravá strana $\sin x$, takže funkci hledáme ve tvaru

$$y_{p_2} = D\cos x + E\sin x, \quad D, E \in \mathbb{R},$$

tedy

$$\begin{aligned} y'_{p_2} &= -D\sin x + E\cos x, \\ y''_{p_2} &= -D\cos x - E\sin x, \\ y''_{p_2} &= D\sin x - E\cos x. \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice obržíme vztah

$$D\sin x - E\cos x + 2(-D\cos x - E\sin x) - D\sin x + E\cos x = \sin x,$$

odkud porovnáním jednotlivých koeficientů získáme

$$D = 0, \quad E = -\frac{1}{2}.$$

Funkce y_{p_2} je tedy

$$y_{p_2} = -\frac{1}{2}\sin x$$

a partikulární řešení zadané rovnice je

$$y_p = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2}\sin x.$$

Obecné řešení je proto

$$y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3 x\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2}\sin x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.25.

Řešte následující rovnici

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 8(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + 4(\sin x + \cos x).$$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 &= 0 \\ (\lambda^2 - 1)^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_{3,4} &= -1. \end{aligned}$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^x + (C_3 + C_4 x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Vzhledem k tvaru pravé strany zadané rovnice budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$y_p = Ax^2\,\mathrm{e}^x + Bx^2\,\mathrm{e}^{-x} + C\cos x + D\sin x, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R},$$

tedy

$$\begin{aligned} y_p' &= 2Ax\,\mathrm{e}^x + Ax^2\,\mathrm{e}^x + 2Bx\,\mathrm{e}^{-x} - Bx^2\,\mathrm{e}^{-x} - C\sin x + D\cos x, \\ y_p'' &= 2A\,\mathrm{e}^x + 4Ax\,\mathrm{e}^x + Ax^2\,\mathrm{e}^x + 2B\,\mathrm{e}^{-x} - 4Bx\,\mathrm{e}^{-x} + Bx^2\,\mathrm{e}^{-x} - C\cos x - D\sin x, \\ y_p''' &= 6A\,\mathrm{e}^x + 6Ax\,\mathrm{e}^x + Ax^2\,\mathrm{e}^x - 6B\,\mathrm{e}^{-x} + 6Bx\,\mathrm{e}^{-x} - Bx^2\,\mathrm{e}^{-x} + C\sin x - D\cos x, \\ y_p^{(4)} &= 12A\,\mathrm{e}^x + 8Ax\,\mathrm{e}^x + Ax^2\,\mathrm{e}^x + 12B\,\mathrm{e}^{-x} - 8Bx\,\mathrm{e}^{-x} + Bx^2\,\mathrm{e}^{-x} + C\cos x + D\sin x. \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice obržíme vztah

$$8A\,\mathrm{e}^x + 8B\,\mathrm{e}^{-x} + 4C\cos x + 4D\sin x = 8(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + 4(\sin x + \cos x)$$

odkud porovnáním jednotlivých koeficientů získáme

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 4.$$

Partikulární řešení je

$$y_p = x^2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + \cos x + \sin x.$$

Obecné řešení je proto

$$y = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^x + (C_3 + C_4 x)\,\mathrm{e}^{-x} + x^2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + \cos x + \sin x, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.26.

Řešte následující rovnici

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$$

Řešení. Nejprve řešíme homogenní rovnici.

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Hledáme kořeny charakteristického polynomu

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = -2.$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

Nyní použijeme metodu variace konstant, ve ktere využijeme Cramerovo pravidlo pro řešení soustav lineárních rovnic. Označíme-li Wronskián

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & x e^{-2x} \\ (e^{-2x})' & (x e^{-2x})' \end{vmatrix}$$

a determinanty

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x e^{-2x} \\ e^{-2x} \ln x & (x e^{-2x})' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ (e^{-2x})' & e^{-2x} \ln x \end{vmatrix},$$

potom řešení bude ve tvaru

$$y = e^{-2x} C_1(x) + x e^{-2x} C_2(x) = e^{-2x} \int \frac{W_1}{W} dx + x e^{-2x} \int \frac{W_2}{W} dx.$$

Přímým výpočtem získáme obecné řešení

$$y = K_1 e^{-2x} + K_2 x e^{-2x} + \frac{x^2}{2} e^{-2x} \ln x - \frac{3}{4} x^2 e^{-2x}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 1.9.27.

Těleso o hmotnosti 100 g natáhne pružinu o 5 cm. Toto těleso je vypuštěno rychlostí 10 cm/s z rovnovážného bodu. Pokud zanedbáme odpor vzduch, jaká je jeho poloha v čase t? Za jakou dobu se vrátí do rovnovážného bodu?

Poznámka. Prodloužení L pružiny z rovnovážné polohy je způsobené tíhovou sílou danou vztahem $F_G = mg$ (hmotnost krát tíhové zrychlení). Síla pružiny je $F_p = -kL$ (Hookeův zákon), tj.

$$kL = mg,$$

kde k je tuhost pružiny (konstanta pružnosti).

Harmonické kmitání je popsáno rovnicí

$$my'' + \gamma y' + ky = F(t),$$

kde $y(t)$ je vzdálenost od rovnovážné polohy, m je hmotnost, $k > 0$ je konstanta pružnosti a $\gamma > 0$ je koeficient tlumení. Pokud je $F(t) \equiv 0$, jedná se o vlastní kmitání, jinak o kmitání vynucené. Je-li $\gamma = 0$, jde o netlumené kmitání, jinak o kmitání tlumené.

Výsledné harmonické kmitání pružinového oscilátoru je charakterizováno úhlovou frekvencí ω a dobou kmitu T

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Amplitudu C a fázový úhel φ lze získat z koeficientů řešení jako

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{C_2}{C_1},$$

kde C_1 je koeficient u sinu a C_2 u kosinu. Polohu lze pak popsat jako

$$y(t) = C\sin(\omega t + \varphi).$$

Řešení. Máme

$$m = 0.1\,kg, \quad \gamma = 0, \quad g = 10\,m/s^2 = 1000\,cm/s^2, \quad L = 5\,cm$$

a

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{0.1 \cdot 1000}{5} = 20\,[kg/s^2].$$

Tedy dostáváme počáteční úlohu

$$0.1y'' + 20y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 10.$$

Řešením homogenní rovnice

$$0.1y'' + 20y = 0$$

je

$$y(t) = C_1\sin(10t\sqrt{2}) + C_2\cos(10t\sqrt{2}).$$

Použitím počátečních podmínek dostáváme

$$C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad C_2 = 0.$$

Poloha v čase t je tedy popsána funkcí

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(10t\sqrt{2})$$

a rovnovážným bodem těleso prochází, když je $\sin(10t\sqrt{2}) = 0$, tj. do rovnovážného bodu se těleso vrátí v čase

$$t_0 = \frac{\pi}{10\sqrt{2}}.$$

▲

Příklad 1.9.28.

Těleso o hmotnosti 1/2 kg natáhne pružinu o 5 cm. Těleso je stlačeno nahoru o 2 cm nad rovnovážný bod a vypuštěno rychlostí 60 cm/s, přičemž zanedbáváme odpor vzduchu. Určete polohu tělesa v čase t.

Řešení. Pro poznámku o použité rovnici viz Příklad 1.9.27.

Máme
$$m = 0.5\,kg, \quad \gamma = 0, \quad g = 10\,m/s^2 = 1000\,cm/s^2, \quad L = 5\,cm$$
a
$$k = \frac{mg}{L} = \frac{0.5 \cdot 1000}{5} = 100\,[kg/s^2].$$
Tedy dostáváme počáteční úlohu
$$0.5y'' + 100y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 60.$$
Řešením homogenní rovnice
$$0.5y'' + 100y = 0$$
je
$$y(t) = C_1 \sin(10t\sqrt{2}) + C_2 \cos(10t\sqrt{2}).$$
Použitím počátečních podmínek dostáváme
$$C_1 = 3\sqrt{2}, \quad C_2 = 2.$$
Poloha v čase t je tedy popsána funkcí
$$y(t) = 3\sqrt{2}\sin(10t\sqrt{2}) + 2\cos(10t\sqrt{2}).$$
Amplituda a fázový úhel jsou
$$C = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{22}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{2}{3\sqrt{2}} \approx 0.44,$$
Tedy polohu můžeme popsat jako
$$y(t) = \sqrt{22}\sin(10t\sqrt{2} + 0.44).$$

▲

Příklad 1.9.29.

Těleso o hmotnosti 2 kg natáhne pružinu o 0.5 m. Pro stlačení o 0.7 m je potřebná síla 25.6 N. Na těleso působí odpor $\gamma = 40$. Určete pozici tělesa v čase t, je-li vypuštěno z rovnovážného bodu s počátečním impulsem 0.6 m/s.

Řešení. Pro poznámku o použité rovnici viz Příklad 1.9.27.

Máme

$$m = 2\,kg, \quad \gamma = 40, \quad L = 0.2\,m, \quad F_p = -25.6\,N$$

a z $F_p = -kL$ máme

$$k = -\frac{F_p}{L} = \frac{25.6}{0.2} = 128\,[kg/s^2].$$

Tedy dostáváme počáteční úlohu

$$2y'' + 40y' + 128y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.6.$$

Řešením homogenní rovnice

$$2y'' + 40y' + 128y = 0$$

je

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-4t} + C_2\,\mathrm{e}^{-16t}.$$

Použitím počátečních podmínek dostáváme

$$C_1 = 0.05, \quad C_2 = -0.05.$$

Poloha v čase t je tedy popsána funkcí

$$y(t) = \frac{1}{20}\left(\mathrm{e}^{-4t} - \mathrm{e}^{-16t}\right).$$

▲

Příklad 1.9.30.

Těleso o hmotnosti 3 kg natáhne pružinu o 400 mm, přičemž zanedbáváme tlumení. Na systém působí síla $F(t) = 10\cos\omega_0 t$ (systém rezonuje). Těleso je na počátku stlačeno o 20 cm a je mu dána počáteční rychlost 10 cm/s. Určete jeho pozici v čase t.

Řešení. Pro poznámku o použité rovnici viz Příklad 1.9.27.

Máme

$$m = 3\,kg, \quad \gamma = 0, \quad L = 0.4\,m, \quad g = 10\,m/s^2$$

a

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{3\cdot 10}{0.4} = 75\,[kg/s^2].$$

Tedy dostáváme počáteční úlohu

$$3y'' + 75y = 10\cos 5t, \quad y(0) = -0.2, \quad y'(0) = 0.1.$$

Řešením rovnice

$$3y'' + 75y = 10\cos 5t$$

je

$$y(t) = C_1 \sin 5t + C_2 \cos 5t + \frac{t}{3}\sin 5t.$$

Použitím počátečních podmínek dostáváme

$$C_1 = \frac{1}{50}, \quad C_2 = -\frac{1}{5}.$$

Poloha v čase t je tedy popsána funkcí

$$y(t) = \frac{1}{50}\sin 5t - \frac{1}{5}\cos 5t + \frac{t}{3}\sin 5t.$$

Amplituda a fázový úhel jsou

$$C = \approx 0.200998, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{-1/5}{1/50} \approx -1.47112,$$

přičemž ve IV. kvadrantu $2\pi - 1.47112 = 4.812065$. Tedy polohu můžeme popsat jako

$$y(t) = 0.200998\sin(5t + 4.812065) + \frac{1}{3}t\sin 5t.$$

▲

Příklad 1.9.31.

Těleso o hmotnosti 3 kg natáhne pružinu o 400 mm. Uvažujme odpor 45 N při rychlosti 50 cm/s. Na systém působí síla $F(t) = 10\cos\omega_0 t$ (systém rezonuje). Těleso je na počátku stlačeno o 20 cm a je mu dána počáteční rychlost 10 cm/s. Určete jeho pozici v čase t.

Řešení. Pro poznámku o použité rovnici viz Příklad 1.9.27.

Nejpve ze vztahu $|F_t| = \gamma y'$, tedy $45 = \gamma 0.5$, určíme $\gamma = 90$. Dále sestavíme počáteční úlohu

$$3y'' + 90y' + 75y = 10\cos 5t, \quad y(0) = -0.2, \quad y'(0) = 0.1,$$

jejíž řešením je

$$y(t) = -0.20645\,\mathrm{e}^{(-15+10\sqrt{2})t} + 0.006458\,\mathrm{e}^{(-15-10\sqrt{2})t} + \frac{1}{45}\sin 5t.$$

▲

Příklad 1.9.32.

Těleso o hmotnosti 3.2 kg natáhne pružinu o 2 m. Třecí síla je rovna čtyřnásobku rychlosti. Na systém působí síla $F(t) = 10\cos 3t$. Těleso je na počátku vytaženo o 2 m nad rovnovážný bod a bez počátečního impulsu je vypuštěno. Určete jeho pozici v čase t.

Řešení. Pro poznámku o použité rovnici viz Příklad 1.9.27.

Máme

$$m = 3.2\,kg, \quad \gamma = 4, \quad L = 2\,m$$

a

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{32}{2} = 16\,[kg/s^2].$$

Tedy dostáváme počáteční úlohu

$$3.2y'' + 4y' + 16y = 10\cos 3t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

Poloha v čase t je tedy popsána funkcí

$$y(t) = \frac{316}{193}\,\mathrm{e}^{-2t}\cos(2t\sqrt{3}) + \frac{136}{193\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{-2t}\sin(2t\sqrt{3}) + \frac{70}{193}\cos(3t) + \frac{120}{193}\sin(3t).$$

Amplituda a fázový úhel jsou

$$C \approx 1.6871, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{316/193}{136/193\sqrt{3}} \approx 1.3273.$$

Tedy polohu můžeme popsat jako

$$y(t) = 1.6871\,\mathrm{e}^{-2t}\sin\left(2\sqrt{3}t + 1.3273\right) + \frac{70}{139}\cos 3t + \frac{120}{193}\sin 3t$$

▲

Příklad 1.9.33.

Těleso o hmotnosti 3.6 kg natáhne pružinu o $\frac{500}{32}$ cm. Neuvažujeme žádný odpor. Na systém působí síla $F(t) = 3.6 \sin 8t$. Těleso je na počátku vytaženo o $\frac{100}{128}$ cm nad rovnovážný bod a bez počátečního impulsu je vypuštěno. Určete jeho pozici v čase t. Určete také první čtyři hodnoty t, kdy má těleso nulovou rychlost.

Řešení. Pro poznámku o použité rovnici viz Příklad 1.9.27.

Máme

$$k = \frac{36}{5/32} = 230.4\, [kg/s^2].$$

Tedy dostáváme počáteční úlohu

$$3.6y'' + 230.4y = 3.6 \sin 8t, \quad y(0) = 1/128, \quad y'(0) = 0.$$

Poloha v čase t je tedy popsána funkcí

$$y(t) = \frac{1}{128}(\sin 8t + \cos 8t - 8t \cos 8t).$$

Rychlost je

$$y'(t) = \frac{1}{128}(8 \cos 8t - 8 \sin 8t - 8 \cos 8t + 64t \sin 8t).$$

Řešíme rovnici $y'(t) = 0$, tj.

$$\begin{aligned} 64t \sin 8t - 8 \sin 8t &= 0 \\ \sin 8t(8t - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Nulovou rychlost má těleso v časech

$$t_1 = \frac{1}{8},\ t_2 = \frac{\pi}{8}, t_3 = \frac{\pi}{4}, t_4 = \frac{3\pi}{8}.$$

▲

I. 10. Geometrické aplikace diferenciálních rovnic prvního řádu

Definice 1.10.1.

Nechť je dána soustava rovinných čar

$$F(x, y, C) = 0 \tag{1.10.1}$$

závislá na jednom parametru C. Protíná-li nějaká jiná rovinná čára všechny čáry uvažované soustavy podle určitého zákona, nazývá se *trajektorie soustavy*. Zvláště důležité jsou *trajektorie izogonální*, které protínají každou čáru pod týmž úhlem $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$. Je-li tento úhel pravý, nazývají se *ortogonální trajektorie*

Poznámka 1.10.2. Z rovnice (1.10.1) vyjádříme parametr C, čímž získáme rovnici

$$G(x, y) = C.$$

Po výpočtu příslušných parciálních derivací a dosazením do rovnice

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x} \operatorname{tg} \varphi\right) y' = \frac{\partial G}{\partial y} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\partial G}{\partial x}$$

získáme diferenciální rovnici, jejímž řešením je soustava izogonálních křivek. Pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$ je diferenciální rovnice ortogonálních trajektorií ve tvaru

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} y' = 0.$$

Příklad 1.10.1.

Určeme trajektorie, které protínají svazek křivek daných předpisem $y = \ln Cx$ s odchylkou $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

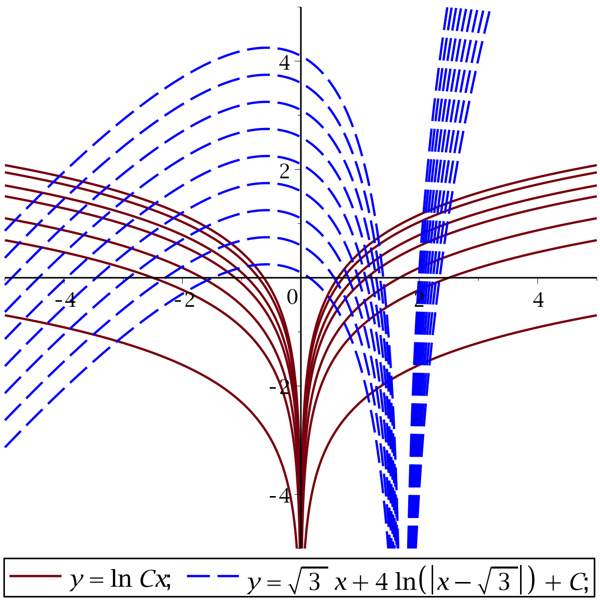
Řešení. Vyjádřením parametru C dostaneme funkci $G(x, y) = \frac{e^y}{x}$. Dosazením příslušných parciálních derivací dostaneme diferenciální rovnici

$$\left(\frac{e^y}{x} - \frac{\sqrt{3}\,e^y}{x^2}\right)y' = \frac{\sqrt{3}\,e^y}{x} + \frac{e^y}{x^2},$$

což po úpravách dává jednoduchou diferenciální rovnici

$$y' = \frac{\sqrt{3}x + 1}{x - \sqrt{3}}.$$

Přímým integrováním dostaneme, že hledané izogonální trajektorie jsou tvaru $y = \sqrt{3}x + 4\ln\left|x - \sqrt{3}\right| + C$ pro $C \in \mathbb{R}$. Zadaný svazek křivek i izogonální trajektorie jsou zobrazeny na obrázku níže.



▲

Příklad 1.10.2.

Určete trajektorie, které protínají svazek kružnic $x^2 + y^2 = 2Cx$ s odchylkou $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

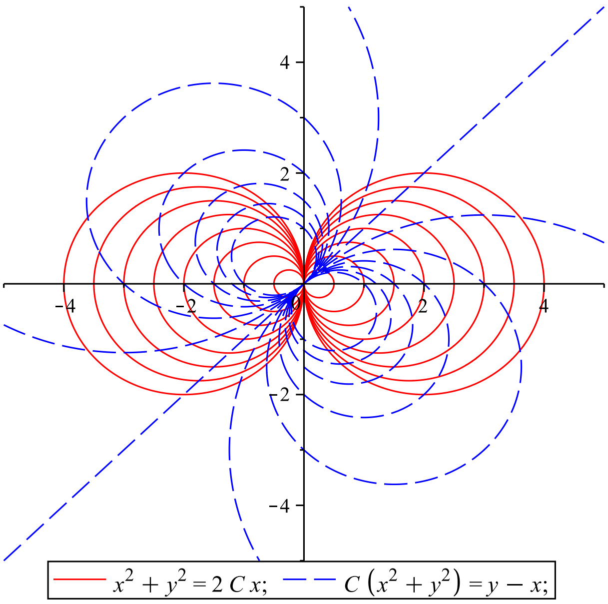
Řešení. Vyjádřením parametru C dostaneme funkci $G(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2x}$. Dosazením příslušných parciálních derivací dostaneme diferenciální rovnici

$$\left(\frac{y}{x} + \frac{x^2 - y^2}{2x^2} \cdot 1\right) y' = \frac{y}{x} \cdot 1 - \frac{x^2 - y^2}{2x^2},$$

což po úpravách dává diferenciální rovnici

$$y' = \frac{-1 + 2\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + 2\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Rovnici vyřešíme pomocí substituce $z = \frac{y}{x}$ a dostaneme, že hledané izogonální trajektorie jsou tvaru $C(y^2 + x^2) - y + x = 0$ pro $C \in \mathbb{R}$. Zadaný svazek křivek i izogonální trajektorie jsou zobrazeny na obrázku níže.



▲

Příklad 1.10.3.

Určete izogonální trajektorie pro soustavu křivek $y = Cx$ a $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

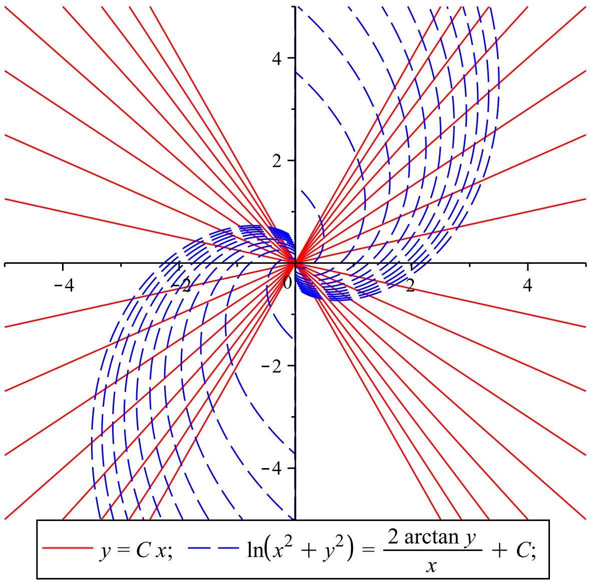
Řešení. Vyjádřením parametru C dostaneme funkci $G(x, y) = \frac{y}{x}$. Dosazením příslušných parciálních derivací dostaneme diferenciální rovnici

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} \cdot 1\right) y' = \frac{1}{x} \cdot 1 + \frac{y}{x^2},$$

což po úpravách dává diferenciální rovnici

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Rovnici vyřešíme pomocí substituce $z = \frac{y}{x}$ a dostaneme, že hledané izogonální trajektorie jsou tvaru $x^2 + y^2 = C\,\mathrm{e}^{2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$ pro $C > 0$. Zadaný svazek křivek i izogonální trajektorie jsou zobrazeny na obrázku níže.



▲

Příklad 1.10.4.

Určete izogonální trajektorie pro soustavu křivek $y = Cx^2$ a $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

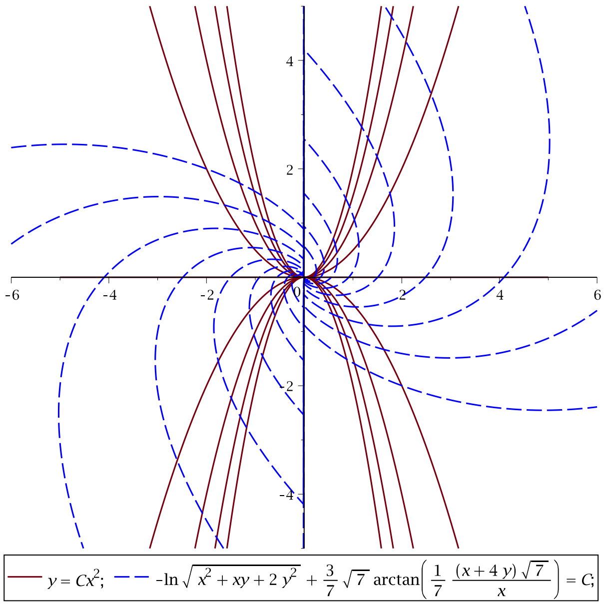
Řešení. Vyjádřením parametru C dostaneme funkci $G(x,y) = \frac{y}{x^2}$. Dosazením příslušných parciálních derivací dostaneme diferenciální rovnici

$$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2y}{x^3} \cdot 1\right) y' = \frac{1}{x^2} \cdot 1 + \frac{2y}{x^3},$$

což po úpravách dává diferenciální rovnici

$$y' = \frac{1 + 2\frac{y}{x}}{1 - 2\frac{y}{x}}.$$

Rovnici vyřešíme pomocí substituce $z = \frac{y}{x}$ a dostaneme, že hledané izogonální trajektorie jsou tvaru $-\ln\sqrt{x^2 + xy + 2y^2} + \frac{3}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x+4y}{\sqrt{7}x} = C$ pro $C \in \mathbb{R}$. Zadaný svazek křivek i izogonální trajektorie jsou zobrazeny na obrázku níže.



▲

Příklad 1.10.5.

Určete izogonální trajektorie pro soustavu hyperbol $xy = C$ a $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

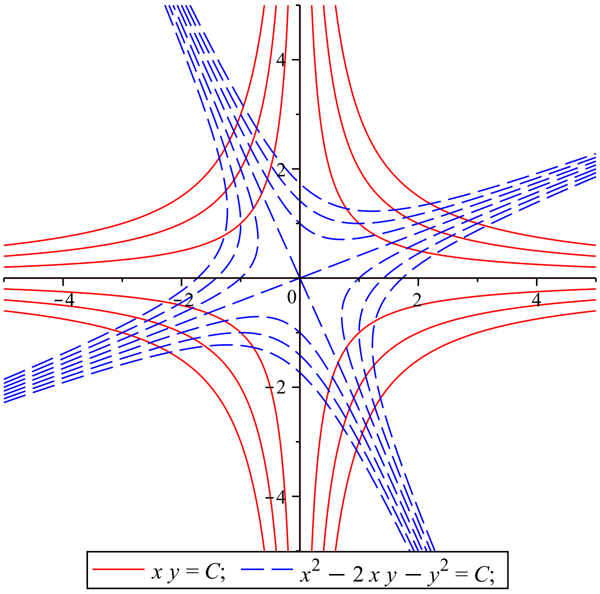
Řešení. Vyjádřením parametru C dostaneme funkci $G(x, y) = xy$. Dosazením příslušných parciálních derivací dostaneme diferenciální rovnici

$$(x + y \cdot 1)\, y' = x \cdot 1 - y,$$

což po úpravách dává diferenciální rovnici

$$y' = \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}.$$

Rovnici vyřešíme pomocí substituce $z = \frac{y}{x}$ a dostaneme, že hledané izogonální trajektorie jsou tvaru $x^2 - 2xy - y^2 = C$ pro $C \in \mathbb{R}$. Zadaný svazek křivek i izogonální trajektorie jsou zobrazeny na obrázku níže.



▲

Příklad 1.10.6.

Určete izogonální trajektorie pro soustavu křivek $x^2 + y^2 = C^2$ a $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

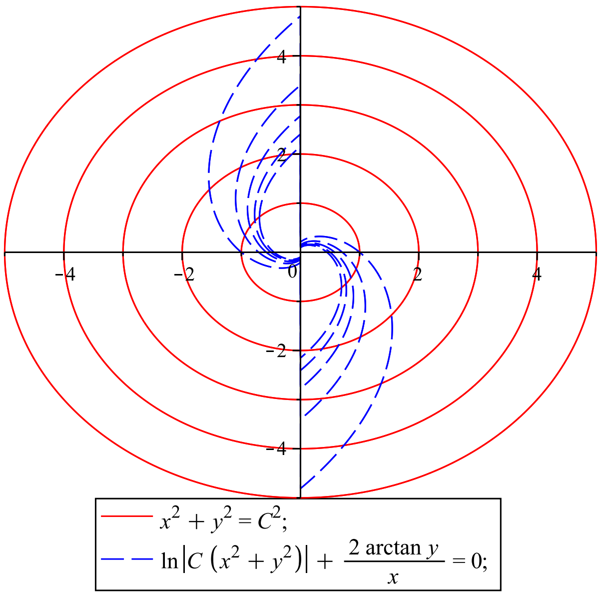
Řešení. Vyjádřením parametru C^2 dostaneme funkci $G(x, y) = x^2 + y^2$. Dosazením příslušných parciálních derivací dostaneme diferenciální rovnici

$$(2y + 2x \cdot 1)\, y' = 2y \cdot 1 - 2x,$$

což po úpravách dává diferenciální rovnici

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}.$$

Rovnici vyřešíme pomocí substituce $z = \frac{y}{x}$ a dostaneme, že hledané izogonální trajektorie jsou tvaru $\ln \left| C(x^2 + y^2) \right| + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ pro $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zadaný svazek křivek i izogonální trajektorie jsou zobrazeny na obrázku níže.



▲

Příklad 1.10.7.

Určete ortogonální trajektorie pro soustavu parabol $y = Cx^2$.

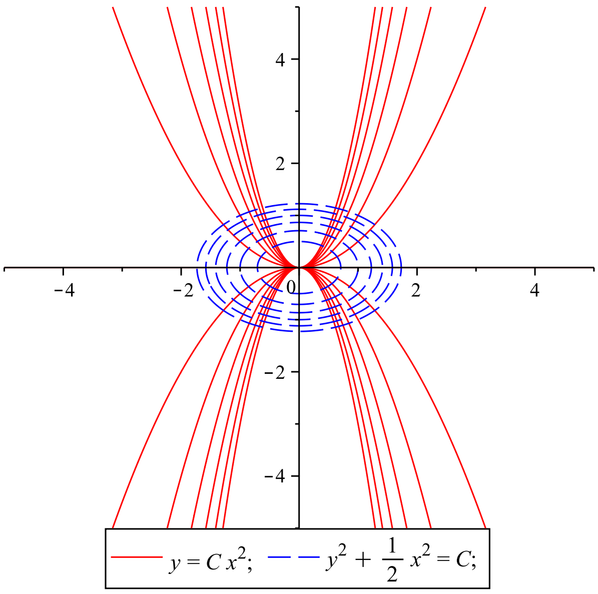
Řešení. Máme $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Vyjádřením parametru C^2 dostaneme funkci $G(x, y) = \frac{y}{x^2}$. Dosazením příslušných parciálních derivací dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{1}{x^2} + 2\frac{y}{x^3}y' = 0,$$

což po úpravách dává diferenciální rovnici

$$y' = -\frac{x}{2y}.$$

Rovnici vyřešíme separací proměnných a dostaneme, že hledané ortogonální trajektorie jsou tvaru $y^2 + \frac{x^2}{2} = C$ pro $C \in \mathbb{R}$. Zadaný svazek křivek i ortogonální trajektorie jsou zobrazeny na obrázku níže.



▲

Příklad 1.10.8.

Určete ortogonální trajektorie pro soustavu křivek $x^2 + y^2 = 2Cx$.

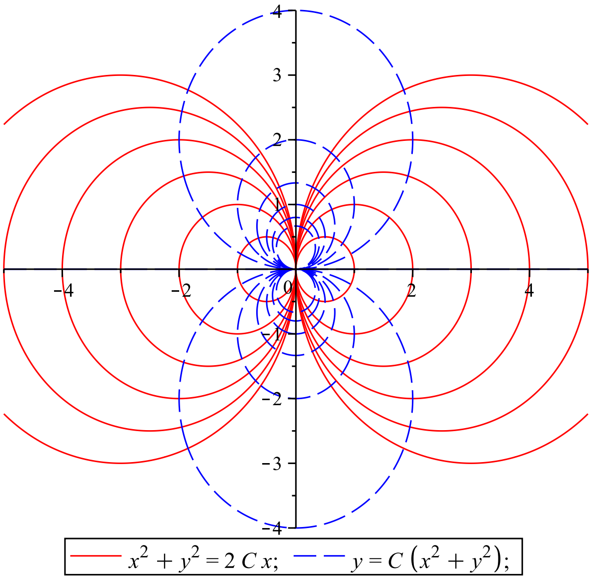
Řešení. Máme $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Vyjádřením parametru C^2 dostaneme funkci $G(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2x}$. Dosazením příslušných parciálních derivací dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{y}{x} - \frac{x^2 - y^2}{2x^2} y' = 0,$$

což po úpravách dává diferenciální rovnici

$$y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Rovnici vyřešíme pomocí substituce $z = \frac{y}{x}$ a dostaneme, že hledané ortogonální trajektorie jsou tvaru $C(x^2 + y^2) - y = 0$ pro $C \in \mathbb{R}$. Zadaný svazek křivek i ortogonální trajektorie jsou zobrazeny na obrázku níže.



▲

Příklad 1.10.9.

Určete ortogonální trajektorie pro soustavu křivek $x^2 + 4y = Cx$.

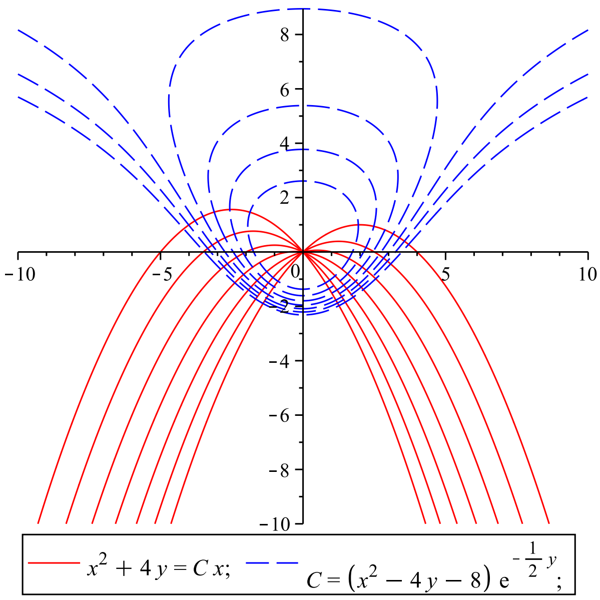
Řešení. Máme $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Vyjádřením parametru C^2 dostaneme funkci $G(x, y) = \frac{x^2+4y}{x}$. Dosazením příslušných parciálních derivací dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{4}{x} - \frac{x^2 - 4y}{x^2} y' = 0,$$

což po úpravách dává diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y' &= \frac{4x}{x^2 - 4y} \\ \frac{1}{x'} &= \frac{4x}{x^2 - 4y} \\ xx' - \frac{x^2}{4} &= -y. \end{aligned}$$

Rovnici vyřešíme pomocí substituce $z = x^2$ a dostaneme, že hledané ortogonální trajektorie jsou tvaru $C = (x^2 - 4y - 8)\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}$ pro $C \in \mathbb{R}$. Zadaný svazek křivek i ortogonální trajektorie jsou zobrazeny na obrázku níže.



▲

Kapitola II.
Metrické prostory

Definice 2.1.

Metrickým prostorem nazýváme dvojici (P, ρ), kde P je libovolná neprázdná množina a zobrazení $\rho : P \times P \to \mathbb{R}_+$ splňuje pro každé $x, y, z \in P$ následující tři axiomy:

i) $\rho(x, y) = 0$ právě když $x = y$ (tzv. axiom totožnosti);

ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (tzv. axiom symetrie);

iii) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ (tzv. trojúhelníková nerovnost).

Zobrazení ρ nazýváme *metrikou* na P, prvky množiny P obvykle nazýváme *body* prostoru (P, ρ) číslo $\rho(x, y)$ nazýváme *vzdáleností* bodů x, y v prostoru (P, ρ).

Poznámka 2.2. Pro $x = [x_1, \ldots, x_n]$, $y = [y_1, \ldots, y_n] \in \mathbb{R}^n$ definujeme metriky:

$$\begin{aligned}
\rho_1(x, y) &:= \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \quad \textit{součtová metrika},\\
\rho_\infty(x, y) &:= \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|, \quad \textit{maximální metrika},\\
\rho_2(x, y) &:= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}, \quad \textit{euklidovská metrika}.
\end{aligned}$$

Na množině všech reálných funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$ (značíme $\mathrm{C}[a, b]$) definujeme pro $f, g \in \mathrm{C}[a, b]$ následující metriky:

$$\begin{aligned}
\rho_c(f, g) &:= \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|, \quad \textit{metrika stejnoměrné konvergence},\\
\rho_I(f, g) &:= \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x, \quad \textit{integrální metrika}.
\end{aligned}$$

Definice 2.3.

Nechť (P_1, ρ_1) a (P_2, ρ_2) jsou metrické prostory. Zobrazení $f : P_1 \to P_2$ se nazývá *izometrické*, jestliže pro každé $x, y \in P_1$ platí

$$\rho_2\left(f(x), f(y)\right) = \rho_1(x, y).$$

Definice 2.4.

Mějme metrický prostor (P, ρ) a nechť $A \subseteq P$. Množina $\overline{A} := \{x \in P : \ \rho(x, A) = 0\}$ se nazývá *uzávěr* množiny A. Množina A se nazývá uzavřená, pokud $A = \overline{A}$. Množina A se nazývá *otevřená*, jestliže její komplement $P \setminus A$ je uzavřená množina.

Definice 2.5.

Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů v metrickém prostoru (P, ρ). Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* k bodu $x_0 \in P$ (je konvergentní, má limitu x_0) a píšeme $x_n \to x_0$, jestliže
$$\rho(x_n, x_0) \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty,$$
tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *cauchyovská*, jestliže
$$\rho(x_m, x_n) \to 0 \quad \text{pro } \min\{m, n\} \to \infty,$$
tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n > n_0$ je $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Definice 2.6.

Metrický prostor (P, ρ) se nazývá *úplný*, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost má limitu (tedy je konvergentní).

Definice 2.7.

Nechť (P, ρ) je metrický prostor a F je zobrazení prostoru P do sebe, tj. $F : P \to P$. Bod $x_0 \in P$ se nazývá *pevným bodem* zobrazení F, jestliže
$$F(x_0) = x_0.$$

Definice 2.8.

Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a nechť $F : P \to Q$. Řekneme, že zobrazení F je *lipschitzovské*, jestliže existuje konstanta $L \in \mathbb{R}_+^0$ (tzv. *Lipschitzova konstanta*) taková, že
$$\sigma\left(F(x), F(y)\right) \leq L\rho(x, y) \quad \text{pro každé } x, y \in P.$$
Jestliže $L < 1$, pak se zobrazení F nazývá *kontrakce* (s konstantou L).

Věta 2.9.

Nechť (P, ρ) je úplný metrický prostor a nechť $F : P \to P$ je kontrakce. Pak existuje právě jeden pevný bod zobrazení $F(x)$.

Věta 2.10.

Nechť funkce g zobrazuje interval $[a, b]$ do sebe a nechť má na tomto intervalu derivaci. Jestliže existuje číslo $\alpha \in [0, 1)$ tak, že

$$\left|g'(x)\right| \leq \alpha \quad \forall x \in [a, b],$$

pak v intervalu $[a, b]$ existuje pevný bod ξ funkce $g(\cdot)$ a posloupnost postupných aproximací k němu konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci $x_0 \in [a, b]$.

Poznámka 2.11. Pevný bod je možné získat pomocí tzv. *metody postupných aproximací*. Nechť jsou splněny předpoklady Věty 2.9 a nechť $x_1 \in P$ je libovolné. Definujme členy posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jakožto

$$x_2 = F(x_1), \quad x_3 = F(x_2), \quad \dots, \quad x_n = F(x_{n-1}), \quad \dots$$

Díky předpokladům věty se dá ukázat, že takto definovaná posloupnost konverguje k pevnému bodu zobrazení $F(x)$.

Příklad 2.1.

Určete vzdálenost bodů $A = [0,1]$, $B = [1,2]$ v součtové, euklidovské a maximální metrice.

Řešení.

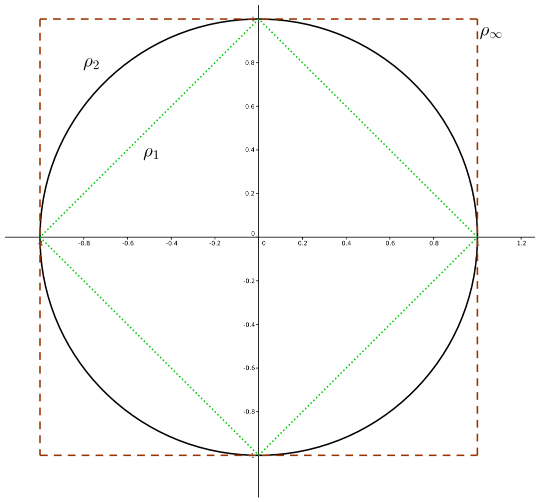
$$\begin{aligned}
\rho_1(A,B) &= |0-1| + |1-2| = 2,\\
\rho_2(A,B) &= \sqrt{0-1^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2},\\
\rho_\infty(A,B) &= \max\{|0-1|, |1-2|\} = 1.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.2.

Popište jednotkovou kružnici v $\mathbb{R}^2$ a jednotkovou kouli v $\mathbb{R}^3$ v metrikách $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$.

Řešení. Jednotkové kružnice v $\mathbb{R}^2$ jsou na obrázku níže.



Jako jednotkovou koulí v $\mathbb{R}^3$ v ρ_2 dostaneme „standardní" kouli, v ρ_∞ jde o povrch krychle s vrcholy $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, v ρ_1 se jedná o povrch pravidelného osmistěnu s vrcholy

$$(1,0,0), (-1,0,0), (0,1,0), (0,-1,0), (0,0,1), (0,0,1).$$

▲

Příklad 2.3.

Určete vzdálenost funkcí $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ v metrice stejnoměrné konvergence a v integrální metrice.

Řešení.

$$\rho_c(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |x - \sqrt{x}| = \frac{1}{4},$$

$$\rho_I(f,g) = \int_0^1 |x - \sqrt{x}| = \int_0^1 \sqrt{x} - x = \frac{1}{6}.$$

▲

Příklad 2.4.

Najděte funkci tvaru $f(x) = ax$, která má v prostoru $C[0,1]$ nejmenší vzdálenost od funkce $g(x) = x^2$ v metrice stejnoměrné konvergence.

Řešení. Musíme najít minimum pro

$$F(a) = \rho_c(ax, x^2) = \max_{x\in[0,1]} |x^2 - ax|, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Položme $G(x,a) = x|x-a|$.

(i) Nechť $a \geq 1$, potom $G(x,a) = x(a-x)$ a $G_x(x,a) = a - 2x = 0$ pro $x = a/2$. $G(x,a)$ může mít maximum v $0, a/2, 1$.

$$G(0,a) = 0, \qquad G(a/2,a) = a^2/4, \qquad G(1,a) = a-1.$$

Tedy

$$F(a) = \begin{cases} a^2/4, & a \in [1,2], \\ a-1, & a \in [2,\infty), \end{cases}$$

neboť $a^2/4 = a - 1$ pro $a = 2$.

(ii) Nechť $a \in [0,1]$, potom

$$G(x,a) = \begin{cases} x(a-x), & x \in [0,a], \\ x(x-a), & x \in [a,1]. \end{cases}$$

$G(x,a)$ může mít maximum v $0, a/2, a, 1$.

$$G(0,a) = 0, \qquad G(a/2,a) = a^2/4, \qquad G(a,a) = 0, \qquad G(1,a) = 1-a.$$

Tedy

$$F(a) = \begin{cases} 1-a, & a \in [0, 2\sqrt{2}-2], \\ a^2/2, & a \in [2\sqrt{2}-2, 1), \end{cases}$$

neboť $a^2/4 = 1 - a$ pro $a = 2\sqrt{2} - 2$.

(iii) Nechť $a < 0$, potom $G(x,a) = x(x-a)$ a může mít maximum v $0, a/2, 1$.

$$G(0,a) = 0, \qquad G(a/2,a) = a^2/4, \qquad G(1,a) = 1-a.$$

Tedy $F(a) = 1 - a, a \in (-\infty, 0]$.

Celkem máme

$$F(a) = \begin{cases} 1-a, & a \in (-\infty, 2\sqrt{2}-2), \\ a^2/4, & a \in [2\sqrt{2}-2, 2), \\ a-1, & a \in [2,\infty). \end{cases}$$

Tato funkce je spojitá. Je klesající pro $a \in (-\infty, 2\sqrt{2}-2)$ a rostoucí pro $a \in (2\sqrt{2}-2, \infty)$ minimum je tedy pro $a = 2\sqrt{2} - 2$ s hodnotou $F(2\sqrt{2}-2) = 3 - 2\sqrt{2}$. ▲

Příklad 2.5.

Pro $x \in [0,1]$ určete hodnotu a tak, aby funkce $f(x) = ax$ měla nejmenší vzdálenost od funkce $g(x) = x^2$

i) v integrální metrice,

ii) v metrice

$$\rho(f,g) := \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Řešení. i) Hledáme minimum funkce $F(a) = \rho_I(ax, x^2)$. Pro $a \geq 1$ máme

$$F(a) = \int_0^1 ax - x^2 \mathrm{d}x = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}.$$

Pro $a \in [0,1]$ máme

$$F(a) = \int_0^1 |ax - x^2| \mathrm{d}x = \int_0^a ax - x^2 \mathrm{d}x + \int_a^1 x^2 - ax \mathrm{d}x = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}.$$

Pro $a < 0$ máme

$$F(a) = \int_0^1 x^2 - ax \mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{a}{2}.$$

Funkce je $F(a)$ je klesající pro $a \in (-\infty, 0)$ a rostoucí pro $a \in (1, \infty)$. Minimum tedy leží v intervalu $[0,1]$. Máme $F'(a) = a^2 - \frac{1}{2}$, uvažujeme tedy body $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1$ a porovnáním funkčních hodnot zjistíme, že minimum nastává pro $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ s hodnotou $F(a) = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$.

ii) Hledáme minimum funkce

$$F(a) = \left(\int_0^1 \left(x^2 - ax\right)^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{5} - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3}} = \frac{1}{30}\sqrt{180 - 450a + 300a^2}.$$

Protože

$$F'(a) = \frac{600a - 450}{\sqrt{180 - 450a + 300a^2}},$$

dostáváme stacionární bod $x = 3/4$. Vlevo od něj je funkce klesající, vpravo rostoucí, jde tedy o minimum s hodnotou $F(3/4) = \frac{\sqrt{5}}{20}$.

▲

Příklad 2.6.

Nechť $P = \mathbb{R}$. *Rozhodněte, zda funkce* $\rho(x,y) = \ln(1 + |x-y|)$ *zadává metriku na* $P \times P \to \mathbb{R}$.

Řešení. (i) $\rho(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y:\; \ln(1+|x-y|) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y.$

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x):\; \ln(1+|x-y|) = \ln(1+|y-x|).$

(iii) $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z):$

$$\begin{aligned}\ln(1+|x-y|) + \ln(1+|y-z|) &= \ln[(1+|x-y|)(1+|y-z|)]\\ &= \ln(1+|x-y|+|y-z|+|x-y|\cdot|y-z|)\\ &\geq \ln(1+|x-z|+|x-y|\cdot|y-z|) \geq \ln(1+|x-z|).\end{aligned}$$

Tedy skutečně se jedná o metriku. ▲

Příklad 2.7.

Nechť $P = \mathbb{C}$. Rozhodněte, zda funkce

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \min\{|x|+|y|\,,\ |x-1|+|y-1|\}\,, & \textit{pokud } x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

zadává metriku na $P \times P \to \mathbb{R}$.

Řešení. (i) $\rho(x,y) = 0 \iff x = y: \ x = 0 = y$ nebo $x = 1 = y$.

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$: plyne přímo z definice.

(iii) $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$: zajímá nás

$$\min\{|x|+|y|, |x-1|+|y-1|\} + \min\{|y|+|z|, |y-1|+|z-1|\}$$

a mohou nastat tři různé případy (čtvrtá možnost je jen přeznačením druhé).

1. $|x|+|y| \leq |x-1|+|y-1|$ a $|y|+|z| \leq |y-1|+|z-1|$, pak

$$\begin{aligned} \rho(x,z) = \min\{|x|+|z|, |x-1|+|z-1|\} &\leq |x|+|z| \\ &\leq |x|+|y|+|y|+|z| = \rho(x,y)+\rho(y,z). \end{aligned}$$

2. $|x|+|y| \leq |x-1|+|y-1|$ a $|y|+|z| \geq |y-1|+|z-1|$, pak

$$\begin{aligned} \rho(x,y)+\rho(y,z) = |x|+|y|+|y-1|+|z-1| &= |x|+|y|+|1-y|+|z-1| \\ &\geq |x|+|y|+|z-y| \geq |x|+|z| \geq \rho(x,z). \end{aligned}$$

3. $|x|+|y| \geq |x-1|+|y-1|$ a $|y|+|z| \geq |y-1|+|z-1|$, pak

$$\begin{aligned} \rho(x,z) =\leq |x-1|+|z-1| \leq |x-1|+|y-1|&+|y-1|+|z-1| \\ &= \rho(x,y)+\rho(y,z). \end{aligned}$$

Tedy skutečně se jedná o metriku (tzv. *metrika na železnici se dvěma uzly*). ▲

Příklad 2.8.

Nechť $P = \mathbb{R}$. *Rozhodněte, zda funkce* $\rho(x, y) = \left|x^2 - y^2\right|$ *zadává metriku na* $P \times P \to \mathbb{R}$.

Řešení. Protože $\rho(-1, 1) = |1 - 1| = 0$ a přitom $-1 \neq 1$, nejedná se o metriku. ▲

Příklad 2.9.

Určete konstantu k tak, aby zobrazení F definované předpisem $F(f(x)) = k\,f(x^3)$ bylo izometrické zobrazení prostoru $\mathrm{C}[-1,1]$ s metrikou

$$\sigma(f,g) = \int_{-1}^{1} x^2\,|f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

(můžete ověřit, že je to skutečně metrika) na prostor $(\mathrm{C}[-1,1], \rho_I)$.

Řešení.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2\left|kf(x^3) - kg(x^3)\right|\,\mathrm{d}x &= |k|\int_{-1}^{1} x^2\left|f(x^3) - g(x^3)\right|\,\mathrm{d}x\\ &= \left|t = x^3\right| = \frac{|k|}{3}\int_{-1}^{1} x^2\,|f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

tedy $|k| = 3$. Hledané hodnoty jsou $k = \pm 3$. ▲

Příklad 2.10.

Udejte příklad, kdy sjednocení nekonečného počtu uzavřených množin není uzavřená množina.

Řešení. Například
$$\bigcup_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] = (0,1).$$
▲

Příklad 2.11.

Nechť pro $\varphi \in \mathbb{R}$ je

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}; \qquad \rho(A,B) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}, \quad A, B \in P;$$

$$T_\varphi : P \to \mathbb{R}^2, \quad T_\varphi(A) = [a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi, -a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi].$$

Ukažte, že T_φ je izometrické (zachovávající vzdálenost).

Řešení. Přímým výpočtem ukážeme, že

$$\rho(T_\varphi(A), T_\varphi(B)) = \rho(A,B).$$

$$\begin{aligned}
&\rho(T_\varphi(A), T_\varphi(B)) \\
&= \sqrt{(a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi - b_1 \cos\varphi - b_2 \sin\varphi)^2 + (-a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi - b_2 \cos\varphi)^2} \\
&= \sqrt{(a_1-b_1)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + (a_2-b_2)^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} \\
&= \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2} = \rho(A,B).
\end{aligned}$$

▲

Příklad 2.12.

Je $\mathbb{Q}$ úplný prostor?

Řešení. Není, např.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \notin \mathbb{Q}.$$

▲

Příklad 2.13.

Uvažujme metrický prostor (M, ρ), *kde* $M = \mathbb{R}^2$ *a pro* $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$ *je*

$$\rho(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & \text{leží-li body na stejné polopřímce z počátku;} \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je tento prostor (tzv. pampeliškový prostor) úplný?

Řešení. Je úplný, neboť Cauchyovská posloupnost může být pouze na stejné polopřímce, nebo do počátku. ▲

Příklad 2.14.

Uvažujme metrický prostor (M, ρ)*, kde* $M = \mathbb{R}$ *a*

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & |x - y| \in \mathbb{I}; \\ 1/2, & |x - y| \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Je tento prostor úplný?

Řešení. Je úplný, neboť Cauchyovská posloupnost musí být skorostacionární $\Rightarrow$ je konvergentní. ▲

Příklad 2.15.

Metrický prostor (M, ρ) *je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti* $\{x_n\} \subseteq M$ *lze vybrat konvergentní podposloupnost* $\{x_{n_k}\}$. *(Tzv. sekvenciální kompaktnost.) Nechť*

$$M = \ell_2 = \left\{ x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \right\},$$

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2}, \quad x, y \in M.$$

Je tento prostor kompaktní? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, udejte jako protipříklad ohraničenou a uzavřenou posloupnost.

Řešení. Posloupnost $\{(1, 0, 0, \ldots), (0, 1, 0, \ldots), (0, 0, 1, \ldots), \ldots\}$ je ohraničená a uzavřená, ale nekonverguje a nelze z ní vybrat konvergentní podposloupnost v ℓ_2 (vzdálenost vždy $\sqrt{2}$).

▲

Příklad 2.16.

Určete interval, kde jsou pro funkci $f(x) = \frac{x^2-1}{3}$ *splněny předpoklady Banachovy věty o pevném bodu, a metodou postupných aproximací najděte tento bod.*

Řešení.

$$\begin{aligned} |f'(x)| = \left|\frac{2x}{3}\right| &< 1 \\ \frac{2}{3}|x| &< 1 \\ |x| &< \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

tedy $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Pevný bod budeme hledat pomocí

$$x_n = \frac{x_{n-1}^2 - 1}{3},$$

tj. pro $x_0 = \frac{1}{2}$ máme

$$x_1 = -\frac{1}{4}, \quad x_2 = -\frac{5}{16}, \quad x_3 = -\frac{77}{256}, \dots, \quad x_{10} = -0.302\,775\,664\,9, \dots$$

(skutečné řešení je $\frac{3-\sqrt{13}}{2} \approx -0.302\,775\,637$). ▲

Příklad 2.17.

Pomocí Banachovy věty o pevném bodu a metodou postupných aproximací najděte řešení rovnice

$$\mathrm{e}^x - 2x - 1 = 0.$$

Řešení. Nejprve vyjádříme x jako

$$x = \ln(2x+1).$$

Pevný bod budeme hledat pomocí

$$x_n = \ln(2x_{n-1}+1),$$

tj. pro $x_0 = 1$ máme

$$x_1 = \ln 3, \quad x_2 = 1.162\,283\,114, \quad x_3 = 1.201\,339\,208, \dots, \quad x_{10} = 1.255\,323\,263, \dots$$

(skutečné řešení je $\xi \approx 1.256\,431\,209$).

Poznamenejme, že vzhledem k

$$|f'(x)| = \left|\frac{2}{2x+1}\right| < 1$$
$$2 < |2x+1|$$

je $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. ▲

Příklad 2.18.

S pomocí Banachovy věty o pevném bodu vyřešte Cauchyovu úlohu

$$y' = \frac{1}{2}y, \quad y(0) = 1.$$

Řešení. Protože $f(y) = \frac{1}{2}y, f'(y) = \frac{1}{2} < 1$, můžeme ihned pokračovat

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}y \qquad \Big| \int_0^x \mathrm{d}t \\ y(x) - y(0) &= \frac{1}{2}\int_0^x y(t)\mathrm{d}t \\ y(x) &= 1 + \frac{1}{2}\int_0^x y(t)\mathrm{d}t \\ y_n(x) &= 1 + \frac{1}{2}\int_0^x y_{n-1}(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Tedy pro $y_0 = 1$ máme

$$y_1 = 1 + \frac{x}{2}, \quad y_2 = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}, \dots$$

a řešení je

$$y(x) = 1 + \frac{\frac{x}{2}}{1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3!} + \cdots = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

▲

Kapitola III. Diferenciální počet funkcí více proměnných

III. 1. Definiční obor a vrstevnice

Definice 3.1.1 (*Funkce více proměnných*).

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. Předpis (zobrazení) $f : M \to \mathbb{R}$, který každému $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n] \in M$ přiřadí právě jedno $y \in \mathbb{R}$, se nazývá *(reálná) funkce n (reálných) proměnných*. Množina M se nazývá *definiční obor* funkce f a značí se $D(f)$. *Oborem hodnot* funkce f rozumíme množinu

$$H(f) := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists \boldsymbol{x} \in D(f) \text{ takové, že } f(\boldsymbol{x}) = y\}.$$

Jestliže není společně s předpisem f zadána množina M (v takovém případě píšeme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), pak definičním oborem $D(f)$ funkce f rozumíme největší podmnožinu (vzhledem k inkluzi) v $\mathbb{R}^n$, pro kterou má výraz $f(\boldsymbol{x})$ smysl, tj.

$$D(f) := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R} \text{ s vlastností } f(\boldsymbol{x}) = y\right\}.$$

Taková množina $D(f)$ se nazývá *přirozeným definičním oborem*.

Pro $n = 2$ se proměnné obvykle značí jako x, y, tj. píšeme $f(x, y)$. Pro $n = 3$ se proměnné obvykle značí jako x, y, z, tj. píšeme $f(x, y, z)$. Pro $n \geq 4$ se proměnné obvykle značí pomocí indexů jako $x_1, \dots, x_n$. Někdy (viz např. předchozí definice) budeme místo $[x_1, \dots, x_n]$ psát pouze $\boldsymbol{x}$ (na rozdíl od $x \in \mathbb{R}$).

Definice 3.1.2 (*Graf funkce*).

Grafem funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ rozumíme množinu

$$G(f) := \Big\{[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)] \in \mathbb{R}^{n+1} \mid [x_1, \dots, x_n] \in D(f)\Big\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

(tedy hodnotu $f(x_1, \dots, x_n)$ chápeme jako $n + 1$ souřadnici).

Pro $n = 2$ si lze graf funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ představit jako rovinu nebo její část zakřivenou v $\mathbb{R}^3$. Ovšem pro $n \geq 3$ již tuto možnost názorné představy ztrácíme, a proto graf funkce

ztrácí na významu jakožto prostředek k získání představy o chování funkce n proměnných. Jediný graf funkce tří proměnných, který ještě dokážeme „znázornit“, je graf funkce $f(x, y, z) \equiv 0$ (víte, co je jejím grafem?).

Dalším užitečným nástrojem při studiu funkcí dvou nebo tří proměnných jsou jejich vrstevnice.

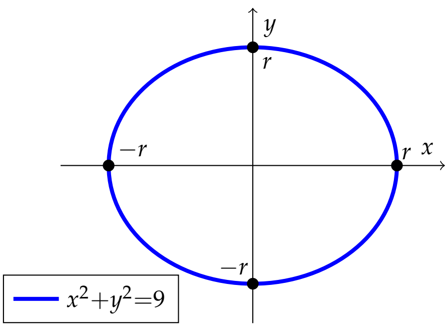
Definice 3.1.3 (*Vrstevnice funkce*).

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pro $c \in \mathbb{R}$ rozumíme *vrstevnicí funkce f na úrovni c* množinu

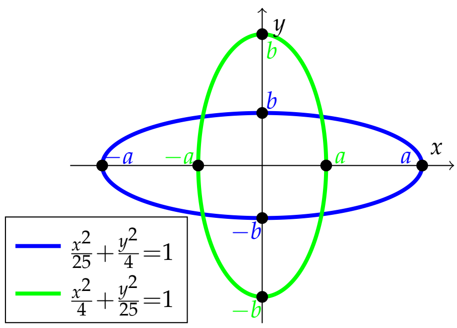
$$f_c := \{\boldsymbol{x} \in D(f) \mid f(\boldsymbol{x}) = c\}.$$

Předchozí definice samozřejmě připouští také případy $f_c = \mathbb{R}^n$ nebo $f_c = \emptyset$, přičemž druhá možnost nastane právě tehdy, když $c \notin H(f)$. Ještě poznamenejme, že mezi definičním oborem $D(f)$ a vrstevnicemi funkce f je velmi úzký vztah. Z definice funkce vyplývá, že každým bodem množiny $D(f)$ prochází právě jedna vrstevnice, takže definiční obor je totožný se sjednocením všech vrstevnic.

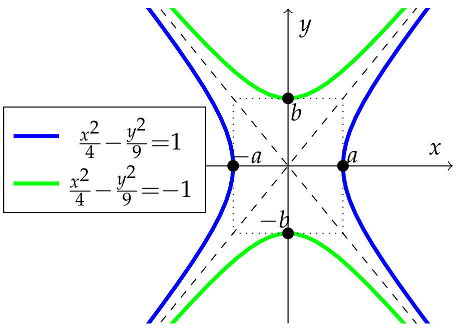
K vyšetřování definičních oborů a vrstevnic (případně grafickému znázorňování dalších vlastností) funkcí více je velmi užitečné si pamatovat analytická vyjádření některých důležitých křivek v $\mathbb{R}^2$ (tzv. kuželosečky) a ploch v $\mathbb{R}^3$ (tzv. kvadriky). Proto si je nyní připomeneme s rovnicemi v tzv. normálním tvaru (pro konstanty platí $a, b, c, d, r > 0$, $p, q \neq 0$) i s jejich grafickým znázorněním.



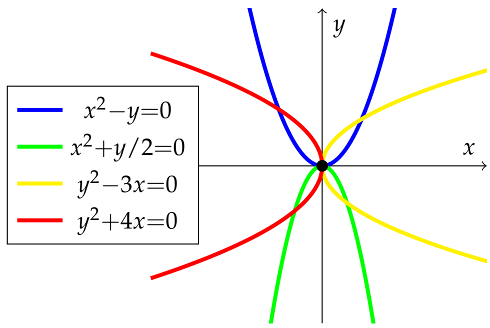
Kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.



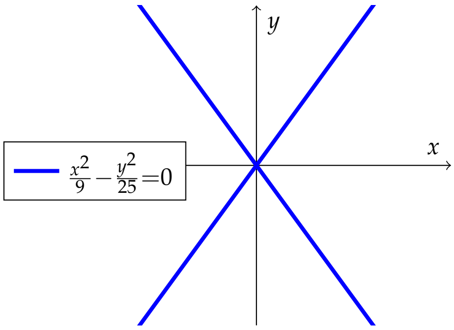
Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



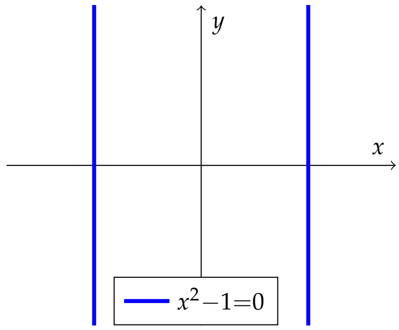
Hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$.



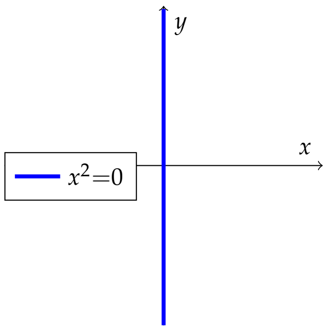
Parabola $x^2 + 2py = 0$ nebo $y^2 + 2px = 0$.



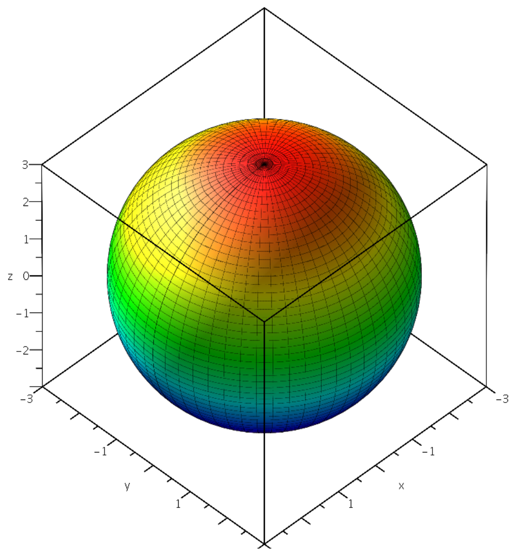
Dvojice reálných různoběžek $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.



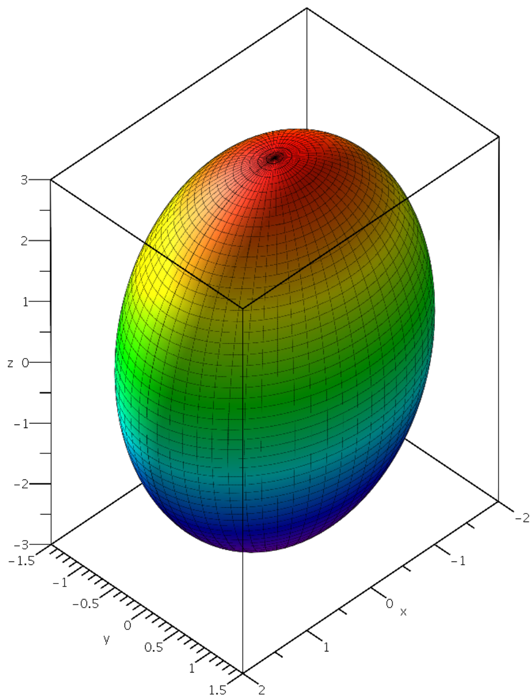
Dvojice reálných rovnoběžek $x^2 - c^2 = 0$.



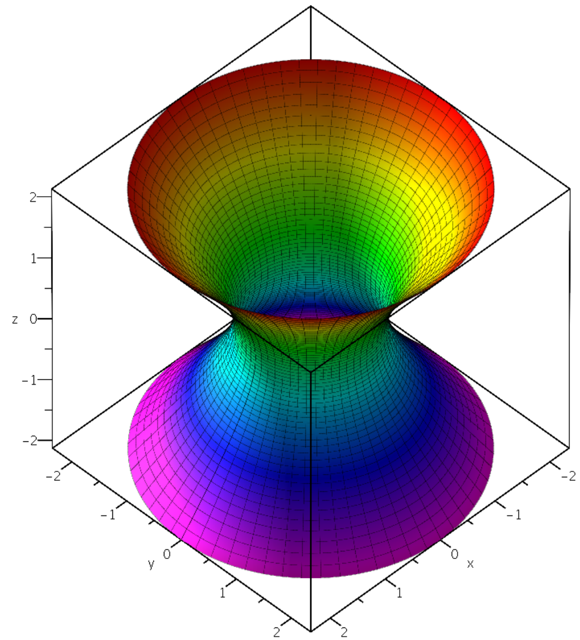
Dvojnásobná přímka $x^2 = 0$.



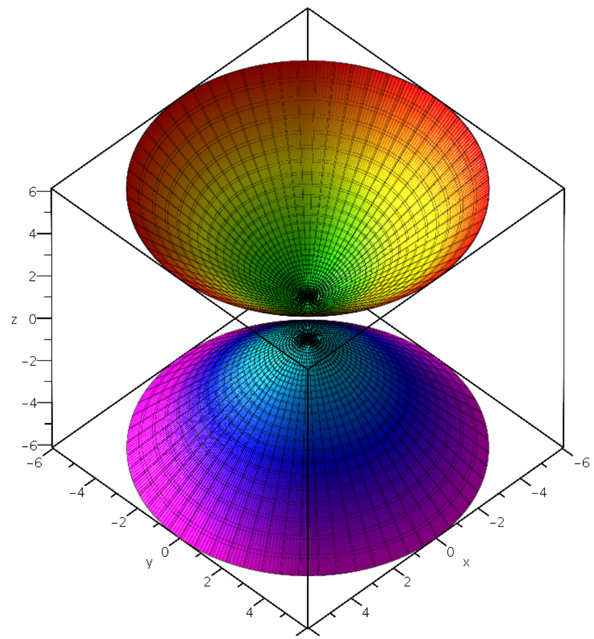
Kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.



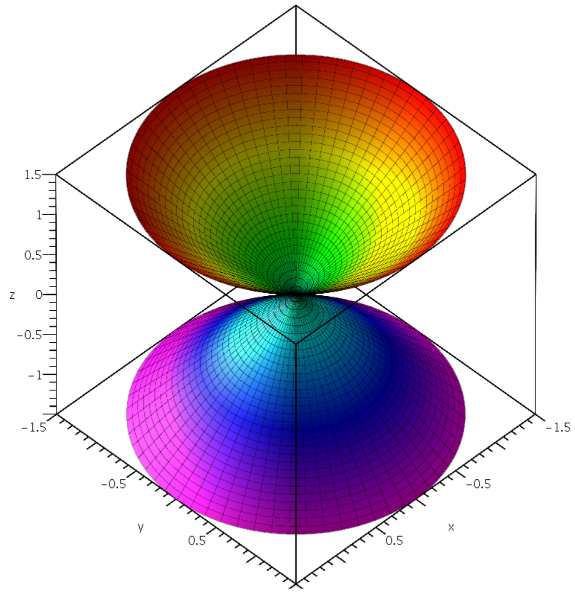
Elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



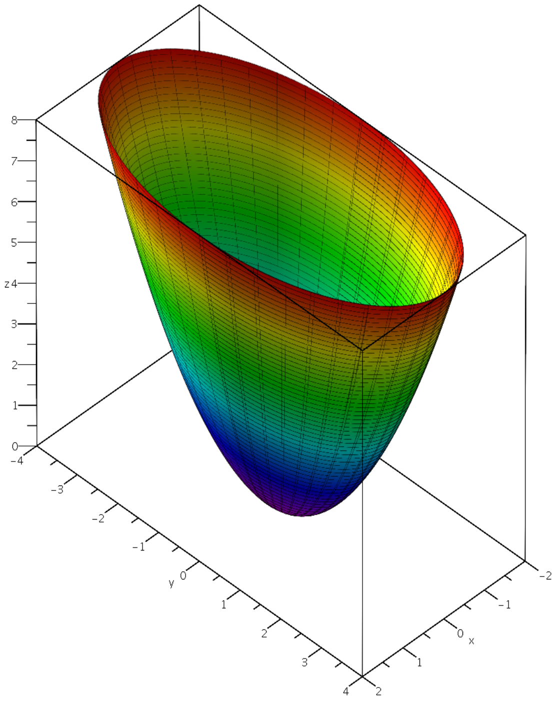
Jednodílný hyperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$



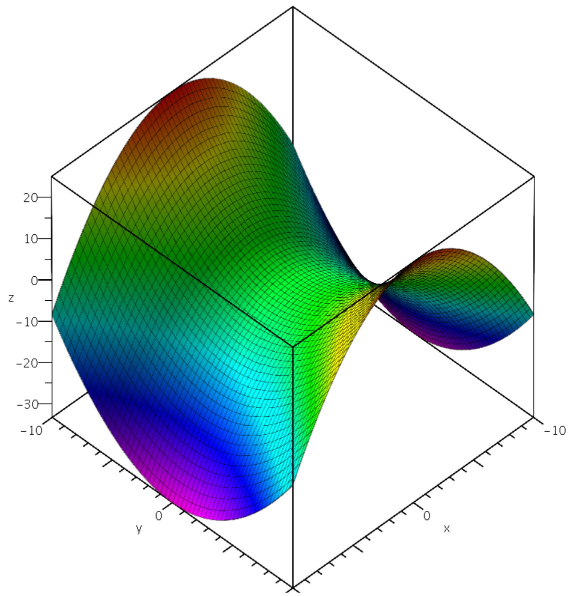
Dvoudílný hyperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$



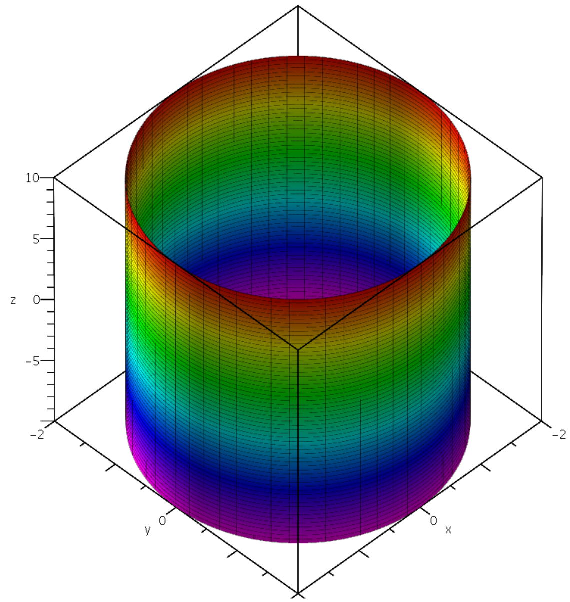
Kužel $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$



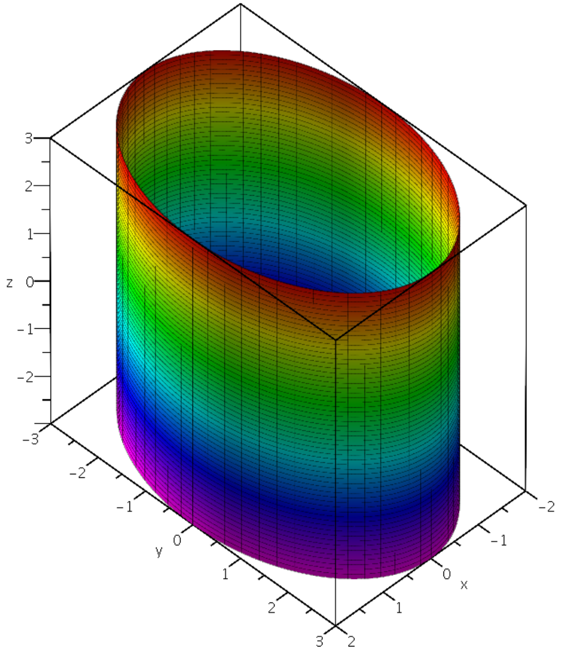
Eliptický paraboloid $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$.



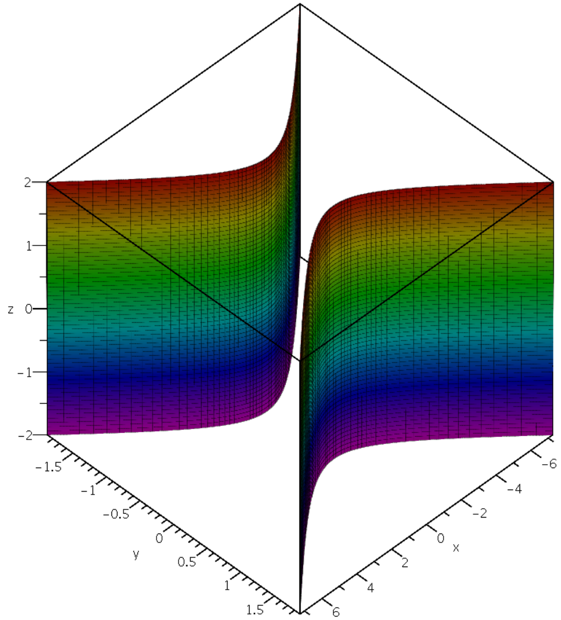
Hyperbolický paraboloid $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$.



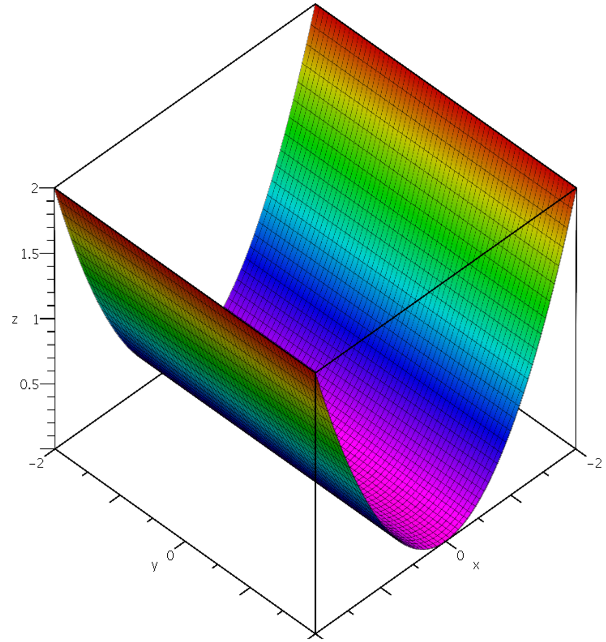
Rotační válec $x^2 + y^2 = r^2$.



Eliptický válec $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Hyperbolický válec $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Parabolický válec $y^2 = 2px$ nebo $x^2 = 2qy$.

- Dvojnásobný bod $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.
- Dvojnásobná přímka $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$.
- Dvojice různoběžných rovin $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$.
- Dvojice rovnoběžných rovin $x^2 - d^2 = 0$.
- Dvojnásobná rovina $x^2 = 0$.

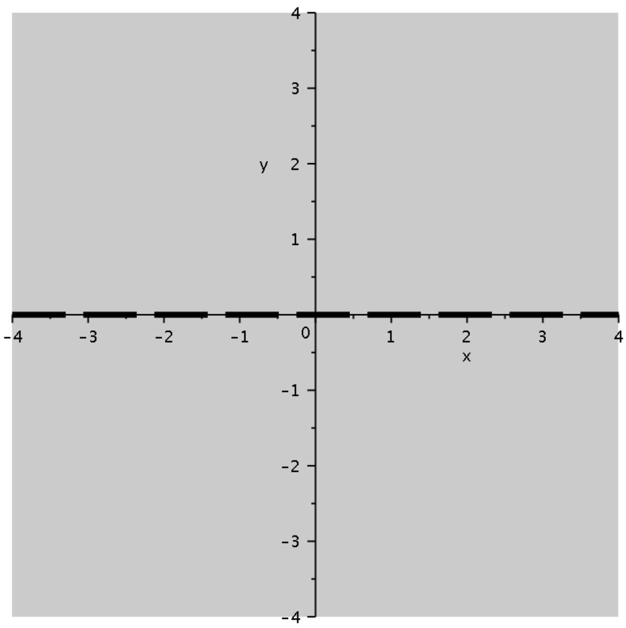
Příklad 3.1.1.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \frac{x}{y}.$$

Řešení. Jelikož ve jmenovateli nesmí být nulové číslo, musí platit $y \neq 0$. Definiční oborem je proto rovina $\mathbb{R}^2$ bez osy x (viz Obrázek 3.1.1), tj.

$$D(f) = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\right\}.$$



Obrázek 3.1.1: Definiční obor z Příkladu 3.1.1.

▲

Příklad 3.1.2.

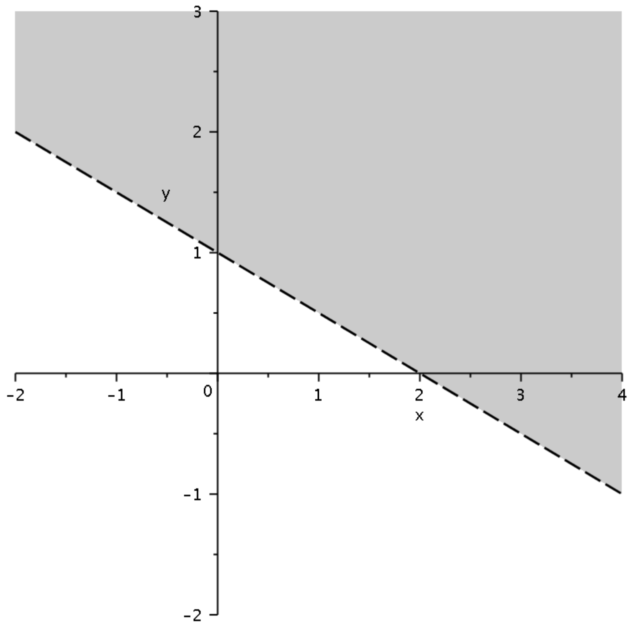
Určete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{2} + 3y - 1\right).$$

Řešení. Musíme určit body $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, pro které má výraz $f(x,y)$ smysl. Jelikož (přirozený) logaritmus je definován pouze pro kladné hodnoty, dostáváme

$$D(f) = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x}{2} + 3y - 1 > 0\right\},$$

tj. definiční obor je otevřená (neboť nerovnost je ostrá) polorovina s hraniční přímkou $\frac{x}{2} + 3y - 1 = 0$. A kterou z polorovin vybrat? Stačí si zvolit nějaký bod mimo hraniční přímku a ověřit, zda je požadovaná nerovnost splněna. Nerovnost jistě platí např. pro bod $[1,1]$, z čehož plyne grafické znázornění množiny $D(f)$ na Obrázku 3.1.2.



Obrázek 3.1.2: Definiční obor z Příkladu 3.1.2.

▲

Příklad 3.1.3.

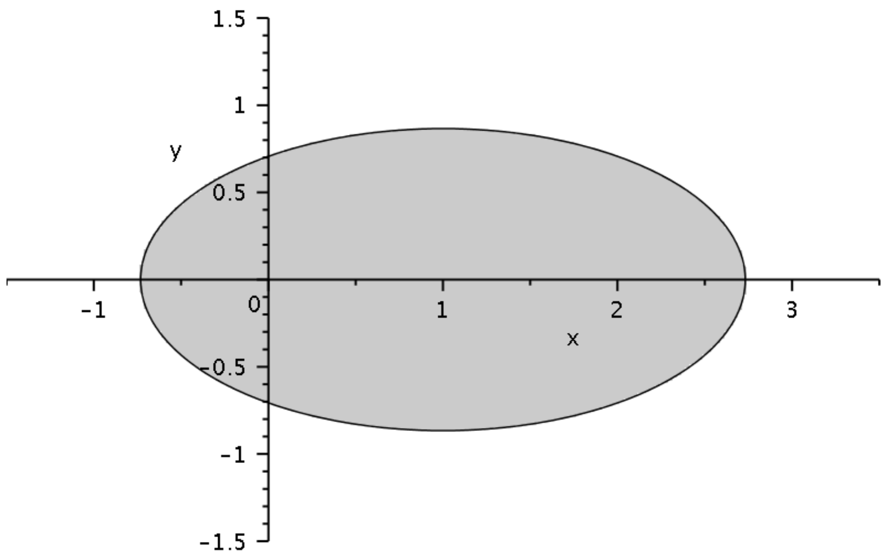
Určete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{2 - x^2 + 2x - 4y^2}.$$

Řešení. Z definice odmocniny dostáváme podmínku $2 - x^2 + 2x - 4y^2 \geq 0$, tj. po doplnění na čtverec $(x-1)^2 + 4y^2 \leq 3$. Proto definičním oborem je množina

$$D(f) = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + 4y^2 \leq 3\right\}.$$

Jedná se o uzavřenou (neboť nerovnost je neostrá) množinu, jejíž hranicí je elipsa o rovnici $(x-1)^2 + 4y^2 = 3$ neboli $\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}/2}\right)^2 = 1$. Střed této elipsy leží v bodě $[1,0]$, délka hlavní poloosy (ve směru osy x) je $a = \sqrt{3}$ a délka vedlejší poloosy (ve směru osy y) je $b = \sqrt{3}/2$. Jelikož střed elipsy $[1,0]$ vyhovuje požadované nerovnosti, je $D(f)$ tvořen elipsou a jejím vnitřkem (viz Obrázek 3.1.3).



Obrázek 3.1.3: Definiční obor z Příkladu 3.1.3.

▲

Příklad 3.1.4.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln\left(x^2 - y^2 + 2x + y + 1\right).$$

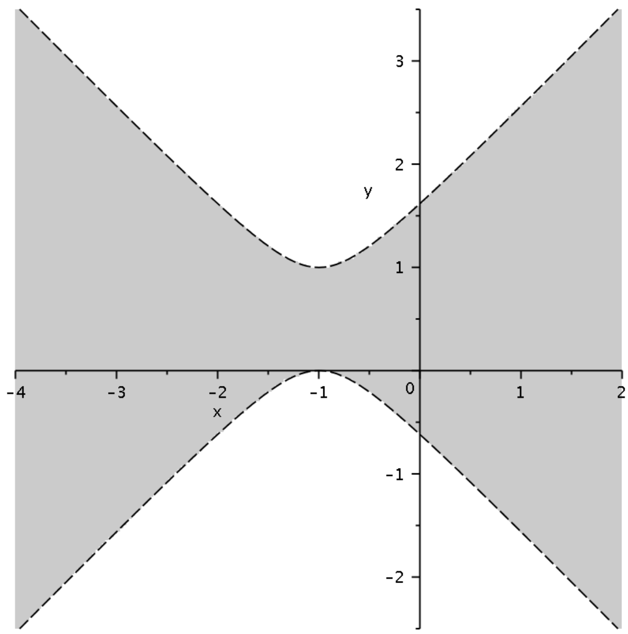
Řešení. Z definice logaritmu dostaneme ihned podmínku $x^2 - y^2 + 2x + y + 1 > 0$, tj. po doplnění na čtverec $(x+1)^2 - (y-1/2)^2 + 1/4 > 0$, takže máme

$$D(f) = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 - (y-1/2)^2 + 1/4 > 0\right\}.$$

To znamená, že $D(f)$ je otevřená (neboť nerovnost je ostrá) množina jejíž hranici tvoří dvojice hyperbol o rovnici

$$\left(\frac{x+1}{1/2}\right)^2 - \left(\frac{y-1/2}{1/2}\right)^2 = -1.$$

Hyperboly jsou orientované ve směru osy y, střed je v bodě $[-1, 1/2]$ a vzdálenost vrcholů hyperbol od středu je rovna $1/2$. A kterou část roviny vybrat? Nerovnost je jistě splněna pro bod $[0,0]$, z čehož plyne grafické znázornění množiny $D(f)$ na Obrázku 3.1.4.



Obrázek 3.1.4: Definiční obor z Příkladu 3.1.4.

▲

Příklad 3.1.5.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln\left[xy\ln(2y - x + 3)\right].$$

Řešení. Jelikož se jedná o složenou funkci, budeme postupovat „zevnitř". Vnitřní funkce je $2y - x + 3$, která je definována na celém $\mathbb{R}^2$. Další na řadě je $xy\ln(2y - x + 3)$, z čehož plyne požadavek $2y - x + 3 > 0$. Avšak vnější funkce je opět logaritmus, takže musí navíc platit $(xy)\ln(2y - x + 3) > 0$. To znamená, že oba činitelé musí mít stejné znaménko, přičemž nula je vyloučena. Odtud dostáváme

$$(xy > 0 \ \wedge\ \ln(2y - x + 3) > 0) \ \vee\ (xy < 0 \ \wedge\ \ln(2y - x + 3) < 0)$$

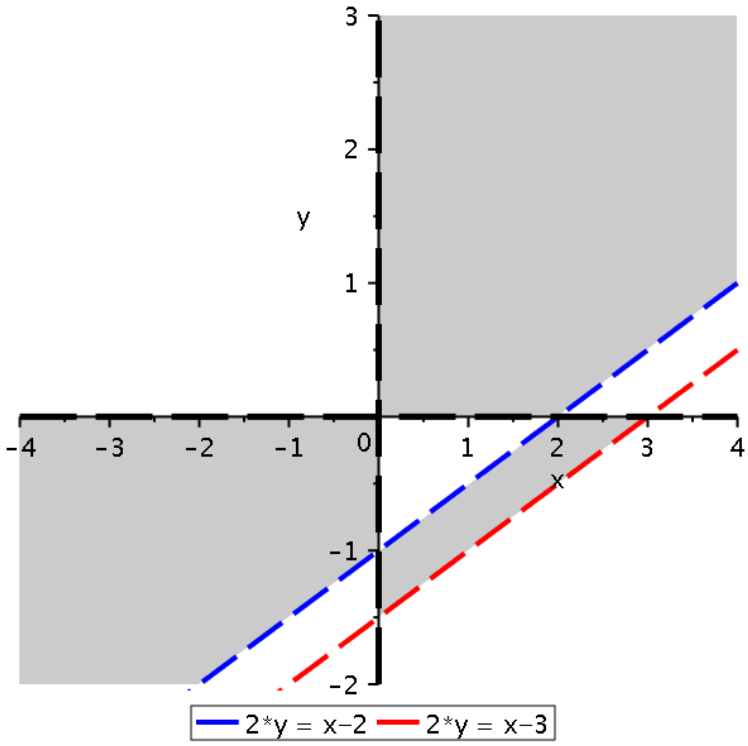
neboli (protože logaritmus má kladné znaménko pro argument větší než 1)

$$(xy > 0 \ \wedge\ 2y - x + 3 > 1) \ \vee\ (xy < 0 \ \wedge\ 0 < 2y - x + 3 < 1).$$

Tím máme zjištěny všechny podmínky pro definiční obor dané funkce. Protože tyto podmínky musí být splněny současně (aby se nepokazila žádná složka funkce), musíme uvážit jejich průnik. Protože omezení z vnitřního logaritmu jsme uvažovali a zapracovali přímo při řešení logaritmu vnějšího, je definičním oborem množina

$$D(f) = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid (xy > 0 \ \wedge\ 2y - x + 2 > 0) \ \vee\ (xy < 0 \ \wedge\ 0 < 2y - x + 3 < 1)\right\}.$$

Nyní můžeme definiční obor graficky znázornit. Definiční obor obdržíme složením dvou částí. První obsahuje všechny body s kladnou hodnotou součinu xy (první a třetí kvadrant bez os x a y), které splňují nerovnici $2y - x > -2$ neboli $y > (x-2)/2$. Jde tedy o všechny body v prvním a třetím kvadrantu a nad přímkou $y = (x-2)/2$. Do druhé části patří všechny body roviny se souřadnicemi s opačnými znaménky (druhá a čtvrtý kvadrant bez os x a y) a splňující současně dvojici nerovnic $2y - x + 3 > 0$ a $2y - x < -2$ neboli $y > (x-3)/2$ a $y < (x-2)/2$. Tomu odpovídají body, které jsou ve druhém a čtvrtém kvadrantu, pod přímkou $y = (x-2)/2$ a nad přímkou $y = (x-3)/2$ (viz Obrázek 3.1.5).



Obrázek 3.1.5: Definiční obor z Příkladu 3.1.5.

Z obrázku vidíme, že se definiční obor ve skutečnosti skládá ze tří částí a můžeme jej popsat následujícím způsobem

$$\begin{aligned} D(f) = & \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x<0 \,\wedge\, y<0 \,\wedge\, 2y-x+2>0\Big\} \bigcup \\ & \bigcup \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x>0 \,\wedge\, y<0 \,\wedge\, 2y-x+2<0 \,\wedge\, 2y-x+3>0\Big\} \bigcup \\ & \bigcup \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x>0 \,\wedge\, y>0 \,\wedge\, 2y-x+2>0\Big\} \end{aligned}$$

▲

Příklad 3.1.6.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos\left(\frac{2y - x + 2}{2x + y - 1}\right).$$

Řešení. Protože argumentem je racionální lomená funkce, musí platit $2x + y - 1 \neq 0$, tj. $y \neq 1 - 2x$. Dále z definice funkce arkus kosinus plyne podmínka

$$-1 \leq \frac{2y - x + 2}{2x + y - 1} \leq 1. \tag{3.1.1}$$

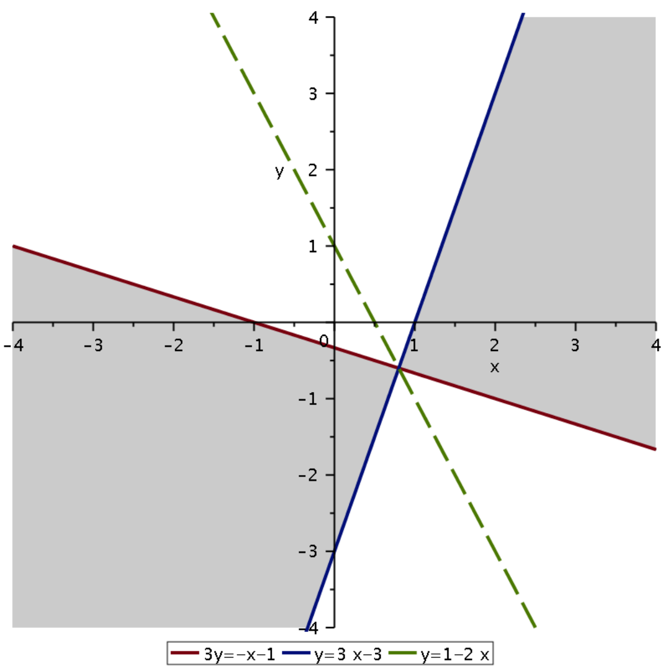
Protože vynásobení obou stran nerovnosti záporným číslem změní znaménko nerovnosti, musíme rozlišit dva případy. Nejdříve uvažme $2x + y - 1 > 0$. Potom podmínka (3.1.1) dává dvojici nerovností

$$-2x - y + 1 \leq 2y - x + 2 \leq 2x + y - 1 \quad \text{neboli} \quad 3y \geq -x - 1 \ \wedge \ y \leq 3x - 3.$$

V případě $2x + y - 1 < 0$ dává podmínka (3.1.1) dvojici nerovností

$$-2x - y + 1 \geq 2y - x + 2 \geq 2x + y - 1 \quad \text{neboli} \quad 3y \leq -x - 1 \ \wedge \ y \geq 3x - 3.$$

Definiční obor je proto tvořen body $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, které splňují (alespoň) jednu z uvedených podmínek. Tyto body jsou vymezeny trojicí přímek o rovnicích $3y = -x - 1$, $y = 3x - 3$ a $y = 1 - 2x$. Tyto přímky se protnou v bodě $[4/5, -3/5]$ a rozdělí rovinu $\mathbb{R}^2$ na 6 částí, takže zbývá rozhodnout, které z těchto částí tvoří $D(f)$. Nejjednodušší je zvolit v každé části nějaký bod a ověřit, zda jsou požadované nerovnosti splněny, viz Obrázek 3.1.6.



Obrázek 3.1.6: Definiční obor z Příkladu 3.1.6.

Chceme-li popsat definiční obor explicitně, můžeme to učinit pomocí sjednocení dvou množin, tj.

$$D(f) = \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x > 4/5,\ 3y \geq -x-1,\ y \leq 3x-3\Big\} \bigcup$$
$$\bigcup \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x < 4/5,\ 3y \leq -x-1,\ y \geq 3x-3\Big\}.$$

Eventuálně to můžeme učinit pomocí konjunkce $\wedge$ („a současně“) znamenající pro množinu bodů průnik a také pomocí disjunkce $\vee$ („nebo“) znamenající sjednocení, tj.

$$D(f) = \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid [(x > 4/5 \ \wedge\ 3y \geq -x-1 \ \wedge\ y \leq 3x-3) \vee$$
$$\vee\ (x < 4/5 \ \wedge\ 3y \leq -x-1 \ \wedge\ y \geq 3x-3)]\Big\}.$$

▲

Příklad 3.1.7.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-2x+2y-1)\,(4-x^2-y^2-2x+2y)}.$$

Řešení. Z definice odmocniny plyne, že výraz pod odmocninou musí být nezáporný, tj. $(x^2+y^2-2x+2y-1)\,(4-x^2-y^2-2x+2y) \geq 0$. Tedy buď mají oba činitelé nezáporné znaménko, tj.

$$x^2+y^2-2x+2y-1 \geq 0 \ \ \wedge \ \ 4-x^2-y^2-2x+2y \geq 0$$

neboli

$$(x-1)^2+(y+1)^2 \geq 3 \ \ \wedge \ \ (x+1)^2+(y-1)^2 \leq 6.$$

První nerovnost určuje „vnější" část kružnice se středem v bodě $[1,-1]$ a poloměrem $\sqrt{3}$, zatímco druhé nerovnosti vyhovují body z kruhu (včetně jeho obvodu) se středem v $[-1,1]$ a poloměrem $\sqrt{6}$. Druhou možností je záporné znaménko obou činitelů, tj.

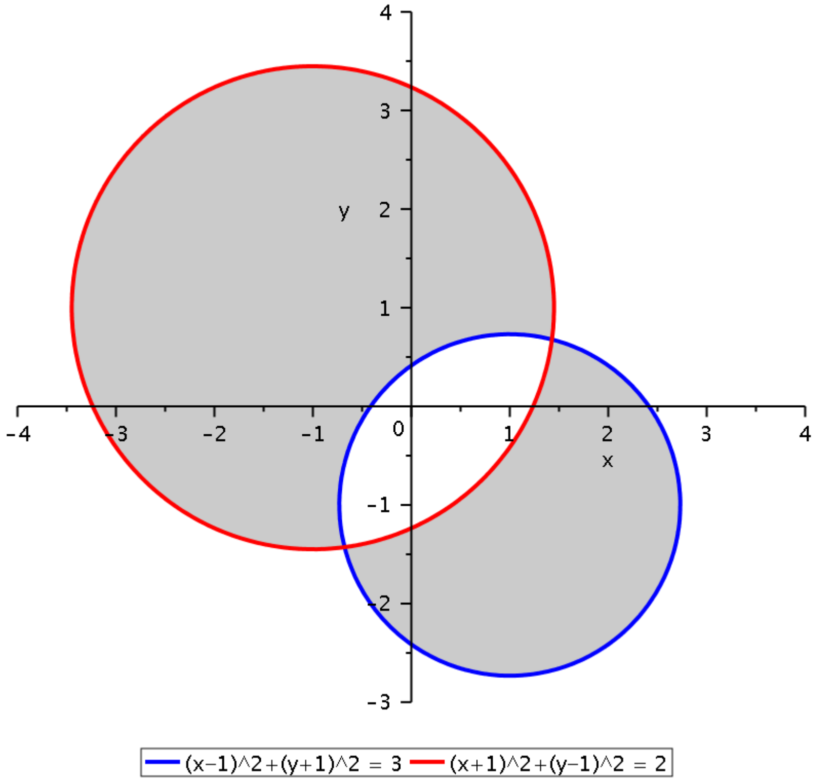
$$x^2+y^2-2x+2y-1 \leq 0 \ \ \wedge \ \ 4-x^2-y^2-2x+2y \leq 0$$

neboli

$$(x-1)^2+(y+1)^2 \leq 3 \ \ \wedge \ \ (x+1)^2+(y-1)^2 \geq 6.$$

V tomto případě určuje první nerovnost kruh (včetně jeho obvodu) se středem v bodě $[1,-1]$ a poloměrem $\sqrt{3}$ a druhé nerovnosti vyhovují body z „vnější" části vymezené kružnicí se středem v $[-1,1]$ a poloměrem $\sqrt{6}$. Sjednocením těchto dvou množin získáme definiční obor, který je vlastně symetrickým rozdílem obou výše popsaných kruhů (viz Obrázek 3.1.7), tj.

$$\begin{aligned} D(f) = \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y+1)^2 \geq 3 \ \wedge \ (x+1)^2+(y-1)^2 \leq 6\Big\} \bigcup \\ \bigcup \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y+1)^2 \leq 3 \ \wedge \ (x+1)^2+(y-1)^2 \geq 6\Big\}. \end{aligned}$$



Obrázek 3.1.7: Definiční obor z Příkladu 3.1.7.

▲

Příklad 3.1.8.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{(16x^2 + y^2 - 9)(3 - 2x - x^2 - y^2)}.$$

Řešení. Z definice odmocniny plyne podmínka $(16x^2 + y^2 - 9)(3 - 2x - x^2 - y^2) \geq 0$. Tedy buď platí

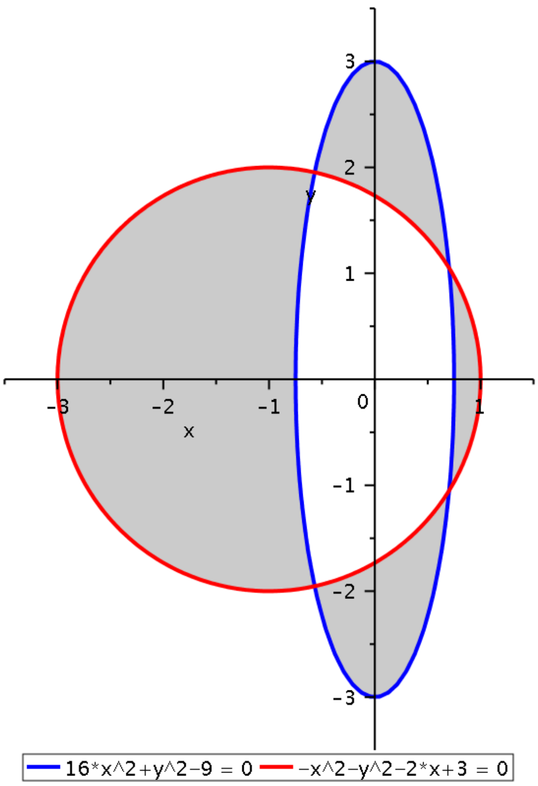
$$16x^2 + y^2 - 9 \geq 0 \wedge 3 - 2x - x^2 - y^2 \geq 0, \quad \text{tj.} \quad \left(\frac{x}{3/4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \geq 1 \wedge (x+1)^2 + y^2 \leq 4$$

nebo

$$16x^2 + y^2 - 9 \leq 0 \wedge 3 - 2x - x^2 - y^2 \leq 0, \quad \text{tj.} \quad \left(\frac{x}{3/4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \leq 1 \wedge (x+1)^2 + y^2 \geq 4.$$

V obou případech se jedná o neprázdné množiny, které jsou vymezeny jednak elipsou se středem v $[0,0]$ a délkami poloos $3/4$ a 3 a současně kružnicí se středem v $[-1,0]$ a poloměrem 2. Takže definiční oborem je množina (viz Obrázek 3.1.8)

$$D(f) = \left\{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x}{3/4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \geq 1 \wedge (x+1)^2 + y^2 \leq 4 \right\} \bigcup$$
$$\bigcup \left\{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x}{3/4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \leq 1 \wedge (x+1)^2 + y^2 \geq 4 \right\}.$$



Obrázek 3.1.8: Definiční obor z Příkladu 3.1.8.

▲

Příklad 3.1.9.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{-\frac{x^2+4x+4y^2}{x^2+2x+y^2}}.$$

Řešení. Z definice odmocniny plyne podmínka $-\frac{x^2+4x+4y^2}{x^2+2x+y^2} \geq 0$ neboli $\frac{x^2+4x+4y^2}{x^2+2x+y^2} \leq 0$, přičemž $x^2+2x+y^2 \neq 0$. To znamená, že čitatel a jmenovatel musí mít různé znaménko (a jmenovatel nemůže být nulový). Nejdříve tedy uvažme, že čitatel je nezáporný a jmenovatel kladný, tj.

$$x^2+4x+4y^2 \geq 0 \ \wedge\ x^2+2x+y^2 < 0$$

neboli

$$\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + y^2 \geq 1 \ \wedge\ (x+1)^2 + \left(\frac{y}{1/2}\right)^2 < 1.$$

První nerovnost vymezuje „vnější“ část elipsy se středem v bodě $[-2,0]$ a délkou hlavní poloosy $a=2$ (ve směru osy x) a vedlejší poloosy $b=1$ (ve směru osy y) včetně hraniční elipsy. Druhá nerovnost nerovnost určuje vnitřní část elipsy se středem v bodě $[-1,0]$ a délkami poloos $a=1$ (ve směru osy x) a $b=1/2$ (ve směru osy y), přičemž samotná elipsa do této množiny nepatří. Oběma těmto nerovnost tedy vyhovuje průnik těchto dvou množin, který je ovšem prázdný. Nyní uvažme opačné nerovnosti„ tj.

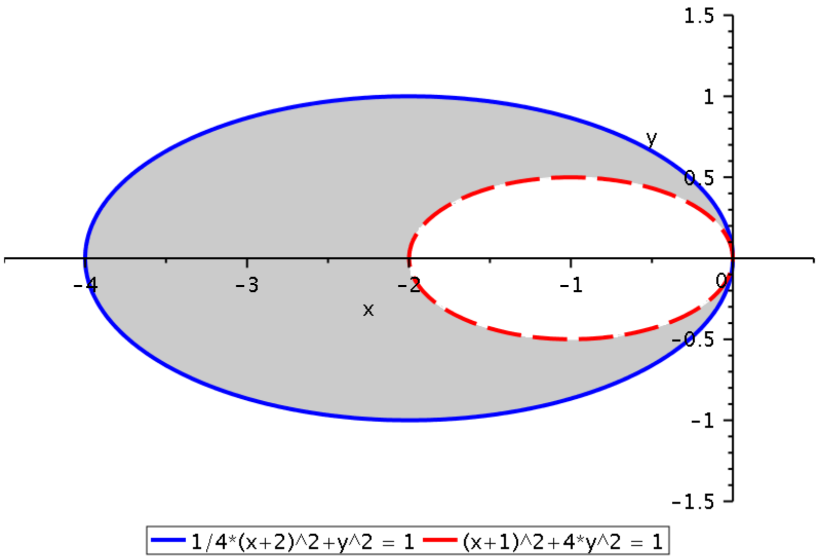
$$x^2+4x+4y^2 \leq 0 \ \wedge\ x^2+2x+y^2 > 0$$

neboli

$$\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge\ (x+1)^2 + \left(\frac{y}{1/2}\right)^2 > 1.$$

Tentokrát první nerovnost vymezuje vnitřek elipsy se středem v bodě $[-2,0]$, zatímco druhá nerovnost určuje „vnější“ část elipsy se středem v bodě $[-1,0]$. Průnik těchto množin je neprázdný, čímž dostáváme definiční obor (viz Obrázek 3.1.9)

$$D(f) = \left\{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge\ (x+1)^2 + \left(\frac{y}{1/2}\right)^2 > 1 \right\}.$$



Obrázek 3.1.9: Definiční obor z Příkladu 3.1.9.

▲

Příklad 3.1.10.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{4-(x^2-y^2-2x+2y+1)^2}.$$

Řešení. Jelikož odmocnina je definována pouze pro nezáporná čísla, musí body v definičním oboru vyhovovat nerovnosti

$$4-(x^2-y^2-2x+2y+1)^2 \geq 0 \quad \text{neboli} \quad (x^2-y^2-2x+2y+1)^2 \leq 4.$$

Po odmocnění dostaneme

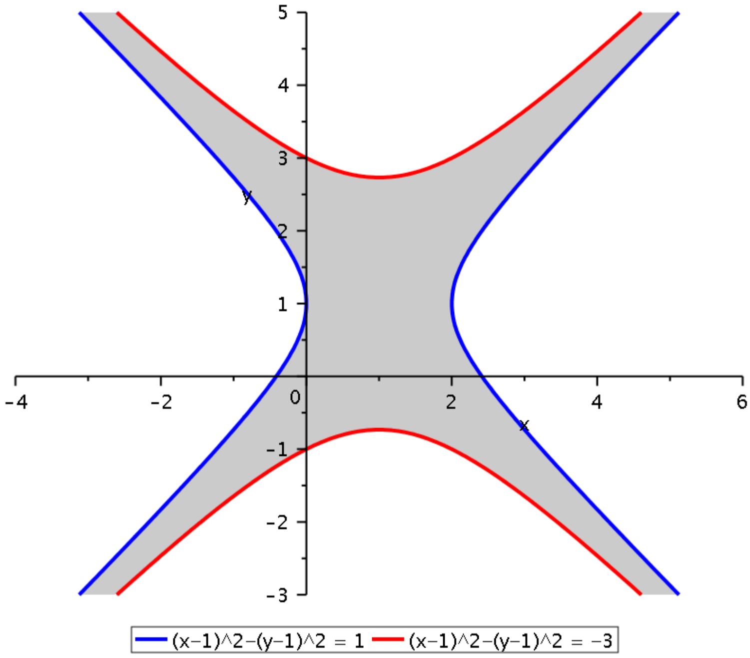
$$|x^2-y^2-2x+2y+1| \leq 2 \quad \text{neboli} \quad -2 \leq (x-1)^2-(y-1)^2+1 \leq 2,$$

z čehož získáme dvojici nerovností

$$(x-1)^2-(y-1)^2 \geq -3 \;\wedge\; (x-1)^2-(y-1)^2 \leq 1.$$

První nerovnost vymezuje množinu, jejíž hranicí jsou větve hyperboly orientované ve směru osy y se středem v bodě $[1,1]$ a délkou poloosy $\sqrt{3}$. Jedná se o tu část roviny $\mathbb{R}^2$, která obsahuje střed hyperboly, neboť ten dané nerovnosti vyhovuje. Druhá nerovnost vymezuje množinu, jejíž hranicí jsou větve hyperboly orientované ve směru osy x se středem v bodě $[1,1]$ a délkou poloosy 1. Opět se jedná o tu část, která obsahuje střed hyperboly. Definiční obor je tvořen průnikem těchto dvou množin (viz Obrázek 3.1.10), tj.

$$D(f) = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2-(y-1)^2 \geq -3 \;\wedge\; (x-1)^2-(y-1)^2 \leq 1\right\}.$$



Obrázek 3.1.10: Definiční obor z Příkladu 3.1.10.

▲

Příklad 3.1.11.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y)=\sqrt{1-\frac{4xy-3x^2-x+y+2}{5x+5y+2}}.$$

Řešení. Z daného funkčního předpisu ihned vyplývá podmínka $5x+5y+2\neq 0$ a z definice odmocniny také

$$1-\frac{4xy-3x^2-x+y+2}{5x+5y+2}\geq 0 \quad \text{neboli} \quad \frac{3x^2-4xy+6x+4y}{5x+5y+2}\geq 0.$$

Poslední podmínka je splněna, jestliže

$$3x^2-4xy+6x+4y\geq 0 \quad \wedge \quad 5x+5y+2>0$$

nebo

$$3x^2-4xy+6x+4y\leq 0 \quad \wedge \quad 5x+5y+2<0,$$

takže definičním oborem je množina

$$\begin{aligned} D(f)=&\big\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 \mid 3x^2-4xy+6x+4y\geq 0 \ \wedge\ 5x+5y+2>0\big\}\bigcup \\ &\bigcup\big\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 \mid 3x^2-4xy+6x+4y\leq 0 \ \wedge\ 5x+5y+2<0\big\}. \end{aligned}$$

Jedná se o sjednocení dvou množin, které jsou vymezeny přímkou $5x+5y+2=0$ a křivkou o rovnici

$$3x^2-4xy+6x+4y=0. \tag{3.1.2}$$

Abychom mohli popsat definiční obor blíže, musíme si podrobněji analyzovat posledně jmenovanou křivku. „Eliminací“ smíšeného členu dostaneme

$$3(x-2y/3)^2-4y^2/3+6x+4y=0,$$

což po substituci $z=x-2y/3$ dává

$$3z^2-4y^2/3+6(z+2y/3)+4y=0 \quad \text{neboli} \quad \left(\frac{y-3}{3\sqrt{3}/2}\right)^2-\left(\frac{z+1}{\sqrt{3}}\right)^2=1.$$

Odtud vidíme, že v rovině (y,z) se jedná o hyperbolu s větvemi otevřenými ve směru kladné a záporné části osy y, středem v bodě $[y_0,z_0]=[3,-1]$ a délkami poloos $a=3\sqrt{3}/2$ a $b=\sqrt{3}$. Asymptotami této hyperboly jsou přímky $3z=2y-9$ a $3z=-2y+3$ (což získáme z rovnic $z-z_0=\pm b(y-y_0)/a$). Kdybychom do této roviny zakreslili (za použití téže substituce, tj. $x=z+2y/3$) také přímku $5x+5y+2=0$, mohli bychom získat některé další informace ohledně množiny $D(f)$. Jenže ty by nám pro načrtnutí definičního

oboru v rovině (x, y) příliš nepomohly. Proto se tímto směrem nevydáme a místo toho zůstaneme v rovině (x, y), kde se jedná o otočenou hyperbolu. Abychom ji mohli načrtnout, potřebujeme určit alespoň souřadnice jejího středu, osu a rovnice asymptot. K tomu využijeme transformaci určenou vlastními vektory matice kvadratické části (formy) na levé straně rovnosti (3.1.2). Tuto matici získáme z koeficientů u členů x^2, y^2 a jedné poloviny koeficientu u xy, tj.

$$Q := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice Q má vlastní čísla 4 a -1 s vlastními vektory

$$(-2,1)^\top \sim \left(-2/\sqrt{5},\, 1/\sqrt{5}\right)^\top =: w_1,$$
$$(1,2)^\top \sim \left(1/\sqrt{5},\, 2/\sqrt{5}\right)^\top =: w_2.$$

Potom volbou

$$u = (x, y) \cdot w_1 = \frac{-2x + y}{\sqrt{5}} \quad \text{a} \quad v = (x, y) \cdot w_2 = \frac{x + 2y}{\sqrt{5}},$$

tj. $x = (v - 2u)/\sqrt{5}$ a $y = (u + 2v)/\sqrt{5}$, rovnost (3.1.2) přejde do tvaru (jelikož jsme použili vlastní vektory w_1 a w_2 s jednotkovou velikostí, jsou koeficienty u druhých mocnin rovny právě vlastním číslům)

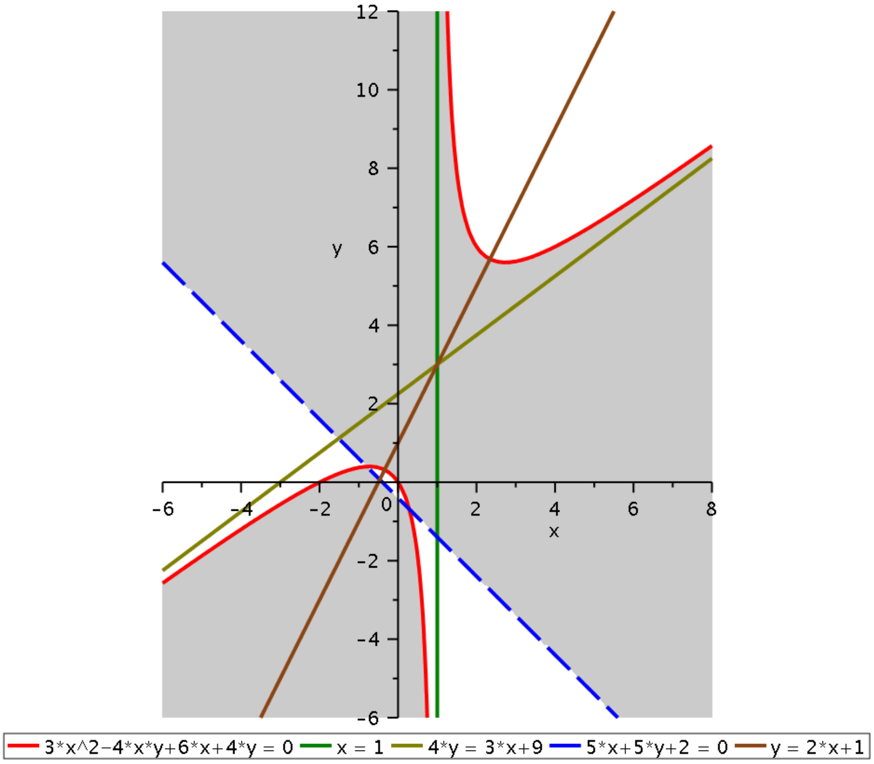
$$4u^2 - v^2 - 8u/\sqrt{5} + 14v/\sqrt{5} = 0 \quad \text{neboli} \quad -\left(\frac{u - 1/\sqrt{5}}{3/2}\right)^2 + \left(\frac{v - 7/\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1.$$

V rovině (u, v) se jedná o hyperbolu s větvemi otevřenými ve směru kladné a záporné části osy v, středem v bodě $[u_0, v_0] = [1/\sqrt{5}, 7/\sqrt{5}]$, délkami poloos $a = 3/2$ a $b = 3$ a asymptotami $v = 2u + \sqrt{5}$ a $v = -2u + 9/\sqrt{5}$. Asymptotami této hyperboly jsou přímky $3z = 2y - 9$ a $3z = -2y + 3$ (což získáme z rovnic $v - v_0 = \pm b(u - u_0)/a$). Zpětným dosazením odtud plyne, že v rovině (x, y) máme hyperbolu se středem v bodě $[1, 3]$, s větvemi otevřenými ve směru přímky $y = 2x + 1$ (ta odpovídá přímce $u = 0$ posunuté do středu hyperboly), délkami poloos $a = 3/2$ a $b = 3$ a asymptotami $x = 1$ a $4y = 3x + 9$ (větve hyperboly jsou na Obrázku 3.1.11 vyznačeny červenou barvou, osa hnědou a asymptoty zelenou barvou). Ještě musíme určit průsečíky hyperboly s přímkou $5x + 5y + 2 = 0$ (ta je na Obrázku 3.1.11 vyznačena modrou barvou), tj. vyřešit soustavu

$$3x^2 - 4xy + 6x + 4y = 0 \quad \wedge \quad 5x + 5y + 2 = 0.$$

Z druhé rovnice máme $y = -x - 2/5$, což po dosazení do první rovnosti dává kvadratickou rovnici $7x^2 + 18x/5 - 8/5 = 0$ s řešeními $x_1 = 2/7$ a $x_2 = -4/5$. Průsečíky jsou proto body $[2/7, -24/35]$ a $[-4/5, 2/5]$, které leží na „spodní“ větvi hyperboly. Definiční obor je načrtnut na Obrázku 3.1.11. Jedná se o množinu mezi oběma větvemi hyperboly

a současně „nad“ přímkou $5x + 5y + 2 = 0$ sjednocenou s částí „vnitřku spodní“ větve „pod“ přímkou $5x + 5y + 2 = 0$.



Obrázek 3.1.11: Definiční obor z Příkladu 3.1.11.

▲

Příklad 3.1.12.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x-2y^2+3}}{\ln(4-2x^2-y^2)}.$$

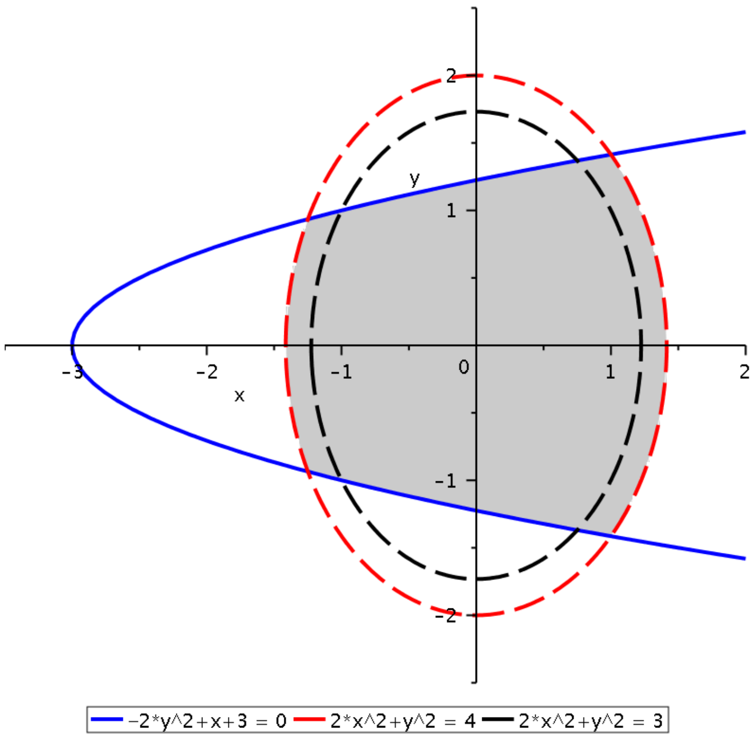
Řešení. Protože odmocnina je definována pro nezáporná čísla, logaritmus pro kladná čísla a jmenovatel musí být nenulový, dostáváme postupně následující podmínky

$$x-2y^2+3 \geq 0, \quad 4-2x^2-y^2 > 0, \quad \ln(4-2x^2-y^2) \neq 0.$$

První podmínka určuje „vnitřní" část množiny, jejíž hranici tvoří parabola o rovnici $y^2 - (x+3)/2 = 0$ s vrcholem v bodě $[-3,0]$ a otevřená ve směru kladné osy x. Druhá podmínka určuje vnitřek elipsy $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$ (bez jejího obvodu) se středem v bodě $[0,0]$ a délkou hlavní poloosy $a = 2$ ve směru osy y a vedlejší poloosy $b = \sqrt{2}$ ve směru osy x. Třetí podmínku můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$4-2x^2-y^2 \neq 1 \quad \text{neboli} \quad \left(\frac{x}{\sqrt{3/2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 \neq 1.$$

Tato podmínka je porušena pouze v bodech, které leží na elipse se středem v bodě $[0,0]$ a délkou hlavní poloosy $a = \sqrt{3}$ ve směru osy y a vedlejší poloosy $b = \sqrt{3/2}$ ve směru osy x. Definiční obor je znázorněn na Obrázku 3.1.12.



Obrázek 3.1.12: Definiční obor z Příkladu 3.1.12.

Pro jeho přesný analytický popis potřebujeme určit souřadnice průsečíků paraboly ($y^2 = (x+3)/2$) a elipsy ($y^2 = 4 - 2x^2$), tj. musíme vyřešit kvadratickou rovnici

$$4 - 2x^2 = \frac{x+3}{2}.$$

Protože její řešení jsou $x_1 = -5/4$ a $x_2 = 1$, můžeme hledaný definiční obor zapsat jako

$$D(f) = (A \cup B \cup C) \setminus D,$$

kde množiny A, B, C, D jsou

$$\begin{aligned} A &= \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \big[-\sqrt{2}, -5/4\big],\ y^2 + 2x^2 \le 4\Big\}, \\ B &= \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \big[-5/4, 1\big],\ x - 2y^2 + 3 \ge 0\Big\}, \\ C &= \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \big[1, \sqrt{2}\big],\ y^2 + 2x^2 \le 4\Big\}, \\ D &= \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + 2x^2 = 3\Big\}. \end{aligned}$$

▲

Příklad 3.1.13.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x^2+2x}{y^2-2y}\right) - \frac{1}{|x+1|+3|y-1|}.$$

Řešení. Z první části funkce f je zřejmé, že musí platit $y^2 - 2y \neq 0$, tj. $y \neq 0$ a $y \neq 2$. Protože funkce arkus sinus je definována pouze pro argument v intervalu $[-1,1]$, musí být také splněno

$$-1 \leq \frac{x^2+2x}{y^2-2y} \leq 1.$$

Odtud v závislosti na znaménku výrazu $y^2 - 2y$ dostaneme dvě části definičního oboru.

(i) Je-li $y^2 - 2y > 0$ neboli $y \in \mathbb{R} \setminus (0,2)$, pak obdržíme dvojici nerovností

$$-y^2 + 2y \leq x^2 + 2x \leq y^2 - 2y$$

neboli

$$-(y-1)^2 + 1 \leq (x+1)^2 - 1 \quad \wedge \quad (x+1)^2 \leq (y-1)^2,$$

což můžeme přepsat do tvaru

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 2 \quad \wedge \quad |y-1| \geq |x+1|.$$

První nerovnosti vyhovují body vně kružnice (včetně hraniční kružnice) se středem v bodě $[-1,1]$ a poloměrem $\sqrt{2}$. Druhá nerovnost určuje body ze dvou „trojúhelníků" vymezených přímkami o rovnicích $y = x+2$ a $y = -x$ (jedná se o části obsahující osu y s body $|y| > 2$). Do definičního oboru patří průnik těchto dvou množin.

(ii) Je-li $y^2 - 2y < 0$ neboli $y \in (0,2)$, pak obdržíme dvojici nerovností

$$-y^2 + 2y \geq x^2 + 2x \geq y^2 - 2y$$

neboli

$$-(y-1)^2 + 1 \geq (x+1)^2 - 1 \quad \wedge \quad (x+1)^2 \geq (y-1)^2,$$

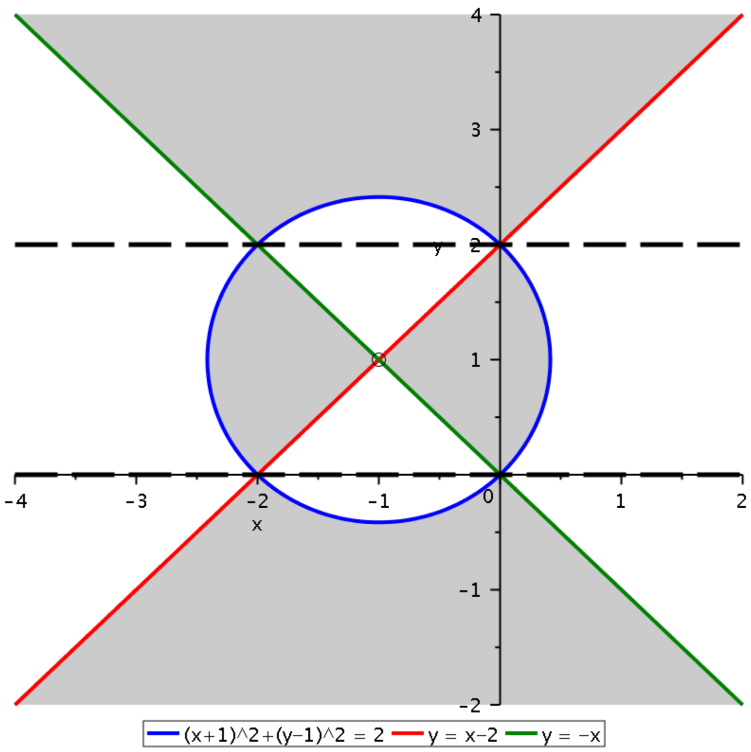
což můžeme přepsat do tvaru

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \quad \wedge \quad |y-1| \leq |x+1|.$$

První nerovnosti vyhovují body uvnitř kružnice (včetně hraniční kružnice) se středem v bodě $[-1,1]$ a poloměrem $\sqrt{2}$. Druhá nerovnost určuje body ze dvou „trojúhelníků" vymezených opět přímkami $y = x+2$ a $y = -x$ (tentokrát se jedná o část obsahující osu y s body $y \in (0,2)$ a neobsahující osu y). Do definičního oboru patří průnik těchto dvou množin.

Definiční obor je proto tvořen sjednocením obou právě popsaných částí, ze kterých je ale potřeba ještě vyjmout body, ve kterých není definována druhá část funkce f, tj. body splňující $|x+1|+3|y-1|=0$. Poslední rovnost je splněna pouze v bodě $[-1,1]$, proto definiční obor funkce f je (viz Obrázek 3.1.13)

$$D(f)=\Big\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 \mid |y|>2 \ \wedge\ (x+1)^2+(y-1)^2\geq 2 \ \wedge\ |y-1|\geq|x+1|\Big\}\bigcup$$
$$\bigcup\Big\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\setminus\{[-1,1]\} \mid y\in(0,2) \ \wedge\ (x+1)^2+(y-1)^2\leq 2 \ \wedge\ |y-1|\leq|x+1|\Big\}.$$



Obrázek 3.1.13: Definiční obor z Příkladu 3.1.13.

▲

Příklad 3.1.14.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos \frac{x^2+y^2-2y-20}{10} + \sqrt{|x|+|y-1|-4}.$$

Řešení. Protože argument funkce arkus kosinus musí být v intervalu $[-1,1]$ a pro odmocninu musí být nezáporný, musí být splněny následující podmínky

$$-10 \leq x^2+y^2-2y-20 \leq 10 \quad \text{a} \quad |x|+|y-1|-4 \geq 0.$$

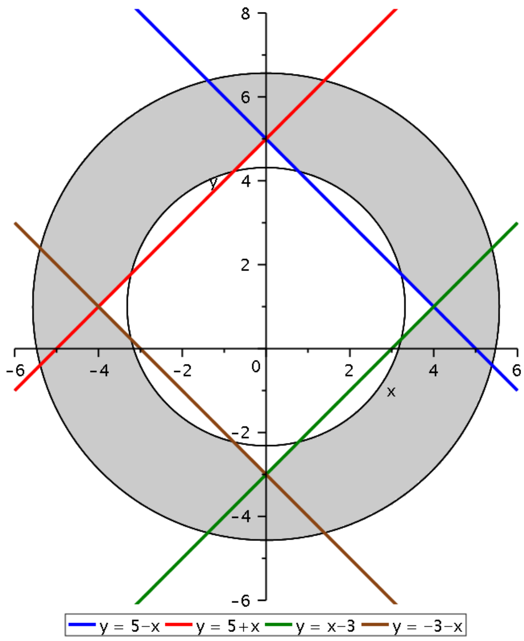
První část je ekvivalentní s

$$11 \leq x^2+(y-1)^2 \leq 31,$$

což určuje mezikruží, jehož hraniční kružnice mají střed v $[0,1]$ a poloměry $\sqrt{11}$ a $\sqrt{31}$. Pro snazší pochopení druhé podmínky si ji rozdělíme na čtyři části podle toho, jaké znaménko mají výrazy uvnitř absolutních hodnot, tj.

$$\begin{aligned}
x \geq 0 \,\wedge\, y-1 \geq 0 &\Rightarrow\ x+y \geq 5,\\
x \leq 0 \,\wedge\, y-1 \geq 0 &\Rightarrow\ -x+y \geq 5,\\
x \geq 0 \,\wedge\, y-1 \leq 0 &\Rightarrow\ x-y \geq 3,\\
x \leq 0 \,\wedge\, y-1 \leq 0 &\Rightarrow\ -x-y \geq 3.
\end{aligned}$$

Tyto podmínky vymezují vnější část (otočeného) čtverce s vrcholy $[4,1]$, $[-4,1]$, $[0,5]$ a $[0,-3]$ (a hraničními přímkami o rovnicích $y=5-x$, $y=5+x$, $y=x-3$ a $y=-3-x$). Kombinací obou podmínek získáme množinu vykreslenou na Obrázku 3.1.14.



Obrázek 3.1.14: Definiční obor z Příkladu 3.1.14.

Analyticky můžeme definiční obor vyjádřit jako průnik dvou množin

$$D(f) = A \cap B,$$

kde množina A je mezikruží

$$A := \Big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid 11 \leq x^2 + (y-1)^2 \leq 31\Big\}$$

a množina B je vnější část čtverce

$$\begin{aligned} B := &\Big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 1,\ y \geq 5 - x\Big\} \bigcup \\ &\bigcup \Big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \geq 1,\ y \geq 5 + x\Big\} \bigcup \\ &\bigcup \Big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \leq 1,\ y \leq x - 3\Big\} \bigcup \\ &\bigcup \Big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \leq 1,\ y \leq -x - 3\Big\}. \end{aligned}$$

▲

Příklad 3.1.15.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y)=\ln\left(\frac{\pi}{4}-\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{4x-y^2+4y}{x+2y+2}+1\right)\right|\right).$$

Řešení. Z funkčního předpisu ihned plyne požadavek $x+2y+2\neq 0$ (na Obrázku 3.1.15 se jedná o červenou přímku). Z definice logaritmu dále dostaneme podmínku

$$\frac{\pi}{4}-\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{4x-y^2+4y}{x+2y+2}+1\right)\right|>0.$$

Tato podmínka je ekvivalentní s dvojicí nerovností

$$-\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}\left(\frac{4x-y^2+4y}{x+2y+2}+1\right)<\frac{\pi}{4},$$

z nichž s pomocí definice funkce arkus tangens obdržíme

$$-1<\frac{4x-y^2+4y}{x+2y+2}+1<1 \quad \text{neboli} \quad -2<\frac{4x-y^2+4y}{x+2y+2}<0.$$

Nyní v závislosti na znaménku výrazu $x+2y+2$ mohou nastat dvě možnosti. Jestliže $x+2y+2>0$, potom máme

$$-2(x+2y+2)<4x-y^2+4y<0$$

neboli

$$6(x+10/3)-(y-4)^2>0 \ \wedge \ (y-2)^2-4(x+1)>0.$$

První nerovnost vymezuje „vnitřní“ část paraboly o rovnici $6(x+10/3)-(y-4)^2=0$, která je orientována ve směru kladné části osy x a má vrchol v bodě $[-10/3,4]$. Druhá nerovnost vymezuje „vnější“ část paraboly o rovnici $(y-2)^2-4(x+1)=0$, která je také orientována ve směru kladné části osy x a má vrchol v bodě $[-1,2]$. Ještě musíme určit jednak průsečíky parabol mezi sebou, jednak průsečíky parabol s přímkou.

(i) Průsečíky parabol dostaneme vyřešením dvojice rovnic

$$6(x+10/3)-(y-4)^2=0 \quad \text{a} \quad (y-2)^2-4(x+1)=0.$$

Ze druhé rovnosti máme $x=y^2/4-y$, což po dosazení do první rovnice dává

$$y^2/2+2y+4=0.$$

Tato rovnice nemá řešení v $\mathbb{R}$, takže se paraboly neprotnou (ani nedotknou).

(ii) Průsečík parabol s přímkou $x + 2y + 2 = 0$ nalezneme s pomocí dosazení $x = -2y - 2$ do rovnic parabol, tj.

$$6(-2y + 4/3) - (y - 4)^2 = 0 \quad \text{a} \quad (y - 2)^2 + 4(2y + 1) = 0.$$

Ani jedna z těchto rovnic nemá řešení v $\mathbb{R}$, takže přímka nemá s parabolami žádný společný bod.

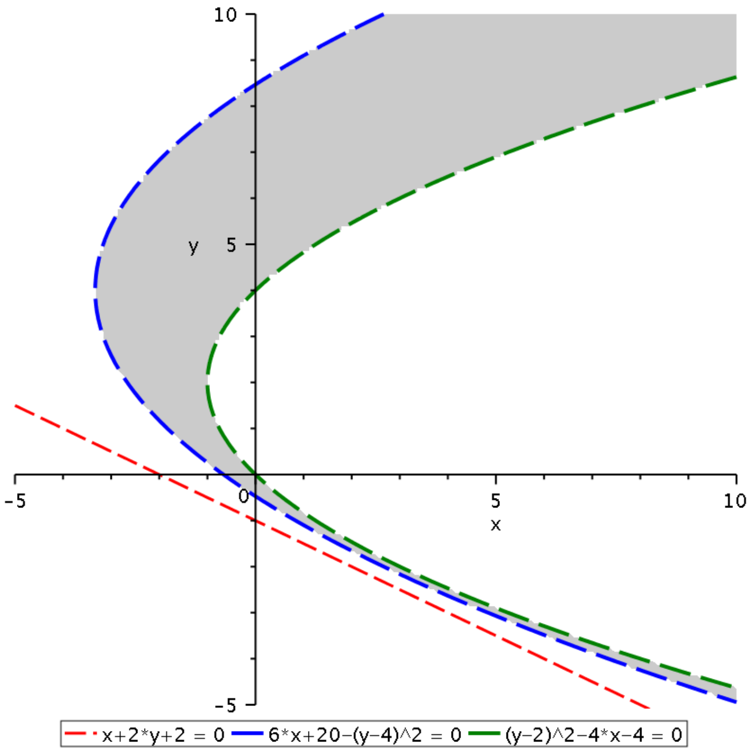
Protože s využitím části (ii) snadno zjistíme, že obě paraboly leží zcela v poloprostoru vymezeném nerovností $x + 2y + 2 > 0$, patří díky části (i) do definiční oboru množina mezi oběma parabolami, viz Obrázek 3.1.15.

V případě $x + 2y + 2 < 0$ získáme stejným postupem (jenom musíme otočit obě nerovnosti, neboť tentokrát násobíme záporným číslem) dvojici podmínek

$$6(x + 10/3) - (y - 4)^2 < 0 \ \wedge \ (y - 2)^2 - 4(x + 1) < 0.$$

Nyní první podmínka určuje „vnější" část paraboly o rovnici $6(x + 10/3) - (y - 4)^2 = 0$, která je orientována ve směru kladné části osy x a má vrchol v bodě $[-10/3, 4]$. Druhá nerovnost vymezuje „vnitřní" část paraboly o rovnici $(y - 2)^2 - 4(x + 1) = 0$, která je orientována ve směru kladné části osy x a má vrchol v bodě $[-1, 2]$. Průnik těchto dvou množin je prázdný. Proto definiční obor funkce f je (viz Obrázek 3.1.15)

$$D(f) = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid 6(x + 10/3) - (y - 4)^2 > 0 \ \wedge \ (y - 2)^2 - 4(x + 1) > 0\right\}.$$



Obrázek 3.1.15: Definiční obor z Příkladu 3.1.15.

▲

Příklad 3.1.16.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos\left(\frac{y^2-4y}{x} - 2\right) + \sqrt{-\ln(1+x-y)}.$$

Řešení. Definiční obor $D(f)$ bude tvořen průnikem dvou množin. První množinu získáme z podmínky, že arkus kosinus je definován pouze pro argument v intervalu $[-1,1]$, tj.

$$-1 \leq \frac{y^2-4y}{x} - 2 \leq 1$$

přičemž $x \neq 0$. Odtud plyne

$$(x > 0 \ \wedge -x \leq y^2 - 4y - 2x \leq x) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge -x \geq y^2 - 4y - 2x \geq x),$$

z čehož dostaneme dvě množiny vymezené parabolou otevřenou ve směru kladné části osy x s vrcholem v bodě $[-4,2]$ o rovnici $(y-2)^2 - x - 4 = 0$ a druhou parabolou otevřenou také ve směru kladné části osy x s vrcholem v $[-4/3,2]$ o rovnici $(y-2)^2 - 3x - 4 = 0$. Tyto paraboly se protnou v bodě s x-ovou souřadnicí, která je řešením rovnice

$$x + 4 = 3x + 4,$$

tj. $x = 0$. Dosazením zpět do rovnic parabol určíme souřadnice průsečíků, tj. $[0,0]$ a $[0,4]$. V obou případech vyhovují části roviny $\mathbb{R}^2$ ohraničené z obou stran parabolami, přičemž průsečíky parabol do této množiny nepatří.

Logaritmus je nekladný pro argument z intervalu $(0,1]$, takže druhou množinu dostaneme z podmínky

$$0 < 1 + x - y \leq 1 \quad \text{neboli} \quad y < 1 + x \ \wedge \ y \geq x.$$

Poslední dvě podmínky vymezují pás s hraničními přímkami o rovnicích $y = 1 + x$ a $y = x$, přičemž body na hraničí přímce $y = x$ nepatří do definičního oboru. Hledaný definiční obor je zobrazen na Obrázku 3.1.16.

Pro přesný popis $D(f)$ potřebujeme ještě určit průsečíky parabol s přímkami, tj. vyřešit příslušné kvadratické rovnice. Průsečíky paraboly $(y-2)^2 - x - 4 = 0$ s přímkou $y = x + 1$ jsou v bodech $[3/2 \pm \sqrt{21}/2, 5/2 \pm \sqrt{21}/2]$ a s přímkou $y = x$ v bodech $[0,0]$ a $[5,5]$, zatímco průsečíky paraboly $(y-2)^2 - 3x - 4 = 0$ s přímkou $y = x + 1$ jsou v bodech $[5/2 \pm \sqrt{37}/2, 7/2 \pm \sqrt{37}/2]$ a s přímkou $y = x$ v bodech $[0,0]$ a $[7,7]$. Proto definiční obor může vyjádřit jako sjednocení pěti částí, tj.

$$D(f) = A \cup B \cup C \cup D \cup E,$$

kde jednotlivé množiny jsou dány jako (viz Obrázek 3.1.17)

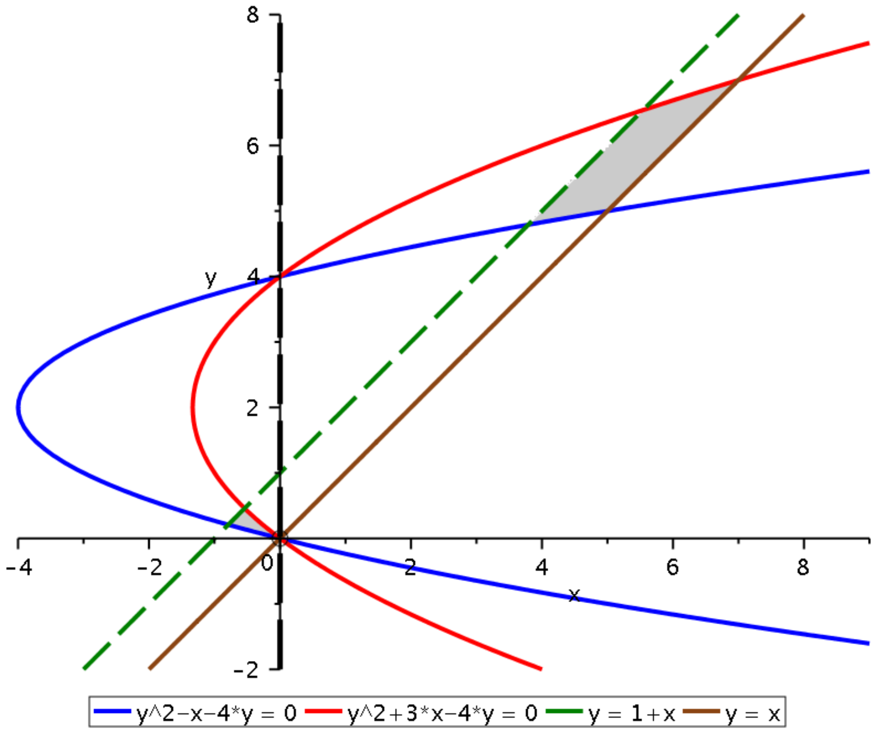
$$A := \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \big[3/2 - \sqrt{21}/2, 5/2 - \sqrt{37}/2\big] \wedge (y-2)^2 - x - 4 \leq 0 \\ \wedge\ y < 1 + x\Big\},$$

$$B := \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \big[5/2 - \sqrt{37}/2, 0\big) \wedge y \in \big(0, 7/2 - \sqrt{37}/2\big] \wedge \\ \wedge\ (y-2)^2 - x - 4 \leq 0 \wedge (y-2)^2 - 3x - 4 \geq 0\Big\},$$

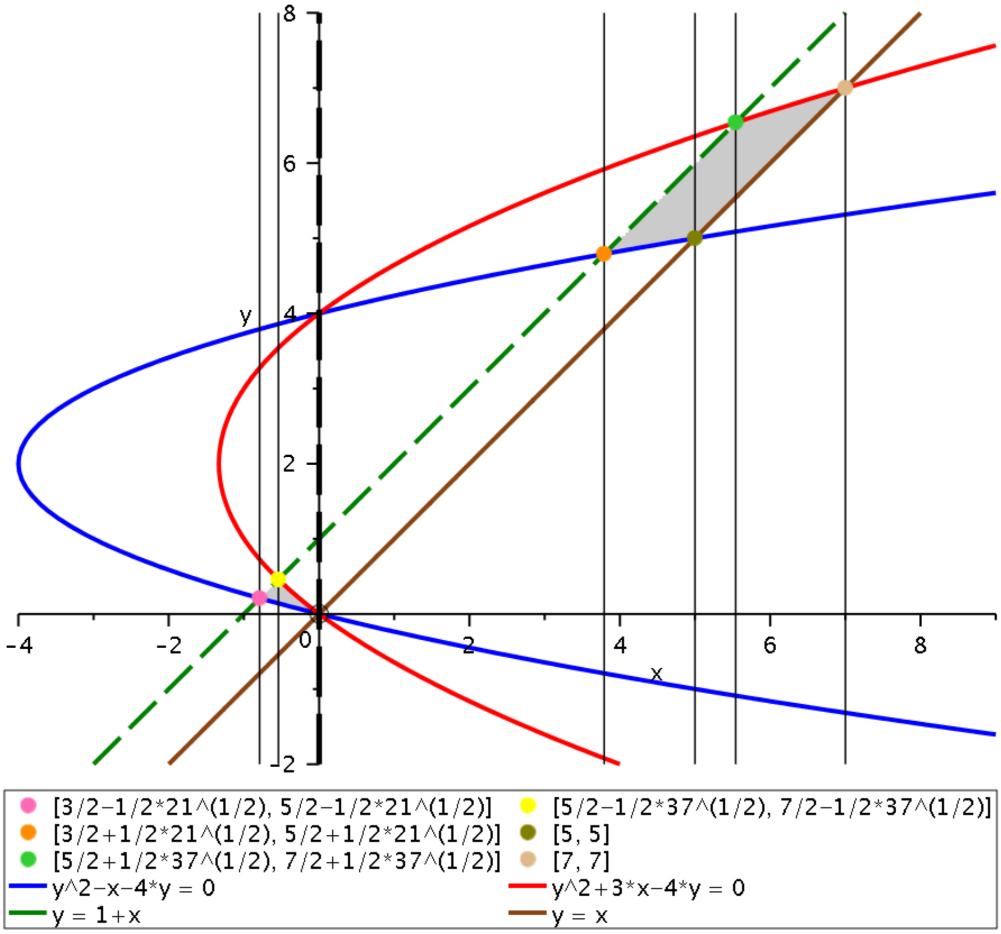
$$C := \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \big[3/2 + \sqrt{21}/2, 5\big] \wedge y \in \big[5/2 + \sqrt{21}/2, 6\big] \wedge \\ \wedge\ y < 1 + x \wedge (y-2)^2 - x - 4 \geq 0\Big\},$$

$$D := \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \big[5, 5/2 + \sqrt{37}/2\big] \wedge y \geq x \wedge y < 1 + x\Big\},$$

$$E := \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \big[5/2 + \sqrt{37}/2, 7\big] \wedge y \geq x \wedge (y-2)^2 - 4 - 3x \leq 0\Big\},$$



Obrázek 3.1.16: Definiční obor z Příkladu 3.1.16.



Obrázek 3.1.17: Podrobnější zakresleni definičního oboru z Příkladu 3.1.16.

▲

Příklad 3.1.17.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y)=\sqrt{1-\frac{2xy-x^2-4x+2y+2}{y^2-4}}.$$

Řešení. Z definice odmocniny dostáváme podmínku

$$1-\frac{2xy-x^2-4x+2y+2}{y^2-4}\geq 0.$$

přičemž $y\neq\pm2$. Tuto podmínku dále upravíme v závislosti na znaménku výrazu y^2-4. Nechť nejdříve $y^2-4>0$, tj. $y\in\mathbb{R}\setminus[-2,2]$, potom máme nerovnost

$$y^2-4-(2xy-x^2-4x+2y+2)\geq 0 \quad \text{neboli} \quad (x-y)^2+4x-2y-6\geq 0. \tag{3.1.3}$$

Jelikož na pravé straně není úplný čtverec (tj. $4x-2y$ není násobkem $x-y$), jedná se o množinu, jejíž hranici tvoří otočená parabola (tj. není orientovaná ve směru souřadných os). Abychom mohli tuto parabolu načrtnout, potřebujeme určit alespoň její vrchol a osu. K tomu využijeme transformaci určenou vlastními vektory matice kvadratické části (formy) na levé straně (3.1.3). Tuto matici získáme z koeficientů u členů x^2, y^2 a jedné poloviny koeficientu u xy, tj.

$$Q:=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}.$$

Matice Q má vlastní číslo 0 s vlastním vektorem $(1,-1)^\top\sim(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})^\top$ a vlastní číslo 2 s vlastním vektorem $(1,1)^\top\sim(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})^\top$. Potom volbou $u=(x-y)/\sqrt{2}$ a $v=(x+y)/\sqrt{2}$, tj. $x=(u+v)/\sqrt{2}$ a $y=(v-u)/\sqrt{2}$, rovnost $(x-y)^2+4x-2y-6=0$ přejde do tvaru

$$2u^2+3\sqrt{2}u+\sqrt{2}v=6 \quad \text{neboli} \quad \left(u+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(v-\frac{33}{4\sqrt{2}}\right)=0.$$

V rovině (u,v) se tedy jedná o parabolu s vrcholem v bodě $u=-3\sqrt{2}/4$ a $v=33/(4\sqrt{2})$ a s osou $u+3\sqrt{2}/4=0$, tj. v rovině (x,y) máme parabolu s vrcholem v bodě $x=27/8$ a $y=39/8$ a osou $x-y+3/2=0$ (parabola je na Obrázku 3.1.18 vyznačená červenou barvou, její osa hnědou barvou a vrchol zelenou).

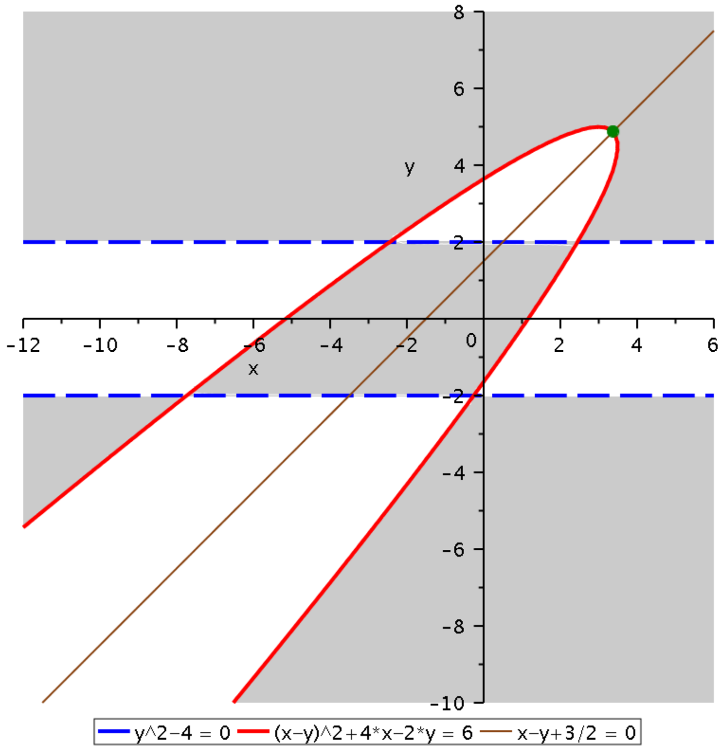
V případě $y^2-4<0$, tj. $y\in(-2,2)$, dostaneme nerovnost

$$y^2-4-(2xy-x^2-4x+2y+2)\leq 0 \quad \text{neboli} \quad (x-y)^2+4x-2y-6\leq 0,$$

což je opět množina vymezená výše popsanou parabolou. Definiční obor je tedy sjednocením dvou množin, tj.

$$D(f)=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 \mid y\in\mathbb{R}\setminus[-2,2]\ \wedge\ (x-y)^2+4x-2y-6\geq 0\right\}\bigcup$$
$$\bigcup\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 \mid y\in(-2,2)\ \wedge\ (x-y)^2+4x-2y-6\leq 0\right\}.$$

První množina je vnější část paraboly mimo pás vymezený přímkami $y = \pm 2$ a druhá množina je vnitřní část paraboly v pásu vymezeném přímkami $y = \pm 2$.



Obrázek 3.1.18: Podrobnější zakresleni definičního oboru z Příkladu 3.1.17.

Pro co nejpřesnější popis množiny $D(f)$ potřebujeme určit průsečíky paraboly s přímkami $y = \pm 2$. Tyto body nalezneme vyřešením kvadratických rovnic, které obdržíme po dosazení $y = \pm 2$ do rovnice

$$(x-y)^2 + 4x - 2y - 6 = 0 \tag{3.1.4}$$

Tyto body jsou $[-\sqrt{6}, 2]$, $[\sqrt{6}, 2]$ a $[-4-\sqrt{14}, -2]$, $[-4+\sqrt{14}, -2]$. Ještě ale potřebujeme určit také maximální hodnotu x-ové souřadnice bodů na parabole. Ten můžeme najít například tak, že z rovnice (3.1.4) vyjádříme x, tj.

$$x = f_1(y) = y - 2 + \sqrt{10-2y} \quad \text{a} \quad x = f_2(y) = y - 2 - \sqrt{10-2y}$$

pro $y \in (-\infty, 5]$. Tím jsme vlastně z paraboly udělali sjednocení grafů dvou funkcí proměnné y. Nyní potřebujeme určit maximální funkční hodnoty těchto funkcí. Jejich derivováním dostaneme

$$f_1'(y) = 1 - \frac{1}{\sqrt{10-2y}} \quad \text{a} \quad f_2'(y) = 1 + \frac{1}{\sqrt{10-2y}}.$$

Rovnice $f_1'(y) = 0$ má řešení $y^* = 9/2$. Protože $f_1''(y) = -1/(10-2y)^{3/2} < 0$ pro všechna $y < 5$ a $f(5) = 3$, je tento stacionární bod současně bodem globálního maxima funkce

$f_1(y)$ s hodnotou $f_1(9/2) = 7/2$. Rovnice $f_2'(y) = 0$ řešení nemá, takže funkce $f_2(y)$ nemá stacionární bod. To ale znamená, že $f_2(y)$ nabývá své největší hodnoty buď pro $y = 5$ nebo pro $y \to -\infty$ (v tomto případě bychom měli pouze supremum). Jenže snadno vidíme, že

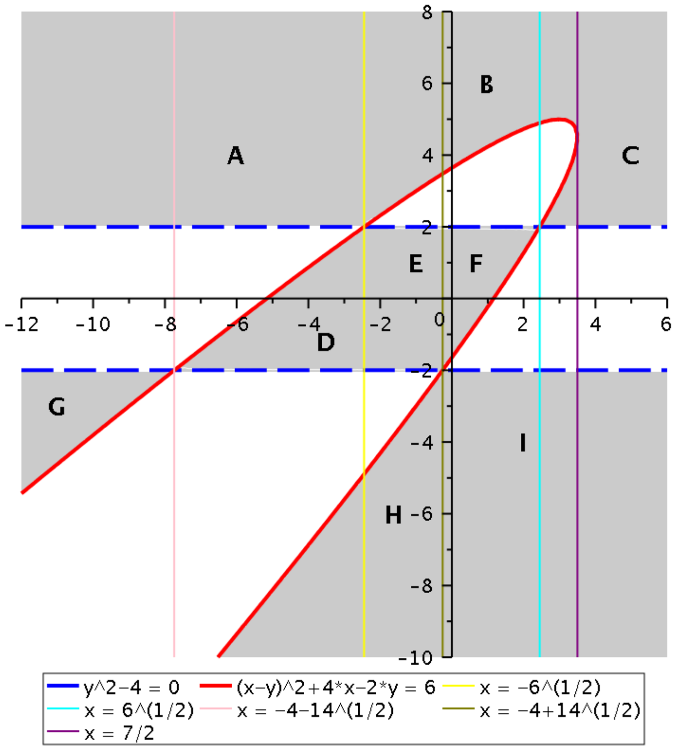
$$f_2(5) = 3 \quad \text{a} \quad \lim_{y \to -\infty} y - 2 - \sqrt{10 - 2y} = -\infty,$$

takže funkce $f_2(y)$ má maximum v bodě $x = 5$ s hodnotou $f_2(5) = 3$. Porovnáním maxim funkcí $f_1(y)$ a $f_2(y)$ zjistíme, že maximální hodnota x-ové souřadnice bodů na parabole je $x = 7/2$ (stejného výsledku lze dosáhnout také s pomocí tzv. implicitně zadané funkce, viz Podkapitola 3.7). Definiční obor proto můžeme vyjádřit jako sjednocení 9 množin, tj.

$$D(f) = A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F \cup G \cup H \cup I$$

(viz Obrázek 3.1.19), kde při označení $F(x, y) := (x - y)^2 + 4x - 2y - 6$ jsou jednotlivé množiny dány jako

$$\begin{aligned}
A &:= \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq -\sqrt{6} \ \wedge \ y > 2\right\},\\
B &:= \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-\sqrt{6}, 7/2] \ \wedge y > 2 \ \wedge \ F(x, y) \geq 0\right\},\\
C &:= \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 7/2 \ \wedge \ y > 2\right\},\\
D &:= \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-4 - \sqrt{14}, -\sqrt{6}] \ \wedge y \in (-2, 2) \ \wedge \ F(x, y) \leq 0\right\},\\
E &:= \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-\sqrt{6}, -4 + \sqrt{14}] \ \wedge y \in (-2, 2)\right\},\\
F &:= \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-4 + \sqrt{14}, \sqrt{6}] \ \wedge y \in (-2, 2) \ \wedge \ F(x, y) \leq 0\right\},\\
G &:= \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq -4 - \sqrt{14} \ \wedge y < -2 \ \wedge \ F(x, y) \geq 0\right\},\\
H &:= \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq -4 + \sqrt{14} \ \wedge y < -2 \ \wedge \ F(x, y) \geq 0\right\},\\
I &:= \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq -4 + \sqrt{14} \ \wedge y < -2\right\},
\end{aligned}$$



Obrázek 3.1.19: Podrobnější zakresleni definičního oboru z Příkladu 3.1.17.

▲

Příklad 3.1.18.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{\sin\left[\pi(x^2 + 4y^2 - x + 8y + 1)\right]}.$$

Řešení. Z definice odmocniny dostáváme podmínku

$$\sin\left[\pi(x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 1)\right] \geq 0.$$

Protože funkce sinus je nezáporná v intervalech

$$\dots, [-4\pi, -3\pi],\ [-2\pi, -\pi],\ [0, \pi],\ [2\pi, 3\pi],\ [4\pi, 5\pi],\ \dots, \quad \text{tj.} \quad [2k\pi, (2k+1)\pi],\ k \in \mathbb{Z},$$

musí body z definičního oboru splňovat

$$2k\pi \leq \pi(x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 1) \leq (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tuto podmínku můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$2k \leq (x-2)^2 - 4 + 4(y+1)^2 - 4 + 1 \leq 2k + 1, \quad k \in \mathbb{Z},$$

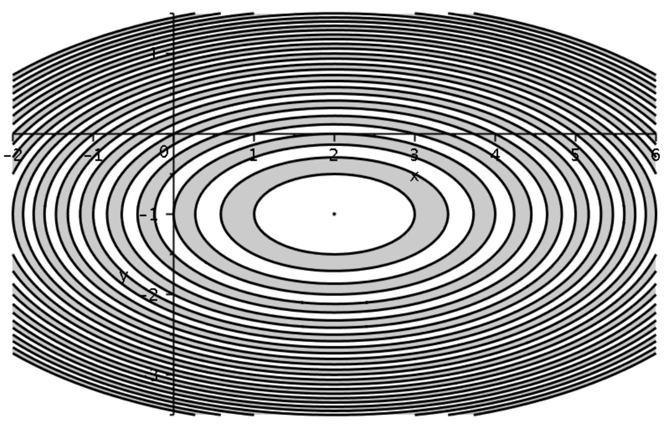
což ještě upravíme do tvaru

$$2k + 7 \leq (x-2)^2 + 4(y+1)^2 \leq 2k + 8, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pro $k \leq -5$ nemá tato dvojice řešení, takže definiční obor je

$$D(f) = \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \geq -4}} \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid 2k + 7 \leq (x-2)^2 + 4(y+1)^2 \leq 2k + 8 \right\}.$$

Jedná se o množinu tvořenou bodem $[2, -1]$ (odpovídá $k = -4$) a sjednocením množin vymezených dvěma elipsami se středem v bodě $[2, -1]$ (odpovídají hodnotám $k \geq -3$). První (vnitřní) z těchto elips má poloosy s délkou $\sqrt{2k+7}$ (ve směru osy x) a $\sqrt{2k+7}/2$ (ve směru osy y), zatímco druhá (vnější) elipsa má poloosy s délkou $\sqrt{2k+8}$ (ve směru osy x) a $\sqrt{2k+8}/2$ (ve směru osy y), viz Obrázek 3.1.20.



Obrázek 3.1.20: Definiční obor z Příkladu 3.1.18.

▲

Příklad 3.1.19.

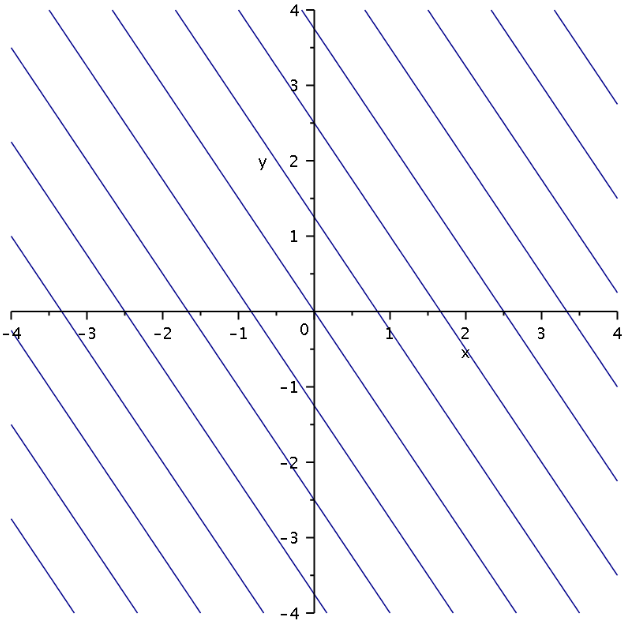
Určete vrstevnice funkce

$$f(x, y) = \frac{3x + 2y}{5}.$$

Řešení. Vrstevnice funkce f na úrovni c je množina bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ splňující

$$\frac{3x + 2y}{5} = c \quad \text{neboli} \quad y = (5c - 3x)/2.$$

Vrstevnicí na úrovni $c = 0$ je přímka o rovnici $y = -3x/2$ procházející počátkem a pro $c \neq 0$ je jedná o rovnoběžku s touto přímkou posunutou o vzdálenost $5c/2$ ve směru osy y (viz Obrázek 3.1.21).



Obrázek 3.1.21: Vrstevnice z Příkladu 3.1.19.

▲

Příklad 3.1.20.

Určete vrstevnice funkce

$$f(x,y) = \sqrt{4 - |x+1| - 2\,|y|}.$$

Řešení. Vrstevnice funkce f na úrovni c je množina bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňující

$$\sqrt{4 - |x+1| - 2\,|y|} = c. \tag{3.1.5}$$

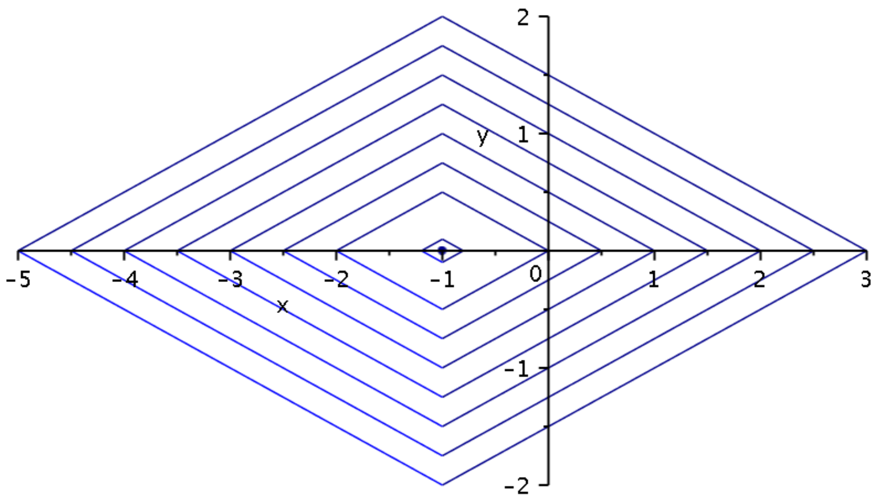
Pro $c < 0$ jsou vrstevnice prázdné množiny. Pro $c \geq 0$ můžeme rovnost (3.1.5) přepsat do tvaru

$$4 - |x+1| - 2\,|y| = c^2, \quad \text{tj.} \quad 4 - c^2 = |x+1| + 2\,|y|, \tag{3.1.6}$$

z čehož vidíme, že také pro $c > 2$ jsou vrstevnice prázdné množiny. Pro $c = 2$ vyhovuje pouze bod $[-1,0]$. Pro $0 \leq c < 2$ si rozdělíme rovinu $\mathbb{R}^2$ na čtyři části dle znamének výrazů uvnitř absolutních hodnot, tj.

$$\begin{aligned}
x+1 \geq 0 \wedge y \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad 4 - c^2 = x + 1 + 2y, && \text{tj. } y = (3 - x - c^2)/2,\ x \in [-1, 3 - c^2],\\
x+1 \geq 0 \wedge y \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad 4 - c^2 = x + 1 - 2y, && \text{tj. } y = (x - 3 + c^2)/2,\ x \in [-1, 3 - c^2],\\
x+1 \leq 0 \wedge y \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad 4 - c^2 = -x - 1 + 2y, && \text{tj. } y = (x + 5 - c^2)/2,\ x \in [c^2 - 5, -1],\\
x+1 \leq 0 \wedge y \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad 4 - c^2 = -x - 1 - 2y, && \text{tj. } y = (c^2 - x - 5)/2,\ x \in [c^2 - 5, -1],
\end{aligned}$$

přičemž intervaly pro x plynou z vyjádření pro y a požadavků na znaménko pro $x+1$ a y. Vrstevnice jsou tedy kosodélníky, jejichž strany jsou určeny jednotlivými úsečkami popsanými výše (viz Obrázek 3.1.22).



Obrázek 3.1.22: Vrstevnice z Příkladu 3.1.20.

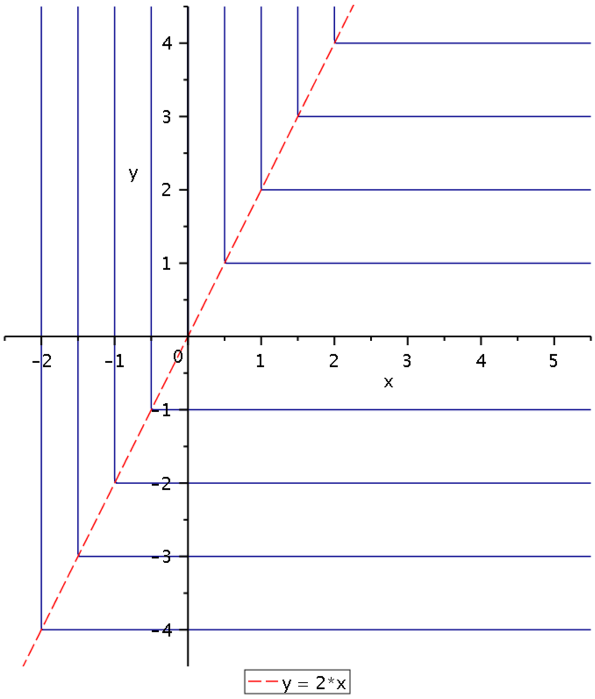
▲

Příklad 3.1.21.

Určete vrstevnice funkce
$$f(x,y) = \min(2x,y).$$

Řešení. Vrstevnice funkce f na úrovni c je množina bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňující
$$\min(2x,y) = c.$$

Tvar vrstevnic je určen přímkou $y = 2x$ (na Obrázku 3.1.23 znázorněna červenou barvou). Pro $y \geq 2x$ je vrstevnice tvořena polopřímkou $x = c$, zatímco pro $y \leq 2x$ jde o polopřímku $y = c$ (viz Obrázek 3.1.23).



Obrázek 3.1.23: Vrstevnice z Příkladu 3.1.21.

▲

Příklad 3.1.22.

Určete vrstevnice funkce

$$f(x,y) = \frac{x^2+2xy+y^2+2}{2x^2+4xy+2y^2-1}.$$

Řešení. Vrstevnice funkce f na úrovni c je množina bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňující

$$\frac{x^2+2xy+y^2+2}{2x^2+4xy+2y^2-1} = c \quad \text{neboli} \quad (x+y)^2+2 = c[2(x+y)^2-1],$$

což můžeme přepsat do tvaru

$$(1-2c)(x+y)^2 = -c-2. \tag{3.1.7}$$

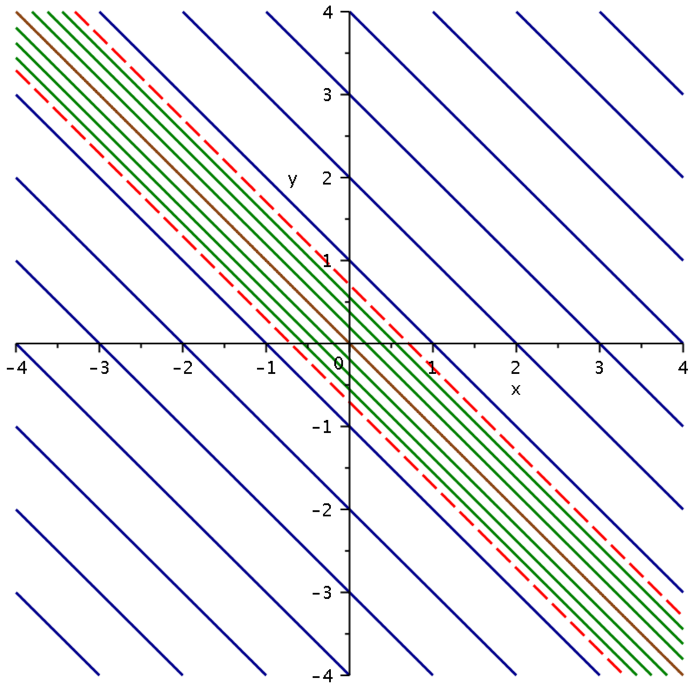
Pro $c = 1/2$ je vrstevnice prázdná množina, neboť v takovém případě se rovnost (3.1.7) redukuje na $0 = -5/2$. Pro $c \neq 1/2$ je (3.1.7) ekvivalentní s rovností

$$(x+y)^2 = -\frac{c+2}{1-2c}.$$

Pro $c \in (-2, 1/2)$ je výraz na pravé straně záporný, takže i pro tyto hodnoty jsou vrstevnice prázdné množiny. Pro $c = -2$ tvoří vrstevnici dvojnásobná přímka $y = -x$ (na Obrázku 3.1.24 znázorněna hnědou barvou). Pro $c \in \mathbb{R}\setminus[-2, 1/2]$ jsou vrstevnice dvojice přímek o rovnicích

$$y = -x + \sqrt{-\frac{c+2}{1-2c}} \quad \text{a} \quad y = -x - \sqrt{-\frac{c+2}{1-2c}},$$

které pro $c > 1/2$ (na Obrázku 3.1.24 vykresleny modrou barvou) leží vně pásu vymezeného dvojicí přímek o rovnicích $y = -x \pm 1/\sqrt{2}$ (na Obrázku 3.1.24 vykresleny červenou barvou) a pro $c < -2$ (na Obrázku 3.1.24 vykresleny zelenou barvou) leží uvnitř tohoto pásu. Pro $c \to -\infty$ a $c \to \infty$ se vrstevnice blíží k této dvojici přímek. Nicméně neexistuje žádná hodnota $c \in \mathbb{R}$, pro které by tato dvojice byla vrstevnicí funkce f. Proč? Jak vypadá definiční obor funkce f? Ještě pro úplnost dodejme, že pro $c \to -2$ (pouze zleva) se vrstevnice přibližují k dvojnásobné přímce $y = -x$, zatímco pro $c \to 1/2$ (pouze zprava) „utíkají do nekonečna".



Obrázek 3.1.24: Vrstevnice z Příkladu 3.1.22.

▲

Příklad 3.1.23.

Určete vrstevnice funkce

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3).$$

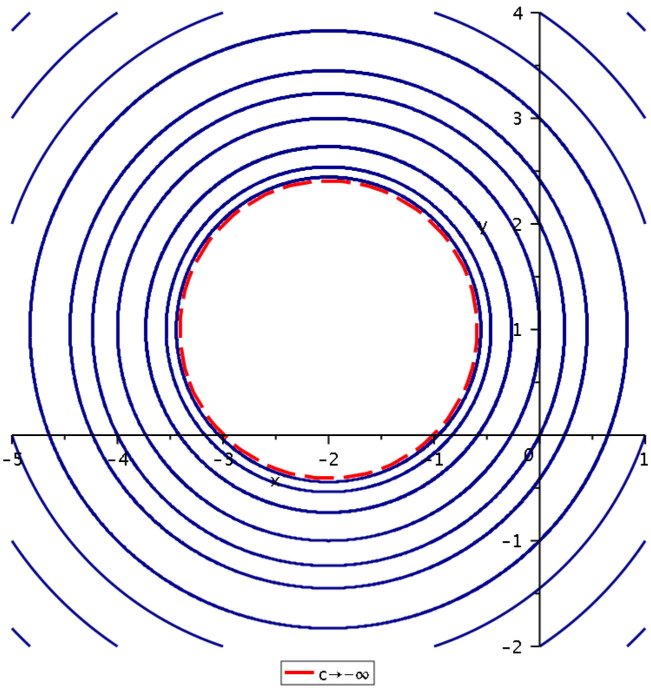
Řešení. Vrstevnice funkce f na úrovni c je množina bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňující

$$\ln(x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3) = c. \tag{3.1.8}$$

Odlogaritmováním obou stran a doplněním na čtverec získáme

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = \mathrm{e}^c + 2. \tag{3.1.9}$$

Protože oborem hodnot exponenciální funkce je interval $(0,\infty)$, jsou vrstevnice funkce f kružnice se středem v bodě $[-2,1]$ a poloměrem $\sqrt{\mathrm{e}^c + 2}$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ (viz Obrázek 3.1.25). Všimněte si, že pro $c \to -\infty$ konvergují vrstevnice ke kružnici s poloměrem $\sqrt{2}$ (ta je na Obrázku 3.1.25 zvýrazněná červenou barvou), tj. kružnice se středem v $[-2,1]$ a poloměrem $r \leq \sqrt{2}$ nepatří mezi vrstevnice funkce f. Proč? Jak vypadá $D(f)$?



Obrázek 3.1.25: Vrstevnice z Příkladu 3.1.23.

▲

Příklad 3.1.24.

Určete vrstevnice funkce

$$f(x,y) = \sqrt{2x^2 - 2x + y^2/2 - y + 2}.$$

Řešení. Vrstevnice funkce f na úrovni c je množina bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňujících

$$\sqrt{2x^2 - 2x + y^2/2 - y + 2} = c. \tag{3.1.10}$$

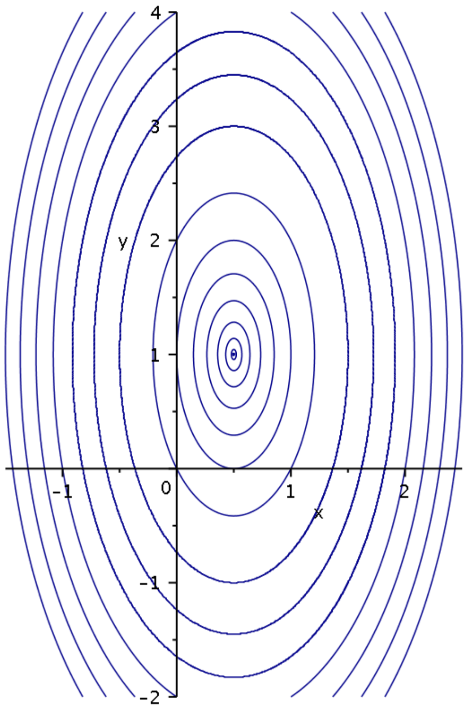
Protože odmocnina nabývá pouze nezáporných hodnot, má smysl uvažovat jenom hodnoty $c \geq 0$ (vrstevnice na úrovni $c < 0$ jsou prázdné množiny). Potom můžeme rovnost (3.1.10) přepsat do tvaru

$$2(x - 1/2)^2 + (y-1)^2/2 = c^2 - 1. \tag{3.1.11}$$

Odtud plyne, že také pro $0 \leq c < 1$ jsou vrstevnice prázdné množiny (neboť v takovém případě $c^2 - 1 < 0$). Pro $c = 1$ vyhovuje rovnosti (3.1.11) pouze bod $[1/2, 1]$. Jelikož (3.1.11) je pro $c > 1$ ekvivalentní s rovností

$$\left(\frac{x - 1/2}{\sqrt{(c^2-1)/2}}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{\sqrt{2(c^2-1)}}\right)^2 = 1,$$

vidíme, že pro tyto hodnoty c se jedná o elipsy se středem v bodě $[1/2, 1]$ a délkou hlavní poloosy $\sqrt{2(c^2-1)}$ ve směru osy y a vedlejší poloosy $\sqrt{(c^2-1)/2}$ ve směru osy x (viz Obrázek 3.1.26).



Obrázek 3.1.26: Vrstevnice z Příkladu 3.1.24.

▲

Příklad 3.1.25.

Určete vrstevnice funkce

$$f(x,y) = 4x^2 - 4xy + 7y^2 - 4x + 14y + 4.$$

Řešení. Vrstevnice funkce f na úrovni c je množina bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňující

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 - 4x + 14y + 4 = c. \tag{3.1.12}$$

K pouhému určení typu jednotlivých vrstevnic stačí upravit levou stranu rovnice (3.1.12) např. jako (abychom eliminovali výraz xy)

$$\begin{aligned}4x^2 - 4xy + 7y^2 - 4x + 14y + 4 &= (2x-y)^2 + 6y^2 - 4x + 14y + 4 = \\ &= (2x-y)^2 - 2(2x-y) + 6y^2 + 12y + 4 = (2x-y)^2 - 2(2x-y) + 6(y+1)^2 - 2 = \\ &= [(2x-y)-1]^2 + 6(y+1)^2 - 3 = (z-1)^2 + 6(y+1)^2 - 3 \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

kde $z := 2x - y$. Takže rovnost (3.1.12) je ekvivalentní s

$$(z-1)^2 + 6(y+1)^2 = c + 3.$$

Odtud vidíme, že rovnice (3.1.12) nemá řešení pro $c < -3$. Pro $c = -3$ vyhovuje pouze bod $z = 1$ a $y = -1$, tj. $x = 0$ a $y = -1$. Pro hodnoty $c > -3$ se jedná o elipsy, které mají v souřadnicích (z,y) rovnice

$$\left(\frac{z-1}{\sqrt{c+3}}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{\sqrt{(c+3)/6}}\right)^2 = 1. \tag{3.1.14}$$

Zpětným dosazením $z = 2x - y$ do (3.1.14) obdržíme rovnice vrstevnic v rovině (x,y). Budeme-li je však chtít načrtnout (budou totiž otočené), je výhodnější využít matici kvadratické části (formy) funkce f. Tuto matici získáme z koeficientů u členů x^2, y^2 a jedné poloviny koeficientu u xy, tj.

$$Q := \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla matice Q jsou 3 a 8, kterým přísluší vlastní vektory $(2,1)^T \sim (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})^T$ a $(-1,2)^T \sim (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})^T$. Pak volbou $u = (2x+y)/\sqrt{5}$ a $v = (-x+2y)/\sqrt{5}$, tj. $x = (2u-v)/\sqrt{5}$ a $y = (u+2v)/\sqrt{5}$, dostaneme na levé straně (3.1.12) výraz (jelikož jsme použili vlastní vektory s jednotkovou velikostí, jsou koeficienty u druhých mocnin rovny právě vlastním číslům)

$$3u^2 + 8v^2 + \frac{6u}{\sqrt{5}} + \frac{32v}{\sqrt{5}} + 4 = 3(u + 1/\sqrt{5})^2 + 8(v + 2/\sqrt{5})^2 - 3.$$

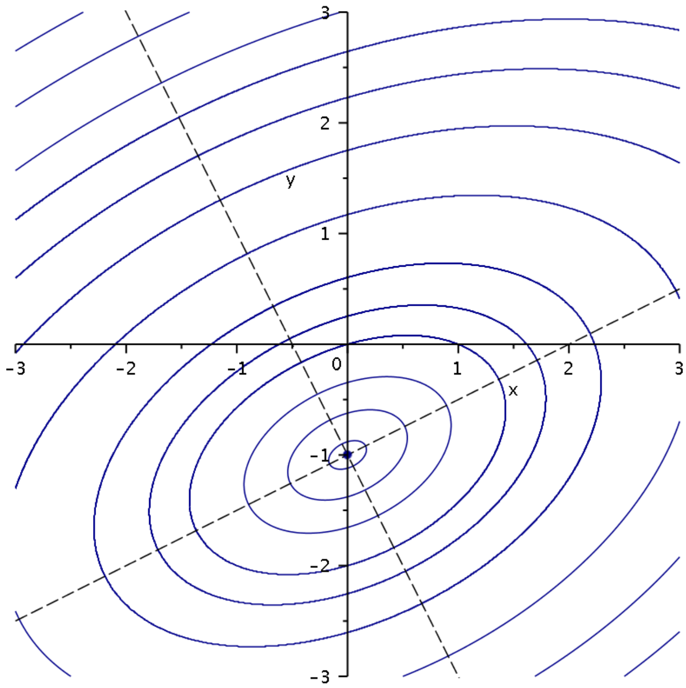
Vrstevnice mají proto v souřadnicích (u, v) tvar

$$3(u + 1/\sqrt{5})^2 + 8(v + 2/\sqrt{5})^2 = c + 3,$$

ze kterého snadno získáme tentýž závěr jako v předchozí části: pro $c < -3$ jsou vrstevnice prázdné množiny; vrstevnice na úrovni $c = -3$ je jednobodová množina obsahující bod $u = -1/\sqrt{5}$ a $v = -2/\sqrt{5}$, tj. $x = 0$ a $y = -1$; a pro $c > -3$ se jedná o elipsy

$$\left(\frac{u + 1/\sqrt{5}}{\sqrt{(c+3)/3}}\right)^2 + \left(\frac{v + 2/\sqrt{5}}{\sqrt{(c+3)/8}}\right)^2 = 1. \tag{3.1.15}$$

Výhodou tohoto vyjádření ovšem je, že z (3.1.15) snadno určíme poloosy a jejich délky. V rovině (u, v) jsou poloosami přímky o rovnicích $u = 0$ a $v = 0$, což dává v původních souřadnicích přímky $2x + y = 0$ a $-x + 2y = 0$. Tyto přímky ale ještě musíme posunout do středu elips, který odpovídá bodu $[u, v] = \left[-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}\right]$, tj. $[x, y] = [0, -1]$. Proto poloosy těchto elips jsou přímky $y = -2x - 1$ a $y = x/2 - 1$ a délky poloos jsou $\sqrt{(c+3)/3}$ a $\sqrt{(c+3)/8}$ (viz Obrázek 3.1.27).



Obrázek 3.1.27: Vrstevnice z Příkladu 3.1.25.

▲

Příklad 3.1.26.

Určete vrstevnice funkce

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-2y^2+2x+4y-5}.$$

Řešení. Vrstevnice funkce f na úrovni c je množina bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňující

$$\mathrm{e}^{x^2-2y^2+2x+4y-5} = c. \tag{3.1.16}$$

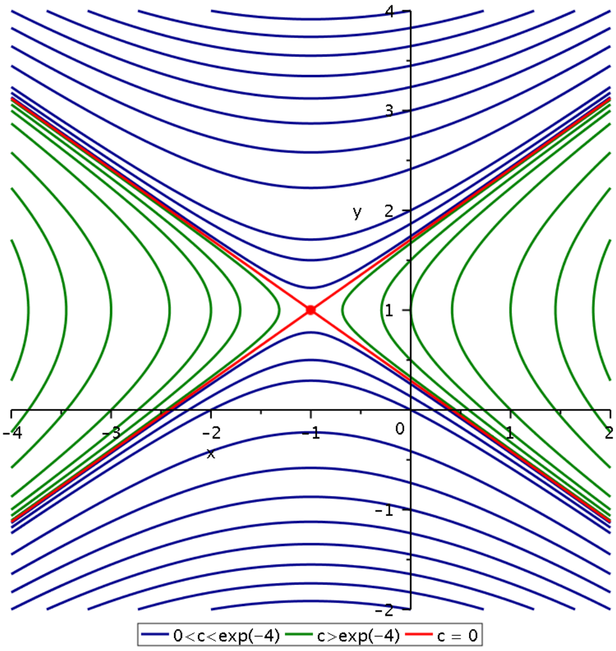
Protože obor hodnot exponenciální funkce je interval $(0,\infty)$, jsou vrstevnice funkce f na úrovni $c \leq 0$ prázdné množiny. Pro $c > 0$ dostaneme zlogaritmováním obou stran rovnosti (3.1.16) a doplněním na čtverec ekvivalentní podmínku

$$(x+1)^2 - 2(y-1)^2 - 4 = \ln c. \tag{3.1.17}$$

Vrstevnici funkce f na úrovni $c = \mathrm{e}^{-4}$ tvoří dvojice různoběžek $y = \pm\frac{x+1}{\sqrt{2}} + 1$ protínajících se v bodě $[-1,1]$ (na Obrázku 3.1.28 vyznačené červenou barvou). Je-li $c > 0$ a $c \neq \mathrm{e}^{-4}$, můžeme (3.1.17) upravit do tvaru

$$\frac{(x+1)^2}{\ln c + 4} - \frac{(y-1)^2}{(\ln c + 4)/2} = 1.$$

Odtud vidíme, že pro $0 < c < \mathrm{e}^{-4}$ se jedná o hyperboly orientované ve směru osy y (na Obrázku 3.1.28 vyznačené modrou barvou), neboť v takovém případě je $\ln c + 4 < 0$. Pro $c > \mathrm{e}^{-4}$ je $\ln c + 4 > 0$, takže vrstevnice jsou hyperboly orientované ve směru osy x (na Obrázku 3.1.28 vyznačené zelenou barvou).



Obrázek 3.1.28: Vrstevnice z Příkladu 3.1.26.

▲

Příklad 3.1.27.

Určete vrstevnice funkce

$$f(x,y) = (5x+1)^{3y-2}.$$

Řešení. Vrstevnice funkce f na úrovni c je množina bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňující

$$(5x+1)^{3y-2} = c. \tag{3.1.18}$$

Funkce f je definována pouze pro $x > -1/5$ a jejím oborem hodnot je interval $(0,\infty)$, takže stačí uvážit pouze $c > 0$ (pro $c \leq 0$ jsou vrstevnice prázdné množiny). Z (3.1.18) snadno vidíme, že vrstevnice na úrovni $c = 1$ jsou přímky o rovnicích $5x+1 = 1$ (tj. $x = 0$) a $3y - 2 = 0$ (na Obrázku 3.1.29 vyznačené červenou barvou). Pro určení dalších vrstevnic zlogaritmujeme obě strany rovnosti (3.1.18), čímž dostaneme

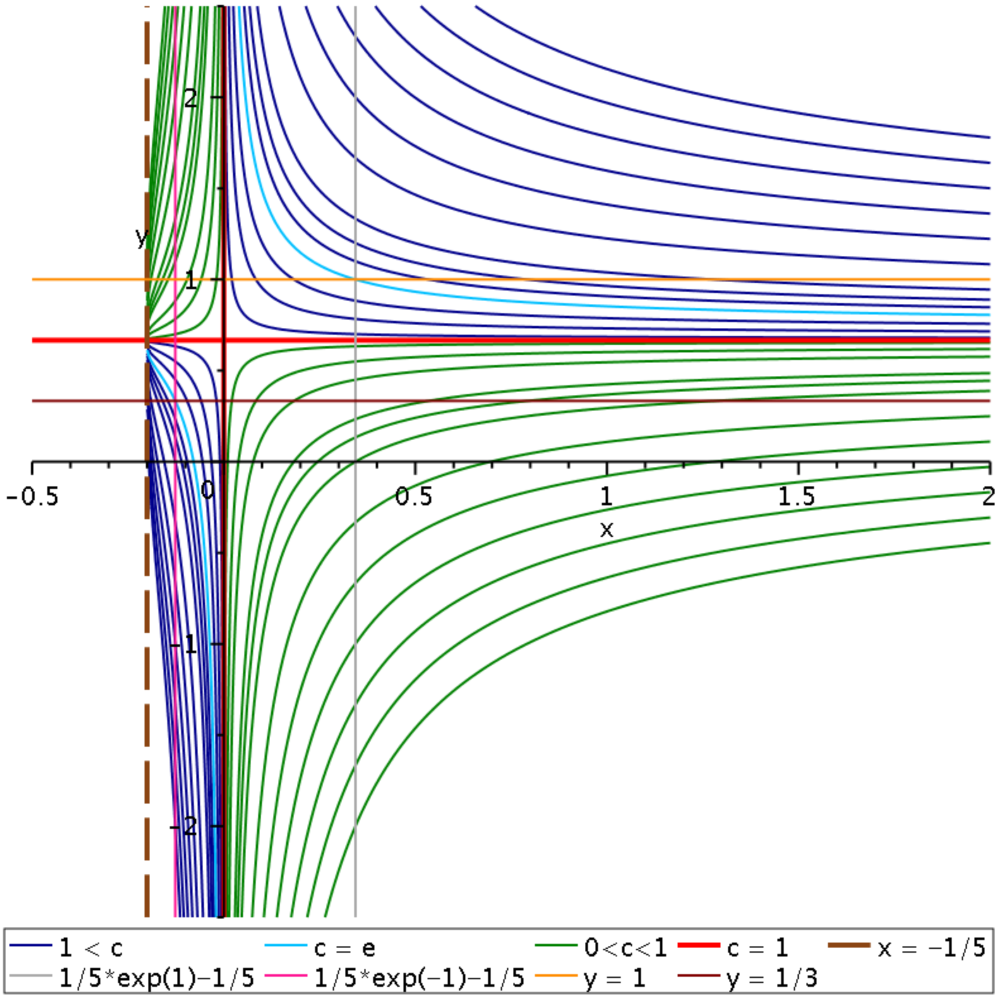
$$(3y-2)\ln(5x+1) = \ln c \quad \text{neboli} \quad y = g_c(x) := \frac{\ln c}{3\ln(5x+1)} + \frac{2}{3}. \tag{3.1.19}$$

Pro $c > 1$ dostaneme graf převrácené hodnoty funkce $\ln(5x+1)$ s funkčními hodnotami vynásobenými číslem $(\ln c)/3$ a posunutý o $2/3$ ve směru kladné části osy y. Funkce $g_c(x)$ má asymptotu bez směrnice v bodě $x = 0$, takže její graf bude mít dvě větve. Ke konstrukci tohoto grafu využijeme znalost základních vlastností funkce $\ln x$. Uvažme nejdříve pro jednoduchost $c = \mathrm{e}$. Protože pro $0 < x < (\mathrm{e}-1)/5$ jsou hodnoty $[\ln(5x+1)]^{-1}$ větší než 1, bude v tomto případě graf funkce $g_{\mathrm{e}}(x)$ ležet nad přímkou $y = 1$, přičemž $g_{\mathrm{e}}(x) \to \infty$ pro $x \to 0^+$ a $g_{\mathrm{e}}((\mathrm{e}-1)/5)) = 1$. Pro $x > (\mathrm{e}-1)/5$ graf funkce $g_{\mathrm{e}}(x)$ ležet v pásu $2/3 < y < 1$, přičemž $g_{\mathrm{e}}(x) \to 2/3$ pro $x \to \infty$ (přímka $y = 2/3$ je asymptotou se směrnicí v ∞). Snadno se také můžeme přesvědčit, že funkce $g_{\mathrm{e}}(x)$ je klesající a konvexní pro $x > 0$, neboť

$$g'_{\mathrm{e}}(x) = -\frac{5}{3\ln(5x+1)^2\,(5x+1)}, \qquad g''_{\mathrm{e}}(x) = \frac{50 + 25\ln(5x+1)}{3\ln(5x+1)^3\,(5x+1)^2}. \tag{3.1.20}$$

Podobná situace nastane také v případě $-1/5 < x < 0$, tj. pro $-1/5 < x < (\mathrm{e}^{-1}-1)/5$ budou hodnoty $g_{\mathrm{e}}(x)$ v pásu $1/3 < y < 2/3$ a pro $(\mathrm{e}^{-1}-1)/5 < x < 0$ bude $g_{\mathrm{e}}(x) < 1/3$, přičemž platí $g_{\mathrm{e}}(x) \to 2/3$ pro $x \to (-1/5)^+$ a $g_{\mathrm{e}}(x) \to -\infty$ pro $x \to 0^-$. Funkce je opět klesající pro $-1/5 < x < 0$, konvexní pro $-1/5 < x \leq -1/5 + 1/(5\,\mathrm{e}^2)$ a konkávní pro $-1/5 + 1/(5\,\mathrm{e}^2) \leq x < 0$, tj. bod $-1/5 + 1/(5\,\mathrm{e}^2)$ je tedy inflexním bodem funkce $g_{\mathrm{e}}(x)$, viz (3.1.20).

Pro jiné hodnoty $c > 1$ dostaneme vrstevnice odečtením $2/3$, vynásobením číslem $\ln c$ a přičtením $2/3$ zpět (na Obrázku 3.1.29 vyznačené modrou barvou). Protože $\ln c = -\ln \frac{1}{c}$, získáme větve vrstevnic pro $0 < c < 1$ ze symetrie vzhledem k přímce $y = 2/3$ (na Obrázku 3.1.29 vyznačené zelenou barvou).



Obrázek 3.1.29: Vrstevnice z Příkladu 3.1.27.

▲

Příklad 3.1.28.

Určete vrstevnice funkce

$$f(x,y) = \sin(xy).$$

Řešení. Vrstevnice funkce f na úrovni c je množina bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňující

$$\sin(xy) = c. \tag{3.1.21}$$

Jelikož obor hodnot funkce sinus je interval $[-1,1]$, jsou vrstevnice na úrovni $c < -1$ a $c > 1$ prázdné množiny. Pro $c = \pm 1$ musí platit

$$xy = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{tj. (zjevně } x \neq 0) \quad y = \frac{\pm\pi/2 + 2k\pi}{x}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tedy vrstevnice obsahují všechny (rovnoosé) hyperboly odpovídající volbám $k \in \mathbb{Z}$ (na Obrázku 3.1.30 jsou vykresleny červenou barvou pro $c = 1$ a růžovou barvou pro $c = -1$). Pro $c = 0$ dostaneme podmínku

$$xy = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

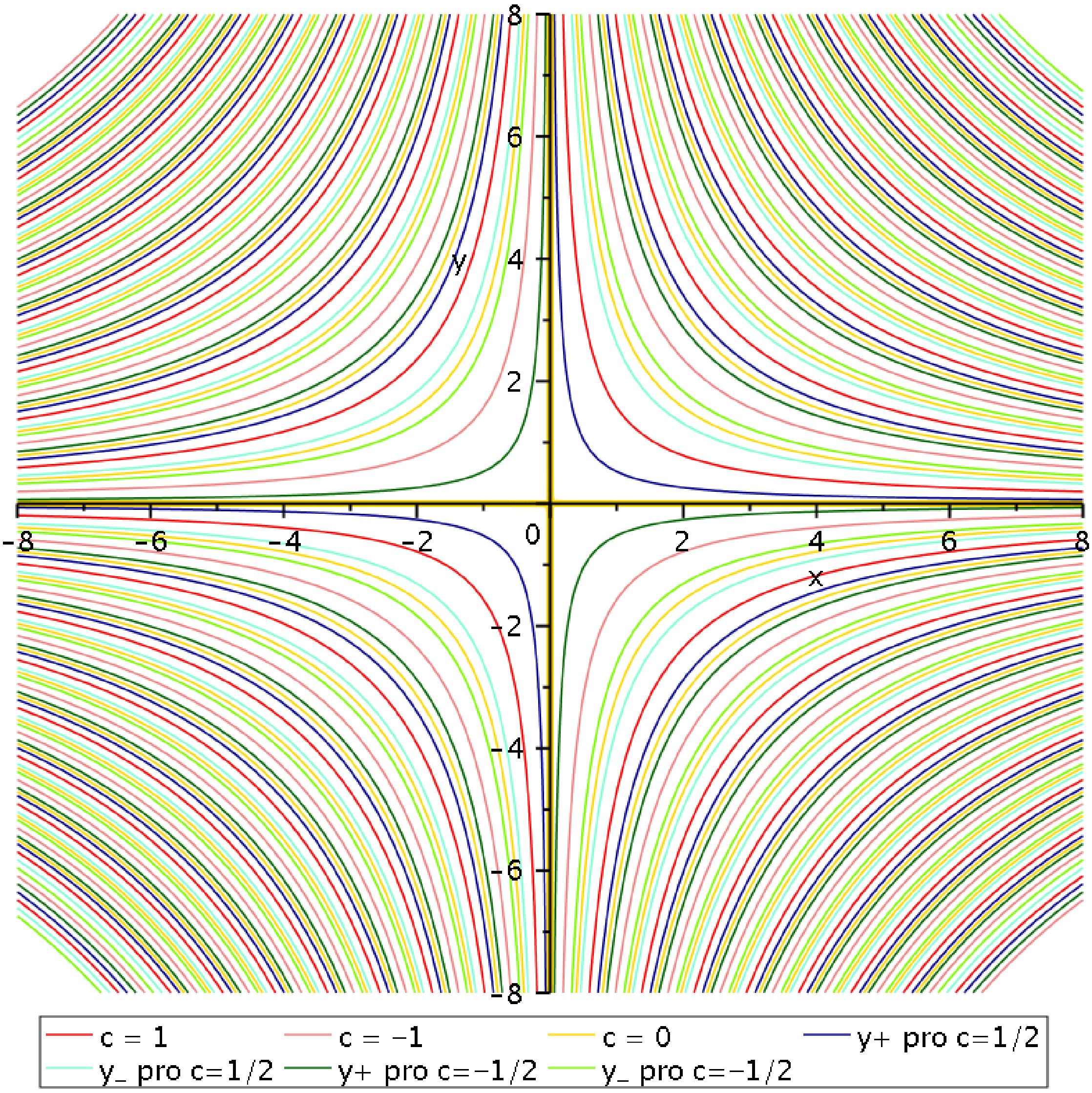
V takovém případě vrstevnice obsahují osy x a y (tj. přímky $y = 0$ a $x = 0$, což odpovídá volbě $k = 0$) a všechny (rovnoosé) hyperboly odpovídající volbám $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ (na Obrázku 3.1.30 jsou vykresleny žlutou barvou). Pro zbývající hodnoty $c \in (-1,0) \cup (0,1)$ si stačí uvědomit, že podmínka (3.1.21) je ekvivalentní s požadavkem

$$xy = \arcsin(c) + 2k\pi \quad \text{nebo} \quad xy = \pi - \arcsin(c) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože $c \neq 0$, je opět $x \neq 0$ a vidíme, že vrstevnice tvoří (rovnoosé) hyperboly o rovnicích

$$y_+ = \frac{\arcsin(c) + 2k\pi}{x} \quad \text{a} \quad y_- = \frac{\pi - \arcsin(c) + 2k\pi}{x}$$

odpovídající různým volbám $k \in \mathbb{Z}$. Na Obrázku 3.1.30 je modrou a světle modrou znázorněna vrstevnice pro $c = 1/2$ (modré hyperboly jsou pro y_+ a světle modré pro y_-) a podobně pro $c = -1/2$ se zelenou a světle zelenou barvu.



Obrázek 3.1.30: Vrstevnice z Příkladu 3.1.28.

▲

Příklad 3.1.29.

Určete vrstevnice funkce

$$f(x,y) = \frac{y-3x}{2x^2+y^2+2x-y+1}.$$

Řešení. Vrstevnice funkce f na úrovni c je množina bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňující

$$\frac{y-3x}{2x^2+y^2+2x-y+1} = c, \tag{3.1.22}$$

přičemž máme $D(f) = \mathbb{R}$, neboť platí

$$2x^2+y^2+2x-y+1 = 2(x^2+1)+(y^2-y)+1 = 2(x+1/2)^2+(y-1/2)^2+1/2.$$

Vrstevnicí na úrovni $c = 0$ je přímka o rovnici $y = 3x$ (na Obrázku 3.1.31 znázorněna červenou barvou). Pro $c \neq 0$ musíme rovnost (3.1.22) ještě dále upravit do vhodnějšího tvaru, tj.

$$\begin{aligned}
\frac{y}{c} - \frac{3x}{c} &= 2x^2+y^2+2x-y+1,\\
2\left[x^2+\left(1+\frac{3}{2c}\right)x\right]+\left[y^2-\left(1+\frac{1}{c}\right)y\right]+1 &= 0,\\
2\left[x+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4c}\right)\right]^2+\left[y-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2c}\right)\right]^2 &= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4c}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2c}\right)-1,\\
2\left[x+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4c}\right)\right]^2+\left[y-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2c}\right)\right]^2 &= -\frac{2c^2-16c-11}{8c^2}.
\end{aligned}$$

Jelikož na levé straně bude vždy součet dvou nezáporných čísel, potřebujeme ještě určit znaménko kvadratického polynomu $p(c) := 2c^2-16c-11$ v čitateli zlomku na pravé straně. Kořeny polynomu $p(c)$ jsou $4 \pm \sqrt{43/2}$, takže dostáváme

$$\begin{aligned}
p(c) > 0 \quad &\text{pro} \quad c \in \left(-\infty, 4-\sqrt{43/2}\right) \bigcup \left(4+\sqrt{43/2}, \infty\right),\\
p(c) < 0 \quad &\text{pro} \quad c \in \left(4-\sqrt{43/2}, 4+\sqrt{43/2}\right).
\end{aligned}$$

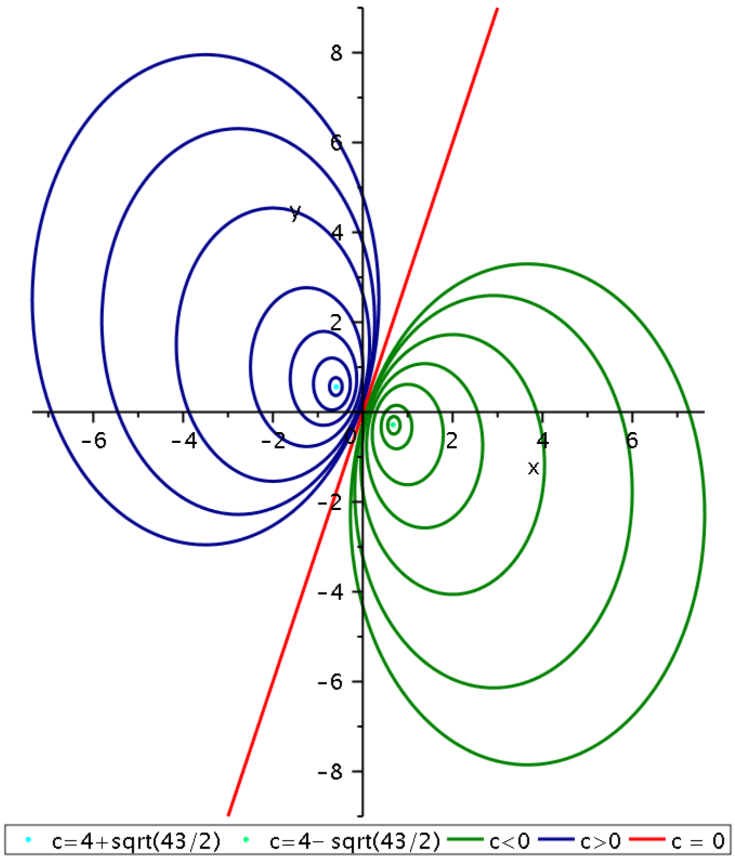
Proto pro $c \notin [4-\sqrt{43/2}, 4+\sqrt{43/2}]$ jsou vrstevnice prázdné množiny, neboť v takovém případě je na pravé straně záporné číslo. Pro $c = 4 \pm \sqrt{43/2}$ tvoří vrstevnice jediný bod o souřadnicích $\left[-\frac{1}{2}-\frac{3}{4c}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2c}\right]$ (na Obrázku 3.1.31 jsou body znázorněny modrou a zelenou barvou). Konečně pro

$$c \in \left(4-\sqrt{43/2}, 0\right) \bigcup \left(0, 4+\sqrt{43/2}\right)$$

jsou vrstevnice elipsy se středem v bodě $\left[-\frac{1}{2}-\frac{3}{4c}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2c}\right]$ a délkami poloos

$$\sqrt{-\frac{2c^2-16c-11}{16c^2}} \quad \text{a} \quad \sqrt{-\frac{2c^2-16c-11}{8c^2}}$$

(viz Obrázek 3.1.31, kde modrá barva odpovídá vrstevnicím pro $c > 0$ a zelená barva vrstevnicím pro $c < 0$).



Obrázek 3.1.31: Vrstevnice z Příkladu 3.1.29.

▲

Příklad 3.1.30.

Určete definiční obor funkce

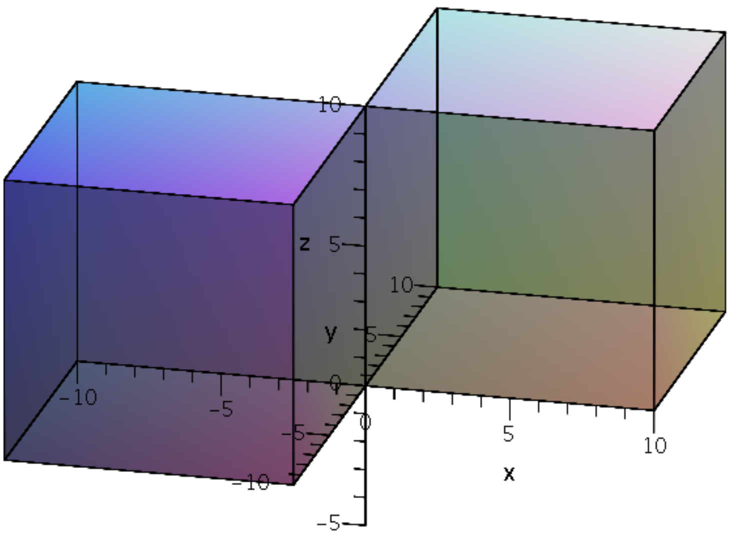
$$f(x,y,z) = \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln z.$$

Řešení. Z první části funkce f plyne podmínka $y \neq 0$ a současně $\frac{x}{y} \geq 0$, tj.

$$(x \geq 0 \wedge y > 0) \ \vee \ (x \leq 0 \wedge y < 0).$$

Z druhé části funkce f dostáváme podmínku $z > 0$. Celkem tedy máme definiční obor (jedná se o dva orthanty včetně osy x a bez os y a z, viz Obrázek 3.1.32)

$$D(f) = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid [(x \geq 0 \wedge y > 0) \vee (x \leq 0 \wedge y < 0)] \wedge z > 0\}.$$



Obrázek 3.1.32: Vrstevnice z Příkladu 3.1.30. ▲

Příklad 3.1.31.

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y,z) = \arcsin\frac{z}{2} - \ln\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}.$$

Řešení. Z první části funkce f plyne požadavek

$$-1 \leq \frac{z}{2} \leq 1 \quad \text{neboli} \quad -2 \leq z \leq 2.$$

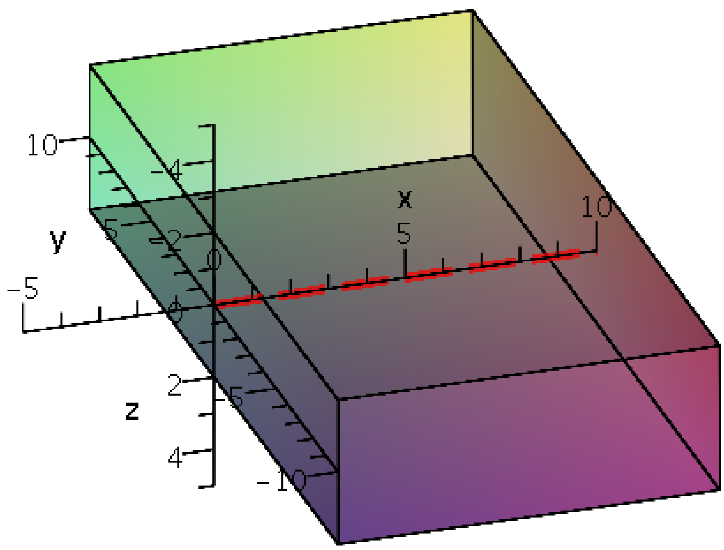
Z druhé části funkce f nejdříve dostaneme podmínku

$$y^2 + z^2 > 0 \quad \text{neboli} \quad [y,z] \neq [0,0].$$

Jelikož v takovém případě $\sqrt{y^2+z^2} > 0$, plyne z definice logaritmu podmínka $x > 0$. Celkem tedy máme definiční obor

$$D(f) = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 \ \wedge\ z \in [-2,2] \ \wedge\ [y,z] \neq [0,0]\}.$$

První podmínka určuje „poloprostor“ v $\mathbb{R}^3$ s hraniční rovinou $x = 0$ (a bez této roviny), druhá podmínka vymezuje „pás“ s hraničními rovinami $z = -2$ a $z = 2$ a poslední podmínka vylučuje osu x (viz Obrázek 3.1.33).



Obrázek 3.1.33: Vrstevnice z Příkladu 3.1.31.

▲

Příklad 3.1.32.

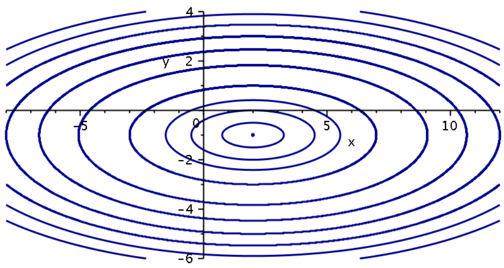
Pomocí vrstevnic a řezů souřadnými rovinami načrtněte graf funkce

$$f(x,y) = \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{4} - 1.$$

Řešení. Nejdříve učíme vrstevnice funkce f, tj. body $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňující

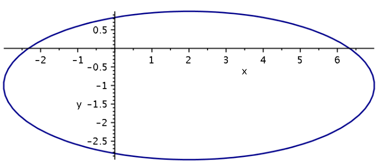
$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{4} = c + 1.$$

Vrstevnice na úrovni $c < -1$ jsou prázdné množiny, pro $c = -1$ to je jednobodová množina s prvkem $[2,-1]$ a pro $c > -1$ se jedná o elipsy se středem v $[2,-1]$ a délkami poloos $5\sqrt{c+1}$ a $2\sqrt{c+1}$ (viz Obrázek 3.1.34).

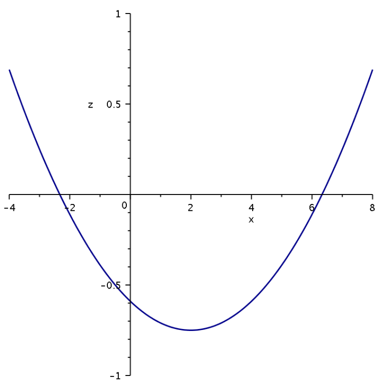


Obrázek 3.1.34: Vrstevnice z Příkladu 3.1.32.

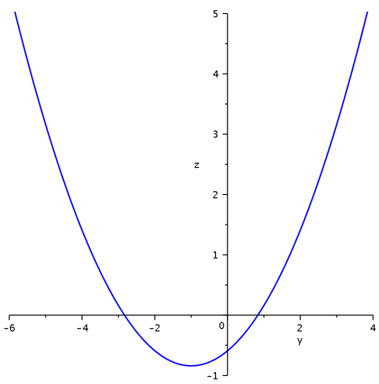
Řezem rovinou xy (tj. pro $z = 0$) dostaneme $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$, což je elipsa se středem v $[2,-1]$ a délkami poloos 5 a 2 (viz Obrázek 3.1.35). V rovině xz (tj. pro $y = 0$) dostaneme parabolu $z = \frac{(x-2)^2}{25} - 3/4$ s vrcholem v $[-2,-3/4]$ (viz Obrázek 3.1.36) a v rovině yz (tj. pro $x = 0$) dostaneme parabolu $z = \frac{(y+1)^2}{4} - 21/25$ s vrcholem v bodě $[-21/25,-1]$ (viz Obrázek 3.1.37).



Obrázek 3.1.35: Řez rovinou xy z Příkladu 3.1.32.

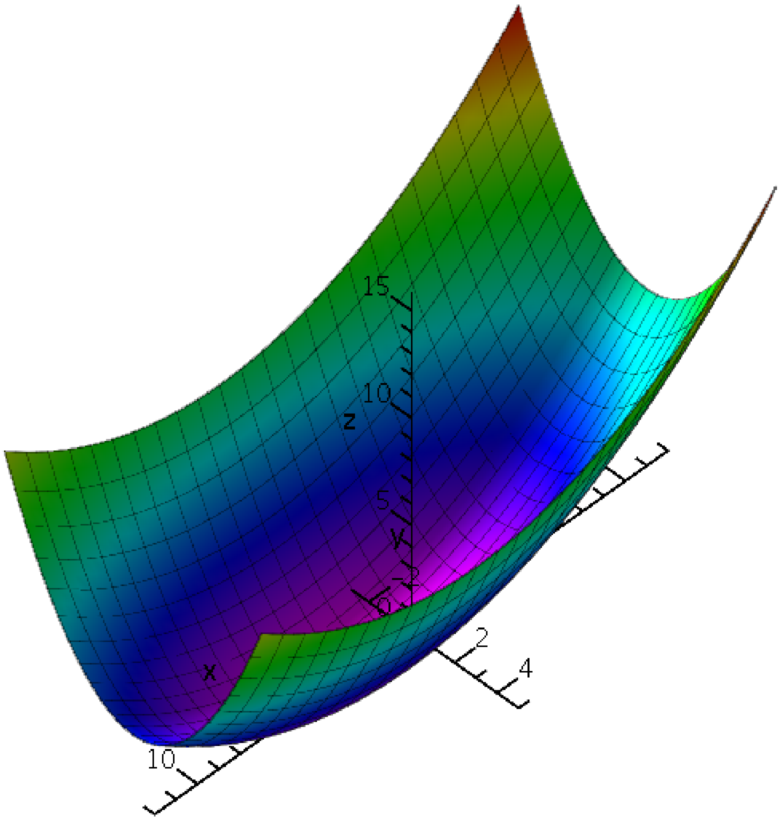


Obrázek 3.1.36: Řez rovinou xz z Příkladu 3.1.32.



Obrázek 3.1.37: Řez rovinou yz z Příkladu 3.1.32.

Celkový graf funkce f je vykreslen na Obrázku 3.1.38 (jedná se o posunutý eliptický paraboloid).



Obrázek 3.1.38: Graf funkce z Příkladu 3.1.32.

▲

III. 2. Limity funkcí více proměnných

Definice 3.2.1 (*Okolí*).

Nechť $\varepsilon > 0$. Pak ε-ové *okolí* bodu $\boldsymbol{a} = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$ rozumíme množinu

$$\mathcal{O}_\varepsilon(\boldsymbol{a}) := \Big\{\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n \mid \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \varepsilon\Big\},$$

kde $\rho(\cdot,\cdot)$ značí nějakou metriku (a index ε budeme obvykle vynechávat). *Ryzím okolím* bodu $\boldsymbol{a}$ rozumíme množinu $\mathcal{O}^*(\boldsymbol{a}) := \mathcal{O}(\boldsymbol{a}) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$.

Obvykle se $\rho(\cdot,\cdot)$ volí jako euklidovská metrika $\rho_2(\cdot,\cdot)$. Potom $\mathcal{O}_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ je vlastně otevřená n-dimenzionální koule se středem v $\boldsymbol{a}$ a poloměrem ε. Podobně jako pro $n = 1$ budeme symbolem $(\mathbb{R}^*)^n$ značit množinu $\mathbb{R}^n$ rozšířenou o nevlastní body, tj.

$$(\mathbb{R}^*)^n := \underbrace{\mathbb{R}^* \times \cdots \times \mathbb{R}^*}_{n\text{-krát}}, \quad \text{kde } \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Pro definici okolí nevlastních bodů je však vhodnější využít maximální metriku $\rho_\infty(\cdot,\cdot)$. Potom v případě $n = 2$ rozumíme okolím bodu $[+\infty, +\infty]$ libovolnou množinu typu $(a, +\infty) \times (b, +\infty)$ pro $a, b \in \mathbb{R}$. Analogicky definujeme okolí dalších nevlastních bodů v $\mathbb{R}^2$, tj. $[-\infty, +\infty]$, $[+\infty, -\infty]$ a $[-\infty, -\infty]$. Podobně definujeme okolí nevlastních bodů pro libovolné n.

Pro následující definici limity ještě potřebujeme, aby uvažovaná funkce f byla definována alespoň v jednom bodě libovolně malého ryzího okolí daného bodu z definičního oboru. To znamená, že budeme uvažovat pouze *hromadné body* definičního oboru (tj. body, jejichž každé ryzí okolí obsahuje alespoň jeden bod z této množiny – v takovém případě jich obsahuje dokonce nekonečně mnoho). Hromadný bod může (ale nemusí) být prvkem dané množiny (je to buď vnitřní nebo hraniční bod).

Definice 3.2.2 (*Limita funkce*).

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{x}^*$ je hromadným bodem $D(f)$. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $\boldsymbol{x}^* \in (\mathbb{R}^*)^n$ *limitu* L, kde $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}^*(\boldsymbol{x}^*)$ bodu $\boldsymbol{x}^*$ takové, že pro každý bod $\boldsymbol{x} \in \mathcal{O}^*(\boldsymbol{x}^*) \cap D(f)$ platí $f(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{O}(L)$. V takovém případě píšeme

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^*} f(\boldsymbol{x}) = L.$$

Poznámka 3.2.3. V případě vlastní limity ve vlastním bodě můžeme zformulovat i tzv. $\varepsilon - \delta$ definici: řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{x}^* \in D(f)$ *limitu* rovnu číslu $L \in \mathbb{R}$, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in D(f)$ splňující $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^*) < \delta$ platí $|f(\boldsymbol{x}) - L| < \varepsilon$.

Pro výpočet limit v nevlastních bodech se obvykle využívá substituce pomocí převrácených hodnot $1/u$, $1/v$, např.

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y) = \lim_{\substack{u>0,v>0\\(u,v)\to(0,0)}} f(1/u,1/v).$$

Pro výpočet limit platí analogická pravidla jako pro funkce jedné proměnné. Zejména, každá funkce $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ má v libovolném bodě $\boldsymbol{x}^*$ nejvýše jednu limitu.

Věta 3.2.4.

Nechť funkce $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ splňují

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} f(\boldsymbol{x}) = L_1 \quad \text{a} \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} g(\boldsymbol{x}) = L_2,$$

kde $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Potom pro libovolné $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\text{(a)} \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} cf(\boldsymbol{x}) = cL_1,$$

$$\text{(b)} \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} [c_1 f(\boldsymbol{x}) \pm c_1 g(\boldsymbol{x})] = c_1L_1 \pm c_2L_2,$$

$$\text{(c)} \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} [f(\boldsymbol{x})\, g(\boldsymbol{x})] = L_1\, L_2.$$

Je-li navíc $L_2 \neq 0$, potom

$$\text{(d)} \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Věta 3.2.5.

Nechť jsou dány funkce $f, g\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ a $\boldsymbol{x}^*\in\mathbb{R}^n$. Jestliže $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} f(\boldsymbol{x}) = 0$ a funkce g je ohraničená na nějakém ryzím okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$ (tj. existuje $K \geq 0$ takové, že na tomto ryzím okolí platí $|g(\boldsymbol{x})| \leq K$). Potom

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} f(\boldsymbol{x})\, g(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Věta 3.2.6 (*O limitě sevřené funkce*).

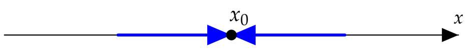
Nechť pro funkce $f,g,h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ platí $h(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$ v nějakém ryzím okolí bodu $\boldsymbol{x}^*\in\mathbb{R}^n$ a současně

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} h(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} g(\boldsymbol{x}) = L.$$

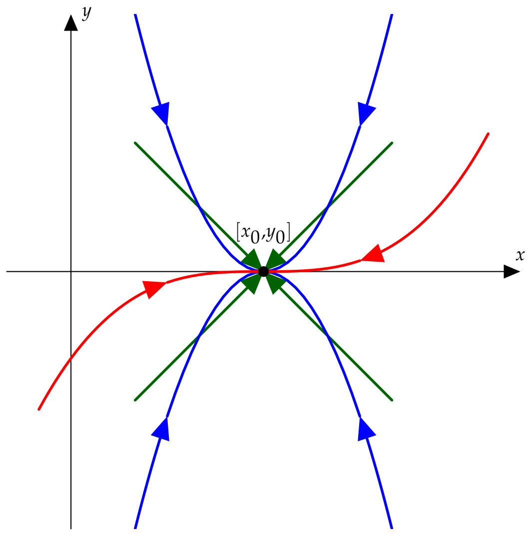
Potom také

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} f(\boldsymbol{x}) = L.$$

Poznámka 3.2.7. Zásadní rozdíl mezi limitami v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{R}^n$ pro $n \geq 2$ spočívá v dimenzi okolí limitního bodu. U funkce jedné proměnné jsme se do limitního bodu mohli blížit pouze po přímce (zprava nebo zleva, pokud se rovnají, má funkce limitu), zatímco u funkce dvou a více proměnných se do limitního bodu můžeme dostat v nekonečně mnoha směrech – po přímkách, parabolách, kubických křivkách,... (viz Obrázky 3.2.39 a 3.2.40). Ovšem existence limity musí být nezávislá na cestě, po které se do limitního bodu blížíme. Pokud se nám tedy podaří najít dvě různé křivky takové, že při přibližování do limitního bodu po těchto křivkách dostaneme různé (částečné) limity (ty bude obvykle mnohem jednodušší určit), tak samotná limita nemůže existovat.



Obrázek 3.2.39: limita v $\mathbb{R}$



Obrázek 3.2.40: limita v $\mathbb{R}^2$

Obvykle se za tyto křivky volí přímky $y = y_0 + a(x - x_0$ (typicky $y = ax$). S jejich pomocí lze ukázat neexistenci limity (pokud výraz závisí na hodnotě a). Ovšem to, že výsledná limita nezávisí na hodnotě a pro libovolnou přímku, ještě neznamená, že daná limita existuje (museli bychom vyšetřit všechny možné křivky).

Poznámka 3.2.8. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Pak limita ve smyslu Definice 3.2.2 se nazývá *dvojná*. Limitní proces také můžeme aplikovat postupně: limity

$$L_{xy} = \lim_{y \to y_0} \Big(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \Big) \quad \& \quad L_{yx} = \lim_{x \to x_0} \Big(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \Big)$$

se nazývají *dvojnásobné* (též postupné). Potom pro L_{xy}, L_{yx} a $L := \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ platí:

(a) existují-li limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} = L_{yx}$, pak limita L *nemusí* existovat;

(b) existuje-li limita L (i nevlastní), pak L_{xy} a L_{yx} *nemusí* existovat;

(c) existuje-li L a některá z limit L_{xy} nebo L_{yx}, pak se obě *rovnají*;

(d) existují-li limity L_{xy}, L_{yx} a L, pak $L_{xy} = L_{yx} = L$;

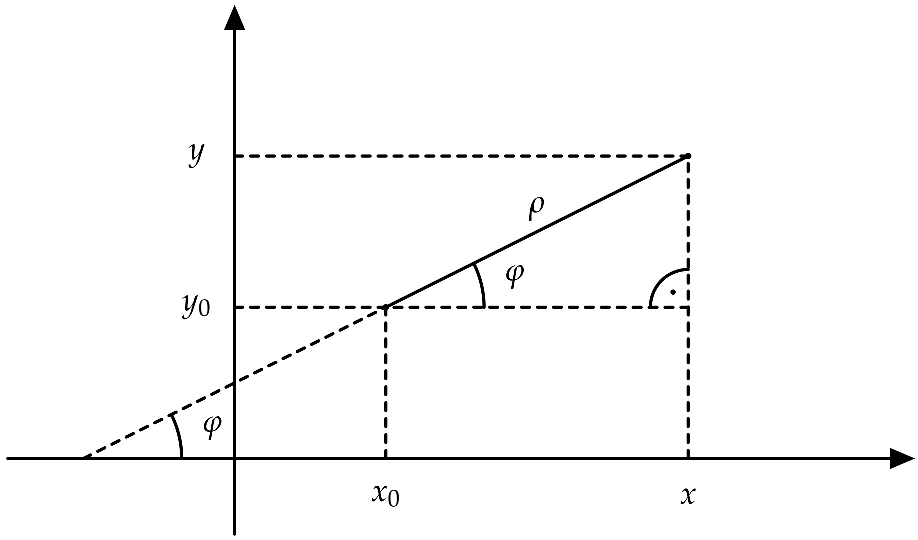
(e) existují-li limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} \neq L_{yx}$, pak limita L neexistuje (tj. rovnost postupných limit je nutnou podmínkou existence dvojné limity).

Výpočet limity L pomocí postupných limit L_{xy}, L_{yx} je výhodné zejména tehdy, je-li předem známa existence L. Na druhou stranu část (e) udává další nutnou podmínku pro existenci limity L (pro neexistenci limity L stačí ukázat $L_{xy} \neq L_{yx}$).

Výpočet konkrétní limity v $\mathbb{R}^n$ však může být značně obtížné (zejména když nemáme k dispozici ani l'Hospitalovo pravidlo). Velmi účinným nástrojem v $\mathbb{R}^2$ je tzv. transformace do *polárních souřadnic*

$$x = x_0 + \rho \cos\varphi, \qquad y = y_0 + \rho \sin\varphi,$$

kde $[x_0, y_0]$ je limitní bod, $\rho \in [0, \infty)$ popisuje vzdálenost bodu $[x, y]$ od pevného bodu $[x_0, y_0]$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$ je úhel, který svírá přímka procházející body $[x_0, y_0]$ a $[x, y]$ s kladnou částí osy x (viz Obrázek 3.2.41).



Obrázek 3.2.41: Transformace do polárních souřadnic.

Pokud je hodnota limity závislá na hodnotě úhlu φ, tak limita funkce neexistuje. O podmínkách pravdivosti opačného tvrzení vypovídá následující věta.

Věta 3.2.9.

Je-li $L \in \mathbb{R}$ a existuje-li nezáporná funkce $g(\rho)$ taková, že

$$\lim_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0 \quad \& \quad |f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi) - L| \leq g(\rho)$$

pro každé ρ z nějakého ryzího okolí 0 a každé $\varphi \in [0, 2\pi)$, pak platí

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L.$$

Pomocí transformace do polárních souřadnic převedeme výpočet limity funkce dvou proměnných na výpočet limity $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho)$, k čemuž již můžeme využít i l'Hospitalovo pravidlo.

Poznámka 3.2.10. Zejména pokud po transformaci do polárních souřadnic platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} h(\varphi)\, g(\rho),$$

kde $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0$ a funkce $h(\varphi)$ je ohraničená pro $\varphi \in [0, 2\pi)$, pak

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0.$$

Podobně můžeme při výpočtu limity funkce tří proměnných v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ využít transformaci do *sférických souřadnic*, tj.

$$x = x_0 + \rho\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = y_0 + \rho\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = z_0 + \rho\cos\vartheta,$$

kde $\rho \geq 0$ je vzdálenost bodů $[x_0, y_0, z_0]$ a $[x, y, z]$ (tzv. *sférický poloměr*), $\varphi \in [0, 2\pi)$ je úhel, který svírá průmět průvodiče (spojnice bodů) do podstavné roviny xy s kladným směrem osy x (tzv. *azimutální úhel*), a $\vartheta \in [0, \pi]$ je úhel, který svírá průvodič s kladným směrem osy z (tzv. *sférický úhel*). Pokud je hodnota limity závislá na hodnotě úhlu φ nebo ϑ, tak limita funkce neexistuje. O podmínkách pravdivosti opačného tvrzení vypovídá následující věta.

Věta 3.2.11.

Je-li $L \in \mathbb{R}$ a existuje-li nezáporná funkce g taková, že

$$\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0 \quad a \quad |f(x_0 + \rho\cos\varphi\sin\vartheta, y_0 + \rho\sin\varphi\sin\vartheta, z_0 + \cos\vartheta) - L| \leq g(\rho)$$

pro každé ρ z nějakého pravého ryzího okolí bodu 0 a každé $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0, \pi]$, pak platí

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y) = L.$$

Definice 3.2.12.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je <u>spojitá</u> v bodě $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$, jestliže platí jedno z následujících tvrzení

(a) bod $\boldsymbol{x}^*$ je hromadným bodem definičního oboru $D(f)$, existuje v tomto bodě vlastní limita a platí
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^*);$$

(b) bod $\boldsymbol{x}^*$ je izolovaným bodem definičního oboru $D(f)$.

Funkce f je *spojitá na množině* $M \subseteq \mathbb{R}^n$, jestliže je spojitá v každém bodě $\boldsymbol{x} \in M$.

- Z části (a) vyplývá, že f musí být definována v bodě $\boldsymbol{x}^*$, musí mít v tomto bodě limitu a tato čísla si musí být rovna.
- Část (b) zahrnuje body, v nichž nelze limitu počítat, viz Definici 3.2.2.

Věta 3.2.13 (*O limitě složeného zobrazení I*).

Nechť pro funkci $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} g(\boldsymbol{x}) = L$ a nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě L. Potom

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} f\left(g(\boldsymbol{x})\right) = f(L).$$

Věta 3.2.14 (*O limitě složeného zobrazení II*).

Nechť funkce $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém ryzím okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$, přičemž $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} g(\boldsymbol{x}) = L$ a $g(\boldsymbol{x}) \neq L$ pro $\boldsymbol{x}$ z nějakého ryzího okolí $\mathcal{O}^*(\boldsymbol{x}^*)$. Jestliže funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém ryzím okolí bodu L a platí $\lim_{x\to L} f(x) = M$, potom

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} f\left(g(\boldsymbol{x})\right) = M.$$

Příklad 3.2.1.

Přímo z definice ukažte, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[5]{xy} = 0.$$

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \sqrt[5]{xy}$, takže uvedená limita má smysl. Musíme ukázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že jsou splněny požadavky Definice 3.2.2. Nechť tedy $\varepsilon > 0$ je libovolné. Potom musí platit

$$|\sqrt[5]{xy} - 0| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad \sqrt[5]{|xy|} < \varepsilon.$$

Jelikož z nerovnosti $x^2 \pm 2xy + y^2 \geq 0$ plyne $|xy| \leq (x^2+y^2)/2$, dostáváme $\sqrt[5]{xy} \leq 2^{-1/5}\sqrt[5]{x^2+y^2}$. Zvolíme-li $\delta = \sqrt{2\varepsilon^5}$, potom pro libovolné $[x,y]$ splňující $x^2+y^2 < \delta^2$ platí

$$\sqrt[5]{xy} \leq 2^{-1/5}\sqrt[5]{2\varepsilon^5} = \varepsilon,$$

což ukazuje že podmínky Definice 3.2.2 jsou splněny. ▲

Příklad 3.2.2.

Přímo z definice ukažte, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$, takže uvedená limita má smysl. Musíme ukázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že jsou splněny požadavky Definice 3.2.2. Nechť tedy $\varepsilon > 0$ je libovolné. Potom musí platit

$$\left| \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad 2\frac{y^2}{x^2+y^2}\,|x| < \varepsilon. \tag{3.2.1}$$

Nyní najdeme $\delta > 0$ takové, že pro všechny $[x,y]$ splňující $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ platí (3.2.1). Všimněme si, že platí $\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$ a $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$. Potom volbou $\delta = \varepsilon/2$ dostáváme

$$2\frac{y^2}{x^2+y^2}\,|x| \leq 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{x^2+y^2} < 2\delta = \varepsilon.$$

Podmínky Definice 3.2.2 jsou tedy splněny. ▲

Příklad 3.2.3.

Přímo z definice ukažte, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+2y^2}$$

neexistuje.

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+2y^2}$, takže uvedená limita má smysl. Nejdříve si všimněme, že libovolné ryzí okolí bodu $[0,0]$ obsahuje body tvaru $[0,y]$ s $y \neq 0$ a současně body $[x,0]$ s $x \neq 0$, přičemž pro tyto body platí $f(0,y) = \frac{1}{2}$ a $f(x,0) = 0$. Připusťme, že limita má hodnotu L. Potom

(i) je-li $L \neq 0$, pak pro libovolné $\varepsilon \in (0,|L|]$ nebude podmínka $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ splněna na žádném ryzím okolí bodu $[0,0]$ (neboť v bodech $[x,0]$ dostaneme spor),

(ii) je-li $L = 0$, pak pro libovolné $\varepsilon \in (0,1/2]$ nebude podmínka $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ splněna na žádném ryzím okolí bodu $[0,0]$ (neboť v bodech $[0,y]$ dostaneme spor).

▲

Příklad 3.2.4 (*viz [6, cvičení na str. 36]*).

Přímo z definice ukažte, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{e}^{xy} = 1.$$

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$, takže uvedená limita má smysl. Musíme ukázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že jsou splněny požadavky Definice 3.2.2. Nechť tedy $\varepsilon > 0$ je libovolné. Musíme najít $\delta > 0$ takové, že pro všechny $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňující $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ platí

$$|\mathrm{e}^{xy} - 1| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad 1-\varepsilon < \mathrm{e}^{xy} < 1+\varepsilon. \tag{3.2.2}$$

Nejdříve uvažme $\varepsilon \in (0,1)$. Protože logaritmus je rostoucí funkce, dostáváme z (3.2.2) nerovnost

$$\ln(1-\varepsilon) < xy < \ln(1+\varepsilon), \tag{3.2.3}$$

tj. $xy \in \big(\ln(1-\varepsilon), \ln(1+\varepsilon)\big)$, přičemž levá mez má záporné znaménko a pravá mez má kladné znaménko. Nyní z $(x-y)^2 \geq 0$ a $(x+y)^2 \geq 0$ vyplývá $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ a $x^2 + 2xy + y^2 \geq 0$, což dohromady dává

$$-(x^2+y^2) \leq 2xy \leq x^2+y^2, \quad \text{tj.} \quad -\frac{\delta^2}{2} < -\frac{x^2+y^2}{2} \leq xy \leq \frac{x^2+y^2}{2} < \frac{\delta^2}{2}.$$

Z poslední nerovnosti a nerovnosti (3.2.3) vidíme, že stačí najít hodnoty δ, pro které

$$-\frac{\delta^2}{2} = \ln(1-\varepsilon) \quad \text{a} \quad \frac{\delta^2}{2} = \ln(1+\varepsilon),$$

což po vyřešení dává hodnoty

$$\delta_{\pm}^{[1]} = \pm\sqrt{-2\ln(1-\varepsilon)} \quad \text{a} \quad \delta_{\pm}^{[2]} = \pm\sqrt{2\ln(1+\varepsilon)}.$$

Protože požadujeme $\delta > 0$, vyhovují pouze řešení $\delta_{+}^{[1]}$ a $\delta_{+}^{[2]}$, přičemž $0 < \delta_{+}^{[2]} < \delta_{+}^{[1]}$, neboť $\varepsilon > 0$. Zvolíme-li tedy $\delta = \delta_{+}^{[2]}$, potom

$$\ln(1-\varepsilon) = -\frac{(\delta_{+}^{[1]})^2}{2} < -\frac{\delta^2}{2} < -\frac{x^2+y^2}{2} \leq xy \leq \frac{x^2+y^2}{2} < \frac{\delta^2}{2} = \frac{(\delta_{+}^{[2]})^2}{2} = \ln(1+\varepsilon),$$

tj. podmínka (3.2.3) je splněna. V případě $\varepsilon \geq 1$ je nerovnost $1-\varepsilon < \mathrm{e}^{xy}$ v (3.2.2) splněna triviálně, neboť exponenciální funkce nabývá pouze kladných hodnot. Zvolíme-li tedy $\delta = \delta_{+}^{[2]}$, bude splněna také druhá nerovnost $\mathrm{e}^{xy} < 1+\varepsilon$. ▲

Příklad 3.2.5.

Přímo z definice ukažte, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \ln(xy+\mathrm{e}) = 1.$$

Řešení. Bod $[0,1]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \ln(xy+\mathrm{e})$, takže uvedená limita má smysl. Musíme ukázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že jsou splněny požadavky Definice 3.2.2. Nechť tedy $\varepsilon > 0$ je libovolné. Musíme najít $\delta > 0$ takové, že pro všechny $[x,y] \in D(f)$ splňující $\sqrt{x^2+(y-1)^2} < \delta$ platí

$$|\ln(xy+\mathrm{e}) - 1| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad 1-\varepsilon < \ln(xy+\mathrm{e}) < 1+\varepsilon. \tag{3.2.4}$$

Jelikož exponenciální funkce je rostoucí, dostáváme ekvivalentní požadavek

$$\mathrm{e}^{1-\varepsilon} - \mathrm{e} < xy < \mathrm{e}^{1+\varepsilon} - \mathrm{e}, \tag{3.2.5}$$

tj. $xy \in (\mathrm{e}^{1-\varepsilon} - \mathrm{e}, \mathrm{e}^{1+\varepsilon} - \mathrm{e})$, přičemž levá mez má záporné znaménko a pravá mez kladné znaménko. Z nerovnosti $[x \pm (y-1)]^2 \geq 0$ dále plyne

$$x^2 \pm 2x(y-1) + (y-1)^2 \geq 0, \quad \text{tj.} \quad 2\,|x(y-1)| \leq x^2 + (y-1)^2 < \delta^2,$$

a proto s využitím $-\delta < x < \delta$ máme

$$-\frac{\delta^2}{2} < x(y-1) < \frac{\delta^2}{2}, \quad \text{tj.} \quad -\frac{\delta^2}{2} - \delta < xy < \frac{\delta^2}{2} + \delta.$$

Z poslední nerovnosti a nerovnosti (3.2.5) vidíme, že stačí najít hodnoty δ, pro které

$$-\frac{\delta^2}{2} - \delta = \mathrm{e}^{1-\varepsilon} - \mathrm{e}, \quad \text{a} \quad \frac{\delta^2}{2} + \delta = \mathrm{e}^{1+\varepsilon} - \mathrm{e}\,.$$

Jedná se o kvadratické rovnice, jejichž řešení jsou

$$\delta_{\pm}^{[1]} = -1 \pm \sqrt{1 - 2(\mathrm{e}^{1-\varepsilon} - \mathrm{e})} \quad \text{a} \quad \delta_{\pm}^{[2]} = -1 \pm \sqrt{1 + 2(\mathrm{e}^{1+\varepsilon} - \mathrm{e})}.$$

Protože požadujeme $\delta > 0$, vyhovují pouze řešení $\delta_{+}^{[1]}$ a $\delta_{+}^{[2]}$, přičemž $0 < \delta_{+}^{[1]} < \delta_{+}^{[2]}$, neboť $\varepsilon > 0$. Zvolíme-li tedy $\delta = \delta_{+}^{[1]}$, potom

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{1-\varepsilon} - \mathrm{e} = -\frac{(\delta_{+}^{[1]})^2}{2} - \delta_{+}^{[1]} = -\frac{\delta^2}{2} - \delta < xy < \frac{\delta^2}{2} + \delta = \\ = \frac{(\delta_{+}^{[1]})^2}{2} + \delta_{+}^{[1]} < \frac{(\delta_{+}^{[2]})^2}{2} + \delta_{+}^{[2]} = \mathrm{e}^{1+\varepsilon} - \mathrm{e}, \end{aligned}$$

tj. podmínka (3.2.5) je splněna. ▲

Příklad 3.2.6.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{-x^2-y^2}.$$

Řešení. Funkce $f(x,y)=\sqrt{-x^2-y^2}$ je definována pouze v bodě $[0,0]$, tj. $D(f)=\{[0,0]\}$. To ale znamená, že libovolné ryzí okolí bodu $[0,0]$ neobsahuje žádný bod z $D(f)$, tj. $[0,0]$ je izolovaným bodem množiny $D(f)$, takže uvedená limita nemá smysl. ▲

Příklad 3.2.7.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(-4,1)} \frac{x+y}{x^2}.$$

Řešení. Bod $[-4, 1]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2}$, takže uvedená limita má smysl. Funkce f je spojitá ve všech bodech $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ s $x \neq 0$ (neboť je to racionální lomená funkce), dostaneme přímým dosazením

$$\lim_{(x,y)\to(-4,1)} \frac{x+y}{x^2} = \frac{-4+1}{(-4)^2} = -\frac{3}{16}.$$

▲

Příklad 3.2.8.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^2 \cos\frac{1}{xy}.$$

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = xy^2 \cos\frac{1}{xy}$, takže uvedená limita má smysl. Ovšem $[0,0] \notin D(f)$. Uvědomíme-li si, že funkce $\cos\frac{1}{xy}$ je ohraničená na libovolném ryzím okolí bodu $[0,0]$ a současně $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^2 = 0$, plyne z Věty 3.2.5, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^2 \cos\frac{1}{xy} = 0.$$

Vyzkoušejte si, že stejného závěru lze docílit také pomocí Věty 3.2.6. ▲

Příklad 3.2.9.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-1}{1-x^2y^2}.$$

Řešení. Bod $[1,1]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{xy-1}{1-x^2y^2}$, takže uvedená limita má smysl. Ovšem $[0,0] \notin D(f)$ a dosazením dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Snadno si ale můžeme všimnout, že lze čitatele i jmenovatele pokrátit, tj.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-1}{1-x^2y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-1}{(1-xy)(1+xy)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{-1}{1+xy} = -\frac{1}{2}.$$

▲

Příklad 3.2.10.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{(x+y)^2-4}{x+y+2}.$$

Řešení. Bod $[-1,-1]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{(x+y)^2-4}{x+y+2}$, takže uvedená limita má smysl. Ovšem $[-1,-1] \notin D(f)$ a dosazením dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Snadno si ale můžeme všimnout, že lze čitatele i jmenovatele pokrátit, tj.

$$\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{(x+y)^2-4}{x+y+2} = \lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{(x+y-2)(x+y+2)}{x+y+2} = \\ = \lim_{(x,y)\to(-1,-1)} (x+y-2) = -4.$$

▲

Příklad 3.2.11.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy}.$$

Řešení. Bod $[2,2]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy}$, takže uvedená limita má smysl. Ovšem $[2,2] \notin D(f)$ a dosazením dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Snadno si ale můžeme všimnout, že lze čitatele i jmenovatele pokrátit, tj.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy} &= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x+y)(x-y)}{x(x-y)+3(x-y)} = \\ &= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x+y)(x-y)}{(x+3)(x-y)} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+y}{x+3} = \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

▲

Příklad 3.2.12.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x}.$$

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{\sin xy}{x}$, takže uvedená limita má smysl. Připomeňme, že $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Potom s využitím Věty 3.2.13 a pravidla (c) z Věty 3.2.4 dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\sin xy}{xy}}_{f(x,y)} \underbrace{y}_{g(x,y)} = 1 \cdot 0 = 0.$$

▲

Příklad 3.2.13.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\mathrm{e}^{xy}-1}{x}.$$

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{xy}-1}{x}$, takže uvedená limita má smysl. Připomeňme, že $\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^{t}-1}{t} = 1$. Potom s využitím Věty 3.2.13 a pravidla (c) z Věty 3.2.4 dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\mathrm{e}^{xy}-1}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{xy}-1}{xy}}_{f(x,y)} \underbrace{y}_{g(x,y)} = 1 \cdot 2 = 2.$$

▲

Příklad 3.2.14.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}}.$$

Řešení. Bod $[4,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}}$, takže uvedená limita má smysl. Jelikož platí

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}\,\frac{1}{\cos t} = 1,$$

dostaneme s využitím Věty 3.2.13 a pravidla (c) z Věty 3.2.4 výsledek

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}} = \lim_{(x,y)\to(4,0)} \underbrace{\frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{\sqrt{(x-4)^2-y^2}}}_{f(x,y)}\,\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x,y)} = \frac{1}{16}.$$

▲

Příklad 3.2.15.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{1-\cos xy}{y^2}.$$

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{1-\cos xy}{y^2}$, takže uvedená limita má smysl. Je zřejmé, že

$$f(x,y) = \frac{1-\cos xy}{y^2} = \frac{1-\cos xy}{x^2y^2}\, x^2.$$

Zaměříme se proto nejdříve na limitu

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} &= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{\sin^2 t}\,\frac{\sin^2 t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{1-\cos^2 t}\,\frac{\sin^2 t}{t^2} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{(1-\cos t)(1+\cos t)}\,\frac{\sin^2 t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{1+\cos t}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Proto s využitím Věty 3.2.13 a pravidla (c) z Věty 3.2.4 dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{1-\cos xy}{y^2} = \lim_{(x,y)\to(3,0)} \underbrace{\frac{1-\cos xy}{x^2y^2}}_{f(x,y)}\,\underbrace{x^2}_{g(x,y)} = \frac{9}{2}.$$

▲

Příklad 3.2.16.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}.$$

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$, takže uvedená limita má smysl. Ovšem $[0,0] \notin D(f)$ a dosazením dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Při úpravě použijeme podobný trik jako v případě funkce jedné proměnné, tj.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2+1-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2+1}+1 = 2.$$

▲

Příklad 3.2.17.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}.$$

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$, takže uvedená limita má smysl. Ovšem $[0,0] \notin D(f)$ a dosazením dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Při úpravě použijeme podobný trik jako v případě funkce jedné proměnné, tj.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} \, \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}{\sqrt{x^2+y^2+4}+2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{x^2+y^2+4-4} = 3 \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{x^2+y^2+4}+2) = 12.$$

▲

Příklad 3.2.18.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2-2x+2}-1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-2x+2}-1}.$$

Řešení. Protože definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-2x+2}-1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-2x+2}-1}$ je $\mathbb{R}^2 \setminus [1,0]]$, je limitní bod $[1,0]$ jeho hromadným bodem, a tudíž uvedená limita má smysl. Ovšem $[1,0] \notin D(f)$ a dosazením dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Při úpravě použijeme podobný trik jako v případě funkce jedné proměnné, tj.

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2-2x+2}-1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-2x+2}-1} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2-2x+2}-1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-2x+2}-1} \, \frac{\sqrt{x^2+y^2-2x+2}+1}{\sqrt[3]{(x^2+y^2-2x+2)^2}+\sqrt[3]{x^2+y^2-2x+2}+1} \times$$

$$\times \frac{\sqrt[3]{(x^2+y^2-2x+2)^2}+\sqrt[3]{x^2+y^2-2x+2}+1}{\sqrt{x^2+y^2-2x+2}+1} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2+y^2-2x+2-1}{x^2+y^2-2x+2-1} \, \frac{\sqrt[3]{(x^2+y^2-2x+2)^2}+\sqrt[3]{x^2+y^2-2x+2}+1}{\sqrt{x^2+y^2-2x+2}+1} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt[3]{(x^2+y^2-2x+2)^2}+\sqrt[3]{x^2+y^2-2x+2}+1}{\sqrt{x^2+y^2-2x+2}+1} = \frac{3}{2}.$$

▲

Příklad 3.2.19.

Ukažte, že limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

neexistuje.

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, takže uvedená limita má smysl. Podívejme se, jak se bude funkce f chovat, pokud se do bodu $[0,0]$ budeme blížit po přímkách. Rovnice přímky je $y = ax + b$. Protože požadujeme, aby přímka procházela limitním bodem $[0,0]$, mají všechny vhodné přímky rovnici $y = ax$, kde $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Potom

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{y=ax \\ x\to 0}} \frac{x^2 - (ax)^2}{x^2 + (ax)^2} = \lim_{\substack{y=ax \\ x\to 0}} \frac{1 - a^2}{1 + a^2} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}.$$

Protože tato hodnota závisí na čísle a (tj. na směru, ve kterém se blížíme do limitního bodu $[0,0]$), limita neexistuje. ▲

Příklad 3.2.20.

Ukažte, že limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

neexistuje.

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, takže uvedená limita má smysl. Podívejme se, jak se bude funkce f chovat, pokud se do bodu $[0,0]$ budeme blížit po přímkách. Rovnice přímky je $y = ax + b$. Protože požadujeme, aby přímka procházela limitním bodem $[0,0]$, mají všechny vhodné přímky rovnici $y = ax$, kde $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Potom

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{y=ax\\x\to 0}} \frac{ax^3}{x^4+a^2x^2} = \lim_{\substack{y=ax\\x\to 0}} \frac{ax}{x^2+a^2} = 0,$$

tj. budeme-li se blížit do limitního bodu ve směru libovolné přímky, bude hodnota funkce f blížit k 0. Znamená to, že zadaná limita existuje? Vyzkoušejme, jak se bude hodnota funkce f chovat, pokud se do limitního bodu budeme přibližovat po parabolách, tj. $y = ax^2 + bx + c$. Protože parabola musí také procházet limitním bodem $[0,0]$, musí být $c = 0$. Zvolme např. $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Potom

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{y=ax^2\\x\to 0}} \frac{ax^4}{x^4+a^2x^4} = \lim_{\substack{y=ax^2\\x\to 0}} \frac{a}{1+a^2} = \frac{a}{1+a^2},$$

Jelikož výsledek závisí na hodnotě a, zadaná limita neexistuje. ▲

Příklad 3.2.21.

Ukažte, že limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

neexistuje.

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x-y}$, takže uvedená limita má smysl. Podívejme se, jak se bude funkce f chovat, pokud se do bodu $[0,0]$ budeme blížit po přímkách. Rovnice přímky je $y = ax + b$. Protože požadujeme, aby přímka procházela limitním bodem $[0,0]$, mají všechny vhodné přímky rovnici $y = ax$, kde $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Potom

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y} = \lim_{\substack{y=ax\\ x\to 0}} \frac{x^2+(ax)^2}{x-ax} = \lim_{\substack{y=ax\\ x\to 0}} \frac{x+xa^2}{1-a} = 0,$$

tj. budeme-li se blížit do limitního bodu ve směru libovolné přímky, bude hodnota funkce f blížit k 0. Znamená to, že zadaná limita existuje? Vyzkoušejme, jak se bude hodnota funkce f chovat, pokud se do limitního bodu budeme přibližovat po parabolách, tj. $y = ax^2 + bx + c$. Protože parabola musí také procházet limitním bodem $[0,0]$, musí být $c = 0$. Zvolme např. $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Potom

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y} = \lim_{\substack{y=ax^2\\ x\to 0}} \frac{x^2+(ax^2)^2}{x-ax^2} = \lim_{\substack{y=ax^2\\ x\to 0}} \frac{x+a^2x^3}{1-ax} = 0,$$

tady také v tomto případě dostáváme hodnotu 0. Zvolme nyní zcela obecně $y = ax^2 + bx$, kde $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Potom

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y} &= \lim_{\substack{y=ax^2+bx\\ x\to 0}} \frac{x^2+(ax^2+bx)^2}{x-ax^2-bx} = \lim_{\substack{y=ax^2+bx\\ x\to 0}} \frac{x^2(1+a^2x^2+2abx+b^2)}{x(1-ax-b)} = \\
&\overset{b=1}{=} \lim_{\substack{y=ax^2-x\\ x\to 0}} \frac{x^2(1+a^2x^2+2ax+1)}{x(1-ax-1)} = \lim_{\substack{y=ax^2-x\\ x\to 0}} \frac{x^2(1+a^2x^2+2ax+1)}{-ax^2} = \\
&= \lim_{\substack{y=ax^2-x\\ x\to 0}} \frac{(1+a^2x^2+2ax+1)}{-a} = -\frac{2}{a} \neq 0,
\end{aligned}$$

což je jiná hodnota než v případě přibližování po přímkách. Proto zadaná limita neexistuje.

▲

Příklad 3.2.22.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, takže uvedená limita má smysl. Transformací do polárních souřadnic dostaneme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \lim_{\rho\to 0^+} \cos\varphi\sin\varphi = \cos\varphi\sin\varphi.$$

Protože výsledek závisí na hodnotě φ, zadaná limita neexistuje. ▲

Příklad 3.2.23.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x}{x^3+y}.$$

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{3x}{x^3+y}$, takže uvedená limita má smysl. Transformací do polárních souřadnic dostaneme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x}{x^3+y} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{3\rho\cos\varphi}{\rho(\rho^2\cos^3\varphi+\sin\varphi)} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{3\cos\varphi}{\rho^2\cos^3\varphi+\sin\varphi} = 3\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Protože výsledek závisí na hodnotě φ, zadaná limita neexistuje. ▲

Příklad 3.2.24.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Řešení. Bod $[0,0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y,z) = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$, takže uvedená limita má smysl. S pomocí transformace do sférických souřadnic dostaneme

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta}{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta+\rho^2\cos^2\vartheta} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\cos^2\varphi\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta+\sin^2\vartheta} = \lim_{\rho\to 0^+} (\cos^2\varphi\sin^2\vartheta) = \cos^2\varphi\sin^2\vartheta.$$

Vidíme tedy, že hodnota limity závisí na úhlech φ a ϑ. Proto daná limita neexistuje. ▲

Příklad 3.2.25.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2 + y(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}.$$

Řešení. Bod $[0,1]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$, takže uvedená limita má smysl. S pomocí transformace do polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi$ a $y = 1 + \rho\sin\varphi$ dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2 + y(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2} &= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2\varphi + (1+\rho\sin\varphi)\rho^2\sin^2\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \\ &= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \rho^3\sin^3\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+}(1 + \rho\sin^3\varphi) = 1.\end{aligned}$$

Uvedený výsledek platí, neboť neboť z předchozího výpočtu plyne, že jsou splněny podmínky Věty 3.2.9, tj.

$$|f(\rho\cos\varphi, 1+\rho\sin\varphi) - 1| = \left|\rho\sin^3\varphi\right| \leq \rho \quad \text{a} \quad \lim_{\rho\to 0^+}\rho = 0.$$

▲

Příklad 3.2.26.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$$

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$, takže uvedená limita má smysl. Ovšem $[0,0] \notin D(f)$ a dosazením dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Transformací do polárních souřadnic dostaneme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi) = 0.$$

Pro potvrzení platnosti výsledku si stačí uvědomit, že jsou splněny podmínky uvedené v Poznámce 3.2.10, kde $g(\rho) = \rho$ a $h(\varphi) = \cos^3\varphi + \sin^3\varphi$. ▲

Příklad 3.2.27.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}.$$

Řešení. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$, takže uvedená limita má smysl. S využitím spojitosti exponenciální funkce můžeme limitu přepsat do tvaru

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{e}^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)} = \mathrm{e}^{\lim_{(x,y)\to(0,0)}[x^2y^2\ln(x^2+y^2)]}.$$

Nyní proto potřebujeme vypočítat limitu v exponentu. Po transformaci do polárních souřadnic získáme

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)}[x^2y^2\ln(x^2+y^2)] = \lim_{\rho\to0^+} \rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\ln(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi) = \\
&\quad= \lim_{\rho\to0^+} \rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\ln\rho^2 = 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi \lim_{\rho\to0^+}\rho^4\ln\rho = \\
&\quad= 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi \lim_{\rho\to0^+}\frac{\ln\rho}{\rho^{-4}} \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi \lim_{\rho\to0^+}\frac{\frac{1}{\rho}}{(-4)\frac{1}{\rho^5}} = \\
&\quad= 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi \lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^{-1}}{(-4)\rho^{-5}} = -\frac{1}{2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi \lim_{\rho\to0^+}\rho^4 = 0.
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že poslední rovnost platí, neboť jsou splněny požadavky uvedené v Poznámce 3.2.10 s funkcemi $g(\rho) = \rho^4\ln\rho$ a $h(\varphi) = 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi$. Proto

$$L = \mathrm{e}^0 = 1.$$

▲

Příklad 3.2.28.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

Řešení. Bod $[\infty, 1]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$, takže uvedená limita má smysl. Připomeňme, že $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \mathrm{e}$. Také platí $\frac{x^2}{x+y} = x + \frac{-xy}{x+y}$. Proto s využitím pravidla (c) z Věty 3.2.4 dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{-xy}{x+y}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{-y}{1+\frac{y}{x}}} = \lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}_{f(x,y)} \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{-y}{1+\frac{y}{x}}}}_{g(x,y)} = \mathrm{e}\,.$$

▲

Příklad 3.2.29.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,-\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}.$$

Řešení. Poněvadž definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$ je $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$, vidíme, že bod $[\infty,-\infty]$ je hromadným bodem $D(f)$, a tudíž uvedená limita má smysl. Transformací $x = \frac{1}{u}$ a $y = \frac{1}{v}$ převedeme limitu do tvaru

$$L = \lim_{(x,y)\to(\infty,-\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \lim_{\substack{(u,v)\to(0,0)\\ u>0,\ v<0}} \frac{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}}{\frac{1}{u^4}+\frac{1}{v^4}} = \lim_{\substack{(u,v)\to(0,0)\\ u>0,\ v<0}} \frac{u^2v^2(u^2+v^2)}{u^4+v^4}.$$

Vzhledem k tomu, že se v limitě objevují pouze sudé mocniny u a v, musíme získat stejný výsledek i pro další kombinace znamének u a v (tj. budeme-li se do limitního bodu přibližovat i ve směrech z dalších kvadrantů). Proto se můžeme zaměřit na výpočet téže limity bez požadavku na znaménko u a v, k čemuž využijeme transformaci do polárních souřadnic, tj.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\substack{(u,v)\to(0,0)\\ u>0,\ v<0}} \frac{u^2v^2(u^2+v^2)}{u^4+v^4} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^6\cos^2\varphi\sin^2\varphi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}{\rho^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)} \\ &= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\sin^2(2\varphi)}{4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)} = 0. \end{aligned}$$

Pro potvrzení platnosti výsledku zbývá ověřit splnění podmínek Věty 3.2.9, což je ale snadné, neboť z předchozích výpočtů plyne pro funkci $g(u,v) = \frac{u^2v^2(u^2+v^2)}{u^4+v^4}$, že

$$\left|g(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi) - 0\right| = \left|\frac{\rho^2\sin^2(2\varphi)}{4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)}\right| \le \rho^2 \quad \text{a} \quad \lim_{\rho\to 0^+}\rho^2 = 0.$$

▲

Příklad 3.2.30.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\,.$$

Řešení. Definiční obor funkce $f(x,y) = (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}$ je $D(f) = \mathbb{R}^2$, tudíž bod $[\infty,\infty]$ je hromadným bodem $D(f)$ a uvedená limita má smysl. Jelikož pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2_+$ (tj. $x > 0$ a $y > 0$, což je vlastně okolí bodu $[\infty,\infty]$) platí

$$0 \leq (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-(x+y)} = \frac{x^2}{\mathrm{e}^{(x+y)}} + \frac{y^2}{\mathrm{e}^{(x+y)}} \leq \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} + \frac{y^2}{\mathrm{e}^y}$$

a současně z pravidel pro škály mocnin pro funkce jedné proměnné a z části (a) Věty 3.2.4 dostaneme

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} + \frac{y^2}{\mathrm{e}^y}\right) = 0.$$

Proto z Věty 3.2.6, kde $h(x,y) \equiv 0$ a $g(x,y) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} + \frac{y^2}{\mathrm{e}^y}$, plyne

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-(x+y)} = 0.$$

▲

Příklad 3.2.31.

Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

Řešení. Definiční obor funkce $\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$ je $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$, tudíž bod $[\infty,\infty]$ je hromadným bodem $D(f)$ a uvedená limita má smysl. Jelikož pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2_{++}$ (tj. $x > 0$ a $y > 0$, což je vlastně okolí bodu $[\infty,\infty]$) platí

$$0 \leq \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$$

a současně z nerovnosti $x^2 + y^2 \geq 2xy$ dostaneme $\frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2$, tj.

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Proto platí

$$0 \leq \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

Vzhledem k tomu, že $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = 0$, plyne z Věty 3.2.6 s volbou $h(x,y) \equiv 0$ a $g(x,y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$ výsledek

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0.$$

▲

Příklad 3.2.32.

Vypočtěte dvojnásobné limity

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^2}{2x^2}\right), \qquad \text{(b)} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^2}{2x^2}\right).$$

Existuje limita dvojná?

Řešení. S využitím pravidel pro počítání limit funkce jedné proměnné dostáváme postupně

$$\text{(a)} \quad L_{yx} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^2}{2x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{(b)} \quad L_{xy} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^2}{2x^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{2}\right) = \pm\infty,$$

protože ve druhém případě považujeme y^2 ve vnitřní limitě za konstantu (nenulovou). Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2x^2}$, takže dvojná limita

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{2x^2}$$

má smysl. Ovšem $L_{yx} \neq L_{xy}$, takže z části (e) Poznámky 3.2.8 plyne, že dvojná limita L neexistuje. ▲

Příklad 3.2.33.

Vypočtěte obě dvojnásobné limity i dvojnou limitu v bodě $[0,0]$ *pro funkci*

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

Řešení. Vypočteme nejdříve obě dvojnásobné limity, tj.

$$L_{yx} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{0+x^2} = 0,$$
$$L_{xy} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{0+y^2} = 0,$$

tj. $L_{yx} = L_{xy}$. Nyní vypočteme dvojnou limitu. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y)$, takže dvojná limita má smysl. Ovšem budeme-li se do limitního bodu přibližovat po přímce $y = x$ dostaneme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x^4}{x^4} = 1,$$

zatímco pro $y = -x$ dostaneme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x}}\frac{x^4}{x^4+4x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x}}\frac{x^2}{x^2+4} = 0.$$

To znamená, že dvojná limita neexistuje (viz část (a) Poznámky 3.2.8). ▲

Příklad 3.2.34.

Vypočtěte obě dvojnásobné limity i dvojnou limitu v bodě $[0,0]$ *pro funkci*

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

Řešení. Vypočteme nejdříve obě dvojnásobné limity, tj.

$$L_{yx} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1,$$
$$L_{xy} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = -1.$$

Poněvadž $L_{yx} \neq L_{xy}$, plyne z části (e) Poznámky 3.2.8, že dvojná limita neexistuje (bod $[0,0]$ je jistě hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y)$, takže tato dvojná limita má smysl). Uvažme např. přibližování do limitního bodu po přímce $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=ax}}\frac{x-ax}{x+ax} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=ax}}\frac{1-a}{1+a} = \frac{1-a}{1+a},$$

a tudíž dvojná limita skutečně neexistuje. ▲

Příklad 3.2.35.

Vypočtěte obě dvojnásobné limity i dvojnou limitu v bodě $[0,0]$ *pro funkci*

$$f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}.$$

Řešení. Vypočteme nejdříve obě dvojnásobné limity, tj.

$$L_{yx} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right),$$
$$L_{xy} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right).$$

Protože vnitřní limity neexistují (proč?), neexistuje ani jedna z limit L_{yx} a L_{xy}. Bod $[0,0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x,y)$, takže dvojná limita má smysl. Jelikož $-1 \leq \sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} \leq 1$ na libovolném ryzím okolí bodu $[0,0]$, plyne z Věty 3.2.5, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0.$$

▲

Příklad 3.2.36.

Určete body nespojitosti funkce

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}.$$

Řešení. Funkce f je racionální lomenou funkcí v proměnných x, y, takže jedinými body nespojitosti jsou ty, ve kterých nabývá jmenovatel nulových hodnot. Proto body nespojitosti jsou takové, že $x^3 = -y^3$, tj. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}$. ▲

Příklad 3.2.37.

Určete body nespojitosti funkce

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 3y}{x^2 - 3y}.$$

Řešení. Jedinými body nespojitosti funkce f jsou ty, ve kterých jmenovatel nabývá nulových hodnot. V tomto případě se jedná o body ležící na parabole o rovnici $y = x^2/3$, tj. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2/3\}$. ▲

Příklad 3.2.38.

Určete body nespojitosti funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{\sin x \sin y}.$$

Řešení. Jedinými body nespojitosti funkce f jsou ty, ve kterých jmenovatel nabývá nulových hodnot, tj. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x = k\pi$ nebo $y = k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}\}$. ▲

Příklad 3.2.39.

Určete body nespojitosti funkce

$$f(x,y) = \ln \left|1 - x^2 - y^2\right|.$$

Řešení. Funkce $\ln z$ je spojitá na intervalu $(0,\infty)$. Proto body nespojitosti jsou takové, že $x^2 + y^2 = 1$, tj. leží na jednotkové kružnice se středem v počátku. ▲

Příklad 3.2.40.

Určete body nespojitosti funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} - 1}.$$

Řešení. Jedná se kompozici dvou funkcí. Vnitřní funkce x/y není spojitá v bodech tvaru $[x,0]$, zatímco vnější funkce $\frac{1}{\mathrm{e}^z - 1}$ má bod nespojitosti pro $z = 0$. Proto body nespojitosti funkce f jsou $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ nebo } y = 0\}$. ▲

Příklad 3.2.41.

Rozhodněte o spojitosti funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Řešení. Funkce f je definována na celém $\mathbb{R}^2$. Je také zřejmé, že funkce je spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$, takže stačí určit limitu v $[0,0]$. Transformací do polárních souřadnic dostaneme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi}{\rho^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} = \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi},$$

což znamená, že tato limita neexistuje. Funkce f tudíž není spojitá v bodě $[0,0]$. ▲

Příklad 3.2.42.

Rozhodněte o spojitosti funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Řešení. Funkce f je definována na celém $\mathbb{R}^2$. Je také zřejmé, že funkce je spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$, takže stačí určit limitu v $[0,0]$. Transformací do polárních souřadnic dostaneme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3 \cos\varphi \sin^2\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho \cos\varphi \sin^2\varphi = 0.$$

Protože $f(0,0) = 0$, je funkce f spojitá v bodě $[0,0]$, a tudíž je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$. ▲

III. 3. Derivování funkcí více proměnných

Definice 3.3.1 (*Parciální derivace*).

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí. Položme $\varphi(x) := f(x, y_0)$. Má-li funkce $\varphi(x)$ derivaci v bodě x_0, nazýváme ji *parciální derivací funkce f podle proměnné x v bodě* $[x_0, y_0]$ a označujeme ji jako $f_x(x_0, y_0)$ nebo $f'_x(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, tj.

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Podobně, má-li funkce $\psi(y) := f(x_0, y)$ derivaci v bodě y_0, nazýváme ji *parciální derivací funkce f podle proměnné y v bodě* $[x_0, y_0]$ a označujeme ji jako $f_y(x_0, y_0)$ nebo $f'_y(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Parciální derivace pro funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou definovány zcela analogicky, tj. pro vhodný bod $\boldsymbol{x}^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ klademe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) := \lim_{x_i \to x_i^*} \frac{f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{x_i - x_i^*}, \qquad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Věta 3.3.2 (*Pravidla pro počítání parciálních derivací*).

Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mají na otevřené množině M (vlastní) parciální derivace podle proměnné x_i, kde $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak jejich součet, rozdíl, součin a podíl (pokud $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$) má na M také parciální derivaci podle x_i, přičemž pro všechna $\boldsymbol{x} \in M$ platí

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big[f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})\big] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \pm \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}),$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big[f(\boldsymbol{x})\, g(\boldsymbol{x})\big] = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right) g(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})\, \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}),$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}\right) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) g(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\, \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})}{g^2(\boldsymbol{x})}.$$

Věta 3.3.3 (*O derivování složené funkce*).

Nechť funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$. Položme $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Nechť funkce $f(u, v)$ je diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0]$. Pak složená funkce $F(x, y) = f\big(u(x, y), v(x, y)\big)$ má parciální derivace prvního řádu v $[x_0, y_0]$ a platí tzv. řetězové pravidlo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),$$

neboli zkráceně

$$F_x = f_u\, u_x + f_v\, v_x \quad \text{a} \quad F_y = f_u\, u_y + f_v\, v_y.$$

Definice 3.3.4 (*Parciální derivace 2. řádu*).

Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a bod $[x_0, y_0] \in D(f)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme ji *parciální derivací druhého řádu podle proměnné x funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$ a značíme jako $f_{xx}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme ji *smíšenou parciální derivací druhého řádu funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$ a značíme jako $f_{xy}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Zcela analogicky jsou definovány zbývající parciální derivace druhého řádu $f_{yx}(x_0, y_0)$ a $f_{yy}(x_0, y_0)$.

Věta 3.3.5 (*Schwarzova/Youngova*).

Nechť pro funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existují v nějakém okolí $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ bodu $[x_0, y_0] \in D(f)$ smíšené parciální derivace druhého řádu $f_{xy}(x, y)$ a $f_{yx}(x, y)$, které jsou spojité v bodě $[x_0, y_0]$. Pak platí

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

(tedy smíšené parciální derivace druhého řádu jsou zaměnitelné).

Věta 3.3.6.

Nechť v nějakém okolí $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ bodu $[x_0, y_0] \in D(f)$ pro funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ platí

- *existují parciální derivace prvního řádu $f_x(x, y)$ a $f_y(x, y)$,*
- *existuje smíšená parciální derivace druhého řádu $f_{xy}(x, y)$ (s případnou výjimkou samotného bodu $[x_0, y_0]$),*
- *existuje*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{xy}(x, y) = K.$$

Pak obě smíšené parciální derivace druhého řádu $f_{xy}(x_0, y_0)$ a $f_{yx}(x_0, y_0)$ existují a platí

$$f_{xy}(x_0, y_0) = K = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Poznámka 3.3.7. Podobné tvrzení i pro smíšené parciální derivace vyšších řádů:

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má na otevřené množině M spojité všechny parciální derivace až do řádu m, kde $m \in \mathbb{N}$ a $m \geq 2$. Pak hodnoty všech smíšených parciálních derivací funkce

f až do řádu m nezávisí na pořadí derivování, ale pouze na tom, kolikrát se derivovalo podle proměnné x a kolikrát podle proměnné y.

Definice 3.3.8 (*Směrová derivace*).

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}^*$ je vnitřní bod $D(f)$ a $\vec{u} \in \mathbb{V}^n \setminus \{0\}$. Položme $\varphi(t) := f(\boldsymbol{x}^* + t\vec{u})$. Má-li funkce $\varphi(t)$ derivaci pro $t = 0$, nazýváme ji *směrovou derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x}^*$* (nebo derivací funkce f ve směru vektoru $\vec{u}$) a značíme jako $f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$, tj.

$$f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}^* + t\vec{u}) - f(\boldsymbol{x}^*)}{t}.$$

Poznámka 3.3.9. Vzhledem k tomu, že i směrová derivace je vlastně definována jako obyčejná derivace funkce $\varphi(t)$, platí pro její počítání následující pravidla. Nechť pro $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ existuje $f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$ a $g_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$, pak

- pro každé $c \in \mathbb{R}$ existuje $f_{c\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$ a platí $f_{c\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = c\, f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$,
- $(f \pm g)_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) \pm g_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$,
- $(fg)_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)\, g(\boldsymbol{x}^*) + f(\boldsymbol{x}^*)\, g_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = \dfrac{f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)\, g(\boldsymbol{x}^*) + f(\boldsymbol{x}^*)\, g_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)}{g^2(\boldsymbol{x}^*)}$, je-li $g(\boldsymbol{x}^*) \neq 0$.

Ovšem aditivita směrových derivací vzhledem ke směrům derivace již platit nemusí. Pokud existují $f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$ a $f_{\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*)$, nemusí existovat $f_{\vec{u}+\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*)$. A i když existuje $f_{\vec{u}+\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*)$ může být $f_{\vec{u}+\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*) \neq f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) + f_{\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*)$. Na druhou stranu, jestliže $f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$ je spojitá v nějakém okolí $\mathcal{O}(\boldsymbol{x}^*)$ bodu $\boldsymbol{x}^*$ a existuje $f_{\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*)$, potom platí $f_{\vec{u}+\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*) = f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) + f_{\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*)$.

Poznámka 3.3.10. Jestliže pro funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $\boldsymbol{x}^*$ existují parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných $x_1, \ldots, x_n$ v bodě $\boldsymbol{x}^*$, potom (sloupcový!) vektor

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \end{pmatrix}$$

nazýváme *gradientem* funkce f v bodě $\boldsymbol{x}^*$. Má-li funkce f spojité parciální derivace prvního řádu v $\boldsymbol{x}^*$, potom pro směrovou derivaci ve směru vektoru $\vec{u}$ v bodě $\boldsymbol{x}^*$ platí

$$f_u(\boldsymbol{x}^*) = \langle \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}^*),\, u \rangle\,,$$

kde $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ značí standardní skalární součin. Tento vztah platí dokonce v případě, že funkce f je pouze diferencovatelná (viz následující kapitola).

Příklad 3.3.1.

Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4x - 5y + 100.$$

Řešení. Funkce $f(x,y)$ je vlastně polynom v proměnných x, y. Proto ze základních pravidel pro derivování dostaneme ihned

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 4, \qquad f_y(x,y) = 2x^2 + 6xy - 5.$$

▲

Příklad 3.3.2.

Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = x\sin(x+2y).$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování dostaneme ihned

$$f_x(x,y) = \sin(x+2y) + x\cos(x+2y), \qquad f_y(x,y) = 2x\cos(x+2y).$$

▲

Příklad 3.3.3.

Vypočtěte parciální derivace prvního řádu v bodě $[2,5]$ *pro funkci*

$$f(x,y) = y^2 + y\sqrt{1+x^2}.$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování dostaneme

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} \rightsquigarrow f_x(2,5) = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}, \\ f_y(x,y) &= 2y + \sqrt{1+x^2} \rightsquigarrow f_y(2,5) = 10 + \sqrt{5}. \end{aligned}$$

▲

Příklad 3.3.4.

Vypočtěte parciální derivace prvního řádu v bodě $[3, 2]$ *pro funkci*

$$f(x, y) = \sqrt{2x^3 - 3y^3}.$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování dostaneme

$$f_x(x, y) = 3x^2 \left(2x^3 - 3y^3\right)^{-1/2} \rightsquigarrow f_x(3, 2) = \frac{27}{\sqrt{30}} = \frac{9}{10}\sqrt{30},$$
$$f_y(x, y) = -\frac{9y^2}{2} \left(2x^3 - 3y^3\right)^{-1/2} \rightsquigarrow f_y(3, 2) = -\frac{18}{\sqrt{30}} = -\frac{3}{5}\sqrt{30}.$$

▲

Příklad 3.3.5.

Vypočtěte gradient funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}.$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování vypočteme parciální derivace prvního řádu, což dává

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}} \\ \frac{3y}{2\sqrt{x^2+y^3}} \end{pmatrix}.$$

▲

Příklad 3.3.6.

Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}.$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování dostaneme ihned

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}, \\ f_y(x,y) &= -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}. \end{aligned}$$

▲

Příklad 3.3.7.

Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}.$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování dostaneme

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)^2} \frac{(1+xy)-(x-y)y}{(1+xy)^2} = \frac{1+y^2}{(1+xy)^2+(x-y)^2} = \\
&= \frac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2} = \frac{1+y^2}{1+y^2+x^2(1+y^2)} = \frac{1+y^2}{(1+y^2)(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}, \\
f_x(x,y) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)^2} \frac{-(1+xy)-(x-y)x}{(1+xy)^2} = \frac{-1-x^2}{(1+xy)^2+(x-y)^2} = \\
&= -\frac{1+x^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2} = -\frac{1+x^2}{1+y^2+x^2(1+y^2)} = -\frac{1+x^2}{(1+y^2)(1+x^2)} = -\frac{1}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 3.3.8.

Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}.$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování dostaneme ihned

$$f_x(x,y) = -\frac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}, \qquad f_y(x,y) = \frac{x}{y^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}.$$

▲

Příklad 3.3.9.

Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = y^{3x+y}.$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování a s využitím stejné úpravy jako pro funkci jedné proměnné $f^g = \mathrm{e}^{g \ln f}$, tj. $y^{3x+y} = \mathrm{e}^{(3x+y)\ln y}$, dostaneme

$$f_x(x,y) = \mathrm{e}^{(3x+y)\ln y}\, 3\ln y = 3y^{3x+y}\ln y,$$
$$f_y(x,y) = \mathrm{e}^{(3x+y)\ln y}\left(\ln y + \frac{3x+y}{y}\right) = y^{3x+y-1}(y\ln y + 3x + y).$$

▲

Příklad 3.3.10.

Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = \sin^{xy} x.$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování a s využitím stejné úpravy jako pro funkci jedné proměnné $f^g = \mathrm{e}^{g \ln f}$, tj. $\sin^{xy} x = \mathrm{e}^{xy \ln \sin x}$, dostaneme

$$f_x(x,y) = \left(y \ln \sin x + xy \frac{\cos x}{\sin x} \right) \mathrm{e}^{xy \sin x} = (y \ln \sin x + xy \operatorname{cotg} x) \sin^{xy} x,$$
$$f_y(x,y) = x \ln \sin x \, \mathrm{e}^{xy \sin x} = x(\ln \sin x)(\sin^{xy} x).$$

▲

Příklad 3.3.11.

Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = y^{y^x}.$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování a s využitím stejné úpravy jako pro funkci jedné proměnné $f^g = \mathrm{e}^{g \ln f}$, tj. $y^{y^x} = \mathrm{e}^{y^x \ln y} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x \ln y} \ln y}$, dostaneme

$$f_x(x,y) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x \ln y} \ln y} \ln y \, \mathrm{e}^{x \ln y} \ln y = y^{y^x + x} \ln^2 y,$$
$$f_y(x,y) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x \ln y} \ln y} \left(\mathrm{e}^{x \ln y} \frac{x}{y} \ln y + \mathrm{e}^{x \ln y} \frac{1}{y} \right) = y^{y^x + x - 1}(x \ln y + 1).$$

▲

Příklad 3.3.12.

Vypočtěte gradient funkce

$$f(x,y,z) = x^2y + xz + y^3z.$$

Řešení. Funkce $f(x,y,z)$ je vlastně polynom v proměnných x, y, z, a tak ze základních pravidel pro derivování vypočteme parciální derivace prvního řádu, což dává

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy + z \\ x^2 + 3y^2z \\ x + y^3 \end{pmatrix}.$$

▲

Příklad 3.3.13.

Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y,z) = xyz\sin(xy)\cos z.$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování dostaneme

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= yz\cos z\,[\sin(xy) + xy\cos(xy)], \\ f_y(x,y,z) &= xz\cos z\,[\sin(xy) + xy\cos(xy)], \\ f_z(x,y,z) &= xy\sin(xy)(\cos z - z\sin z). \end{aligned}$$

▲

Příklad 3.3.14.

Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y,z) = \mathrm{e}^{x^2(1-y-3z)}.$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování dostaneme ihned

$$f_x(x,y,z) = 2x(1-y-3z)\,\mathrm{e}^{x^2(1-y-3z)}, \qquad f_y(x,y,z) = -x^2\,\mathrm{e}^{x^2(1-y-3z)},$$
$$f_z(x,y,z) = -3x^2\,\mathrm{e}^{x^2(1-y-3z)}.$$

▲

Příklad 3.3.15.

Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y,z) = (3x+2z)^{yz}.$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování a s využitím stejné úpravy jako pro funkci jedné proměnné $f^g = \mathrm{e}^{g \ln f}$, tj. $(3x+2z)^{yz} = \mathrm{e}^{yz\ln(3x+2z)}$, dostaneme

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= 3yz(3x+2z)^{yz-1}, \\
f_y(x,y,z) &= \mathrm{e}^{yz\ln(3x+2z)}\, z\ln(3x+2z) = z(3x+2z)^{yz}\ln(3x+2z), \\
f_z(x,y,z) &= \mathrm{e}^{yz\ln(3x+2z)}\left(y\ln(3x+2z) + \frac{2yz}{3x+2z}\right) = \\
&= y(3x+2z)^{yz}\left(\ln(3x+2z) + \frac{2z}{3x+2z}\right).
\end{aligned}$$

▲

Příklad 3.3.16.

Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y,z) = x^{y^z}.$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování a s využitím stejné úpravy jako pro funkci jedné proměnné $f^g = \mathrm{e}^{g \ln f}$, tj. $x^{y^z} = \mathrm{e}^{y^z \ln x} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{z \ln y} \ln x}$, dostaneme

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= y^z x^{y^z - 1}, \\
f_y(x,yz) &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{z \ln y} \ln x} \ln x \, \mathrm{e}^{z \ln y} \frac{z}{y} = z x^{y^z} y^{z-1} \ln x, \\
f_z(x,y,z) &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{z \ln y} \ln x} \mathrm{e}^{z \ln y} \ln x \ln y = x^{y^z} y^z \ln x \ln y.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 3.3.17.

Vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu pro funkci

$$f(x, y) = \frac{x}{y^2}.$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování dostaneme

$$f_x(x, y) = \frac{1}{y^2}, \quad f_y(x, y) = -\frac{2x}{y^3},$$
$$f_{xx}(x, y) = 0, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -\frac{2}{y^3}, \quad f_{yy}(x, y) = \frac{6x}{y^4}.$$

▲

Příklad 3.3.18.

Vypočtěte parciální derivace $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}, f_{xxy}, f_{yxx}$ a f_{xyx} pro funkci

$$f(x,y) = x^5 + 12x^3y - y^7.$$

Řešení. Funkce $f(x,y)$ je vlastně polynom v proměnných x, y. Proto ze základních pravidel pro derivování dostaneme ihned

$$f_x(x,y) = 5x^4 + 36x^2y, \qquad f_y(x,y) = 12x^3 - 7y^6,$$
$$f_{xx}(x,y) = 20x^3 + 72xy, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 36x^2,$$
$$f_{yxx}(x,y) = f_{xxy}(x,y) = f_{xyx}(x,y) = 72x.$$

▲

Příklad 3.3.19.

Vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu pro funkci

$$f(x,y) = \ln(x+y^2).$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování dostaneme

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x+y^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{2y}{x+y^2}$$

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{1}{(x+y^2)^2}, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}.$$

▲

Příklad 3.3.20.

Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu v bodě $\left[2, \frac{1}{2}, 0\right]$ *pro funkci*

$$f(x,y,z) = \arcsin y + (x^3 + y^2 + z)\,\mathrm{e}^z\,.$$

Řešení. Ze základních pravidel pro derivování dostaneme

$$f_x(x,y,z) = 3x^2\,\mathrm{e}^z, \qquad f_y(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + 2y\,\mathrm{e}^z, \quad f_z(x,y,z) = (x^3 + y^2 + z + 1)\,\mathrm{e}^z,$$

$$f_{xx}(x,y,z) = 6x\,\mathrm{e}^z \rightsquigarrow 12, \quad f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z) = 0 \rightsquigarrow 0,$$

$$f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z) = 3x^2\,\mathrm{e}^z \rightsquigarrow 12,$$

$$f_{yy}(x,y,z) = -\frac{1}{2}(1-y^2)^{-3/2}(-2y) + 2\,\mathrm{e}^z = y(1-y^2)^{-3/2} + 2\,\mathrm{e}^z \rightsquigarrow \frac{4\sqrt{3}}{9} + 2,$$

$$f_{yz}(x,y,z) = f_{zy}(x,y,z) = 2y\,\mathrm{e}^z \rightsquigarrow 1, \quad f_{zz}(x,y,z) = (x^3 + y^2 + z + 2)\,\mathrm{e}^z \rightsquigarrow \frac{41}{4}.$$

▲

Příklad 3.3.21.

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$$

v bodě $\boldsymbol{x}^* = [1,1]$ *ve směru vektoru* $\vec{u} = (1,2)^\top$.

Řešení. Ze zadání máme $\boldsymbol{x}^* + t\vec{u} = \binom{1}{1} + t\binom{1}{2}$, tedy dosazením $x = 1 + t$ a $y = 1 + 2t$ do funkce $f(x,y)$ získáme funkci

$$\varphi(t) = (1+t)^2 + 2(1+t)(1+2t) + (1+2t)^2 = 11t^2 + 15t + 5.$$

Proto podle definice dostáváme

$$f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = \varphi'(0) = \big[15 + 11t\big]_{t=0} = 15.$$

Tentýž výsledek dostaneme také s použitím grad $f(x,y) = \binom{2x+3y}{2y+3x} \rightsquigarrow \binom{5}{5}$, neboť (spojitost parciálních derivací v okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$ je zřejmá)

$$f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = \Big\langle (5,5)^\top, (1,2)^\top \Big\rangle = 15.$$

▲

Příklad 3.3.22.

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$$

v bodě $\boldsymbol{x}^* = [1, -1]$ *ve směru vektoru* $u = (1, 2)$.

Řešení. Ze zadání máme $\boldsymbol{x}^* + t\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, tedy dosazením $x = 1 + t$ a $y = -1 + 2t$ do funkce $f(x,y)$ získáme funkci

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg}[(1+t)^2 + (-1+2t)^2] = \operatorname{arctg}(5t^2 - 2t + 2).$$

Proto podle definice dostáváme

$$f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = \varphi'(0) = \left[\frac{1}{1 + (5t^2 - 2t + 2)^2} \cdot (10t - 2)\right]_{t=0} = -2/5.$$

Tentýž výsledek dostaneme také s použitím

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2/5 \\ -2/5 \end{pmatrix},$$

neboť (spojitost parciálních derivací v okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$ je zřejmá)

$$f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = \left\langle (2/5, -2/5)^\top, (1,2)^\top \right\rangle = -2/5.$$

▲

Příklad 3.3.23.

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = xy \ln y$$

v bodě $\boldsymbol{x}^* = [1, \mathrm{e}]$ *ve směru vektoru* $u = (2, -1)$.

Řešení. Ze zadání máme $\boldsymbol{x}^* + t\vec{u} = \binom{1}{\mathrm{e}} + t\binom{2}{-1}$, tedy dosazením $x = 1 + 2t$ a $y = \mathrm{e} - t$ do funkce $f(x,y)$ získáme funkci

$$\varphi(t) = (1+2t)(\mathrm{e}-t)\ln(\mathrm{e}-t) = \big(\mathrm{e} - t + 2\,\mathrm{e}\,t - 2t^2\big)\ln(\mathrm{e}-t).$$

Proto podle definice dostáváme

$$f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = \varphi'(0) = \left[\big(-1 + 2\,\mathrm{e} - 4t\big)\ln(\mathrm{e}-t) - \frac{\mathrm{e} - t + 2\,\mathrm{e}\,t - 2t^2}{\mathrm{e}-t}\right]_{t=0} = 2\,\mathrm{e} - 2.$$

Tentýž výsledek dostaneme také s použitím

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} y \ln y \\ x(1+\ln y) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathrm{e} \\ 2 \end{pmatrix},$$

neboť (spojitost parciálních derivací v okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$ je zřejmá)

$$f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = \Big\langle (\mathrm{e}, 2)^\top, (2, -1)^\top \Big\rangle = 2\,\mathrm{e} - 2.$$

▲

Příklad 3.3.24.

Pro funkci

$$f(x,y) = x - \mathrm{e}^{xy^2}$$

určete směrové derivace $f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$, $f_{\vec{u}}(\boldsymbol{y}^*)$ *a* $f_{\vec{v}}(\boldsymbol{y}^*)$, *jestliže máme* $\boldsymbol{x}^* = [0,0]$, $\boldsymbol{y}^* = [2,1]$, $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)^\top$ *a* $\vec{v} = (0,-1)^\top$.

Řešení. K řešení použijeme pouze výpočet založený na gradientu funkce $f(x,y)$. Jelikož

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - y^2\,\mathrm{e}^{xy^2} \\ -2xy\,\mathrm{e}^{xy^2} \end{pmatrix},$$

platí (spojitost parciálních derivací v okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$ je zřejmá)

$$\begin{aligned} f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) &= \left\langle (1,0)^\top, \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^\top \right\rangle = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ f_{\vec{u}}(\boldsymbol{y}^*) &= \left\langle (1-\mathrm{e}^2, -4\,\mathrm{e}^2)^\top, \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^\top \right\rangle = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - 5\,\mathrm{e}^2), \\ f_{\vec{v}}(\boldsymbol{y}^*) &= \left\langle (1-\mathrm{e}^2, -4\,\mathrm{e}^2)^\top, (0,-1)^\top \right\rangle = 4\,\mathrm{e}^2. \end{aligned}$$

▲

Příklad 3.3.25.

Vypočtěte $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$*, kde* $z(u,v) = \mathrm{e}^{2u+3v}$ *a* $u(x) = \sin x$*,* $v(x) = x^2$*.*

Řešení. Podle řetězového pravidla dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2\,\mathrm{e}^{2u+3v}\cos x + 3\,\mathrm{e}^{2u+3v}\,2x \\ &= 2\,\mathrm{e}^{2\sin x+3x^2}\cos x + 6x\,\mathrm{e}^{2\sin x+3x^2} = 2\,\mathrm{e}^{2\sin x+3x^2}(\cos x + 3x).\end{aligned}$$

Téhož výsledku dosáhneme také přímým derivováním funkce $z(x) = \mathrm{e}^{2\sin x+3x^2}$, kterou získáme po dosazení $u(x)$ a $v(x)$ do $z(u,v)$. ▲

Příklad 3.3.26.

Vypočtěte $\frac{\partial z}{\partial x}$*, pokud* $z(u,v) = u^v$ *a* $u(x,y) = 3x^2 + y^2$, $v(x,y) = 3x + 2y$.

Řešení. Podle řetězového pravidla dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = vu^{v-1}\,6x + 3u^v \ln u \\ &= (3x^2+y^2)^{3x+2y-1}[6x(3x+2y) + 3(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2)] \\ &= (3x^2+y^2)^{3x+2y-1}[18x^2 + 12xy + 3(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2)].\end{aligned}$$

Téhož výsledku dosáhneme také přímým derivováním funkce $z(x,y) = (3x^2+y^2)^{3x+2y}$, kterou získáme po dosazení $u(x,y)$ a $v(x,y)$ do $z(u,v)$. ▲

Příklad 3.3.27.

Vypočtěte $\frac{\partial z}{\partial y}$, *pokud* $z(u,v) = u^v$ *a* $u = 3x^2 + y^2$, $v = 3x + 2y$.

Řešení. Podle řetězového pravidla dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = vu^{v-1}\,2y + 2u^v \ln u \\ &= 2(3x^2+y^2)^{3x+2y-1}[(3x+2y)y + (3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2)] \\ &= 2(3x^2+y^2)^{3x+2y-1}[2y^2 + 3xy + (3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2)].\end{aligned}$$

Téhož výsledku dosáhneme také přímým derivováním funkce $z(x,y) = (3x^2+y^2)^{3x+2y}$, kterou získáme po dosazení $u(x,y)$ a $v(x,y)$ do $z(u,v)$. ▲

Příklad 3.3.28.

S využitím substituce $u = x$ a $v = \sqrt{x^2+y^2}$ najděte všechny funkce $z(x,y)$ splňující rovnost

$$y\,z_x - x\,z_y = 0.$$

Řešení. Protože $u_x = 1$, $u_y = 0$, $v_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a $v_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ dostaneme s použitím řetězového pravidla

$$y\left(z_u\cdot 1 + z_v\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - x\left(z_u\cdot 0 + z_v\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

neboli

$$y\,z_u = 0.$$

Jelikož y je proměnná, zajímá nás pouze situace, kdy $z_u = 0$ (to je také důvod, proč jsme v předchozím kroku nevyjádřili y pomocí u a v). Odtud plyne, že funkce $z(u,v)$ musí být tvaru

$$z(u,v) = C + f(v),$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta a f je libovolná diferencovatelná funkce. Proto zadané rovnosti vyhovují všechny funkce tvaru

$$z(x,y) = C + f\Big(\sqrt{x^2+y^2}\Big).$$

▲

Příklad 3.3.29.

S využitím substituce $u = x$ a $v = \frac{y}{x}$ najděte všechny funkce $z(x, y)$ splňující rovnost

$$x\, z_x + y\, z_y = 0.$$

Řešení. Protože $u_x = 1$, $u_y = 0$, $v_x = -\frac{y}{x^2}$ a $v_y = \frac{1}{x}$ dostaneme s použitím řetězového pravidla

$$x \left(z_u \cdot 1 - \frac{y\, z_v}{x^2} \right) + y \left(z_u \cdot 0 + \frac{z_v}{y} \right) = 0$$

neboli

$$x\, z_u = 0.$$

Jelikož y je proměnná, zajímá nás pouze situace, kdy $z_u = 0$ (to je také důvod, proč jsme v předchozím kroku nevyjádřili y pomocí u a v). Odtud plyne, že funkce $z(u, v)$ musí být tvaru

$$z(u, v) = C + f(v),$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta a f je libovolná diferencovatelná funkce. Proto zadané rovnosti vyhovují všechny funkce tvaru

$$z(x, y) = C + f\left(\frac{y}{x}\right).$$

▲

Příklad 3.3.30.

Diferenciální rovnici

$$x^2 y'' + x\,y' - 4y = x \ln x$$

transformujte do nové proměnné $t = \ln x$.

Řešení. Jelikož $x = \mathrm{e}^t$ a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} = \mathrm{e}^{-t}$, dostaneme z řetězového pravidla (derivaci podle proměnné t označíme tečkou)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dot{y}\,\mathrm{e}^{-t}, \\ y'' &= \frac{\mathrm{d}(\dot{y}\,\mathrm{e}^{-t})}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\dot{y}\,\mathrm{e}^{-t})}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left(\ddot{y}\,\mathrm{e}^{-t} - \dot{y}\,\mathrm{e}^{-t}\right) \mathrm{e}^{-t} = \ddot{y}\,\mathrm{e}^{-2t} - \dot{y}\,\mathrm{e}^{-2t}. \end{aligned}$$

Proto dostáváme novou (transformovanou) diferenciální rovnici

$$\mathrm{e}^{2t}\left(\ddot{y}\,\mathrm{e}^{-2t} - \dot{y}\,\mathrm{e}^{-2t}\right) + \mathrm{e}^{t}\left(\dot{y}\,\mathrm{e}^{-t}\right) - 4y = t\,\mathrm{e}^t \quad \text{neboli} \quad \ddot{y} - 4y = t\,\mathrm{e}^t.$$

▲

Příklad 3.3.31.

Diferenciální rovnici

$$(x+y)\,z_x - (x-y)\,z_y = 0$$

transformujte do nových proměnných $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ *a* $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Řešení. Jelikož $u_x = \frac{x}{x^2+y^2}$, $u_y = \frac{y}{x^2+y^2}$ a $v_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $v_y = \frac{x}{x^2+y^2}$, dostáváme z řetězového pravidla

$$z_x = z_u\,u_x + z_v\,v_x = \frac{x\,z_u}{x^2+y^2} - \frac{y\,z_v}{x^2+y^2} \quad \text{a} \quad z_y = z_u\,u_y + z_v\,v_y = \frac{y\,z_u}{x^2+y^2} + \frac{x\,z_v}{x^2+y^2}.$$

Pak po dosazení do původní rovnice a úpravě dostaneme novou diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} 0 &= (x+y)\,z_x - (x-y)\,z_y = \\ &= (x+y)\left(\frac{x\,z_u}{x^2+y^2} - \frac{y\,z_v}{x^2+y^2}\right) - (x-y)\left(\frac{y\,z_u}{x^2+y^2} + \frac{x\,z_v}{x^2+y^2}\right) = \\ &= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\,z_u - \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\,z_v = z_u - z_v. \end{aligned}$$

▲

Příklad 3.3.32.

Diferenciální rovnici

$$z_{xx} - y\,z_{yy} - \tfrac{1}{2}\,z_y = 0$$

transformujte do nových proměnných $u = x - 2\sqrt{y}$ *a* $v = x + 2\sqrt{y}$ *a vyřešte ji.*

Řešení. Jelikož $u_x = 1$, $u_y = -\frac{1}{\sqrt{y}}$ a $v_x = 1$, $v_y = \frac{1}{\sqrt{y}}$, dostáváme z řetězového pravidla

$$z_x = z_u \cdot 1 + z_v \cdot 1 = z_u + z_v \quad \text{a} \quad z_y = -\frac{z_u}{\sqrt{y}} + \frac{z_v}{\sqrt{y}}.$$

Odtud dále plyne

$$\begin{aligned} z_{xx} &= \frac{\partial z_u}{\partial x} + \frac{\partial z_v}{\partial x} = z_{uu}\,u_x + z_{uv}\,v_x + z_{vu}\,u_x + z_{vv}\,v_x = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv}, \\ z_{yy} &= -\frac{1}{\sqrt{y}}\big(z_{uu}\,u_y + z_{uv}\,v_y\big) + \frac{z_u}{2\sqrt{y^3}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\big(z_{vu}\,u_y + z_{vv}\,v_y\big) - \frac{z_v}{2\sqrt{y^3}} = \\ &= \frac{1}{y}\big(z_{uu} - z_{uv}\big) - \frac{1}{y}\big(z_{vu} - z_{vv}\big) + \frac{z_u - z_v}{2\sqrt{y^3}}. \end{aligned}$$

Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv} - y\left(\frac{1}{y}\big(z_{uu} - z_{uv}\big) - \frac{1}{y}\big(z_{vu} - z_{vv}\big) + \frac{z_u - z_v}{2\sqrt{y^3}}\right) + \frac{z_u - z_v}{2\sqrt{y}} = 0.$$

Proto z původní rovnice (za řešení diferenciální rovnice budeme brát dvakrát spojitě diferencovatelné funkce, takže bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $z_{uv} = z_{vu}$) obdržíme

$$4z_{uv} = 0 \quad \text{neboli} \quad z_{uv} = 0.$$

Potom platí, že

$$z_u = f(u) + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta a f je libovolná diferencovatelná (a tudíž i integrovatelná) funkce. Dalším integrováním vzhledem k u získáme

$$z(u, v) = F(u) + g(v) + Cu + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, F je primitivní funkce pro f a g je libovolná funkce. Řešením původní diferenciální rovnice tedy můžeme vyjádřit jako

$$z(x, y) = F\big(x - 2\sqrt{y}\big) + g\big(x + 2\sqrt{y}\big) + Cx - 2\,C\sqrt{y} + K.$$

▲

Příklad 3.3.33.

Diferenciální rovnici

$$x\,z_{xx} + y\,z_{xy} + z_x = 0$$

transformujte do nových proměnných $u = x + y$ *a* $v = \frac{y}{x+y}$.

Řešení. Jelikož $u_x = 1$, $u_y = 1$ a $v_x = -\frac{y}{(x+y)^2}$, $v_y = \frac{x}{(x+y)^2}$, dostáváme z řetězového pravidla (stačí nám pouze určit z_x)

$$z_x = z_u\,u_x + z_v\,v_x = z_u \cdot 1 + z_v\Big(-\frac{y}{(x+y)^2}\Big).$$

Odtud dále plyne

$$\begin{aligned}
z_{xx} &= z_{uu}\,u_x + z_{uv}\,v_x + z_v\,v_{xx} + v_x(z_{vu}\,u_x + z_{vv}\,v_x) = \\
&= z_{uu} \cdot 1 - z_{uv}\,\frac{y}{(x+y)^2} + z_v\,\frac{2y}{(x+y)^3} - z_{vu}\,\frac{y}{(x+y)^2} + z_{vv}\,\frac{y^2}{(x+y)^4}, \\
z_{xy} &= z_{uu}\,u_y + z_{uv}\,v_y + z_v\,v_{xy} + v_x(z_{vu}\,u_y + z_{vv}\,v_y) = \\
&= z_{uu} \cdot 1 + z_{uv}\,\frac{x}{(x+y)^2} + z_v\,\frac{y-x}{(x+y)^3} - z_{vu}\,\frac{y}{(x+y)^2} - z_{vv}\,\frac{xy}{(x+y)^4}.
\end{aligned}$$

Po dosazení do původní rovnice a úpravě dostaneme (za řešení diferenciální rovnice budeme brát dvakrát spojitě diferencovatelné funkce, takže bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $z_{uv} = z_{vu}$) novou diferenciální rovnici

$$0 = x\,z_{xx} + y\,z_{xy} + z_x = (x+y)\,z_{uu} - \frac{xy+y^2}{(x+y)^2}\,z_{vu} + z_u = u\,z_{uu} - v\,z_{vu} + z_u.$$

▲

Příklad 3.3.34.

Diferenciální rovnici

$$4xy\, z_{xy} - 2y\, z_y = 0$$

transformujte do nových proměnných $u = \sqrt{xy}$ *a* $v = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

Řešení. Jelikož $u_x = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$, $u_y = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$ a $v_x = \frac{1}{2\sqrt{xy}}$, $v_y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y^3}}$, dostáváme z řetězového pravidla

$$z_x = z_u\, u_x + z_v\, v_x = \frac{z_u}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{z_v}{2\sqrt{xy}} \quad \text{a} \quad z_y = z_u\, u_y + z_v\, v_y = \frac{z_u}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{z_v}{2}\sqrt{\frac{x}{y^3}}.$$

Odtud dále plyne

$$\begin{aligned} z_{xy} &= u_x(z_{uu}\, u_y + z_{uv}\, v_y) + z_u\, u_{xy} + v_x(z_{vu}\, u_y + z_{vv}\, v_y) + z_v\, v_{xy} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\left(\frac{z_{uu}}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{z_{uv}}{2}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\right) + \frac{z_u}{4\sqrt{xy}} + \frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(\frac{z_{vu}}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - z_{vv}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\right) - \frac{z_v}{4\sqrt{xy^3}} = \\ &= \frac{z_{uu}}{4} - \frac{z_{uv}}{4y} + \frac{z_u}{4\sqrt{xy}} + \frac{z_{vu}}{4y} - \frac{z_{vv}}{4y^2} - \frac{z_v}{4\sqrt{xy^3}} \end{aligned}$$

Po dosazení do původní rovnice a úpravě dostaneme (za řešení diferenciální rovnice budeme brát dvakrát spojitě diferencovatelné funkce, takže bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $z_{uv} = z_{vu}$) novou diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} 0 &= 4xy\, z_{xy} - 2y\, z_y = xy\, z_{uu} - x\, z_{uv} + \sqrt{xy}\, z_u + x\, z_{uv} - \frac{x}{y}\, z_{vv} - \sqrt{\frac{x}{y}}\, z_v - \sqrt{xy}\, z_u + \sqrt{\frac{x}{y}}\, z_v = \\ &= xy\, z_{uu} - \frac{x}{y}\, z_{vv} = u^2\, z_{uu} - v^2\, z_{vv}. \end{aligned}$$

▲

Příklad 3.3.35.

Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná. Ověřte platnost následující rovnosti

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz,$$

jestliže $z = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Řešení. Z řetězového pravidla dostáváme

$$z_x = nx^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x^n y}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{a} \quad z_y = \frac{x^n}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

z čehož plyne

$$x\, z_x + y\, z_y = nx^n f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x^n y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x^n y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) = nx^n f\left(\frac{y}{x}\right) = nz.$$

▲

Příklad 3.3.36.

Nechť funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou dvakrát diferencovatelné. Ověřte platnost následující rovnosti

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kde $u = f\big(x + g(y)\big)$.

Řešení. Z řetězového pravidla dostáváme

$$\begin{aligned} u_x &= f'\big(x + g(y)\big), \quad & u_y &= f'\big(x + g(y)\big) \cdot g'(y), \\ u_{xx} &= f''\big(x + g(y)\big), \quad & u_{xy} &= f''\big(x + g(y)\big) \cdot g'(y), \end{aligned}$$

z čehož plyne

$$u_x\, u_{xy} = f'\big(x + g(y)\big) \big[f''\big(x + g(y)\big)\, g'(y)\big] = \big[f'\big(x + g(y)\big)\, g'(y)\big]\, f''\big(x + g(y)\big) = u_y\, u_{xx}.$$

▲

III. 4. Diferenciál a Taylorova věta pro funkce více proměnných

Následující výsledky jsou formulovány pouze pro funkci dvou proměnných. Nicméně jejich rozšíření pro funkce n proměnných je (téměř) zřejmé.

Definice 3.4.1.

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém okolí bodu $\mathcal{O}(x_0, y_0)$. Existují-li taková konečná čísla $A, B \in \mathbb{R}$, že pro funkci $w(h,k)$ definovanou jako

$$w(h,k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk$$

platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{w(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0, \tag{3.4.1}$$

pak říkáme, že funkce f je *diferencovatelná* v $[x_0, y_0]$. Lineární funkci $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k) = Ah + Bk$ v proměnných h a k nazýváme (*totálním*) *diferenciálem funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$.

Věta 3.4.2.

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$. Pak jsou čísla A, B ve vztahu (3.4.1) určena jednoznačně, existují parciální derivace $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ a platí

$$A = f_x(x_0, y_0), \quad B = f_y(x_0, y_0).$$

Tedy pro diferenciál funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ dostáváme

$$\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k) = f_x(x_0, y_0)\, h + f_y(x_0, y_0)\, k.$$

Navíc funkce f je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$.

Věta 3.4.3.

Má-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojité parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě diferencovatelná.

Definice 3.4.4.

Rovina $\tau : z = Ax + By + C$ se nazývá *tečnou rovinou* funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $M_0 = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, jestliže

- rovina τ prochází bodem M_0,
- platí $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - Ax - By - C}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$

Všimněte si, že z první podmínky předchozí definice plyne $f(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C$, tedy $C = f(x_0, y_0) - Ax_0 - By_0$, což po dosazení dává

$$\tau:\ z = A(x - x_0) + B(y - y_0) + f(x_0, y_0).$$

Věta 3.4.5.

Tečná rovina τ ke grafu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ existuje právě tehdy, když je funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$. Její rovnice je potom

$$\tau:\ z = f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0) + f(x_0, y_0).$$

Poznámka 3.4.6. Jestliže τ je tečnou rovinu ke grafu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě dotyku $M = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, pak přímka procházející bodem M a kolmá k rovině τ je tzv. *normálou* ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě M. Její parametrické vyjádření je

$$n:\ \begin{cases} x = x_0 + t\, f_x(x_0, y_0), \\ y = y_0 + t\, f_y(x_0, y_0), \\ z = z_0 - t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

V případě $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ a $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ lze dokonce parametr t vyloučit, tj.

$$n:\ f(x_0, y_0) - z = \frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)}.$$

Poznámka 3.4.7. Diferenciál funkce lze použít k přibližnému výpočtu funkčních hodnot. Platí

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0) = \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0). \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

V „praktických“ úlohách na určení přibližné funkční hodnoty pomocí vzorce (3.4.2) je obvykle potřeba si vhodně zvolit funkci $f(x, y)$ a bod $[x_0, y_0]$. Při této aplikaci bychom se samozřejmě měli obejít bez kalkulačky, takže bod $[x_0, y_0]$ je potřeba volit tak, abychom dokázali snadno vyčíslit hodnoty $f(x_0, y_0)$, $f_x(x_0, y_0)$ a $f_y(x_0, y_0)$.

Věta 3.4.8 (*Taylorova*).

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $n + 1$ včetně. Pak pro každý bod $[x, y]$ z tohoto okolí platí

$$f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y),$$

přičemž Taylorův polynom $T_n(x,y)$ je dán jako

$$
\begin{aligned}
T_n(x,y) &= \\
&= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) + \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\,(x-x_0)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\,(x-x_0)(y-y_0) + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\,(y-y_0)^2\right] + \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x_0,y_0)\,(x-x_0)^{n-j}(y-y_0)^j
\end{aligned}
$$

a zbytek po n-tém členu $R_n(x,y)$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$
\begin{aligned}
R_n(x,y) &= \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}\big(x_0+\vartheta(x-x_0), y_0+\vartheta(y-y_0)\big)\times \\
&\qquad\qquad \times (x-x_0)^{n+1-j}(y-y_0)^j,
\end{aligned}
$$

kde $\vartheta \in (0,1)$.

Příklad 3.4.1.

Určete diferenciál funkce

$$f(x,y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

v bodě $[1, \sqrt{3}]$.

Řešení. Nejdříve vypočteme parciální derivace funkce f, tj.

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{|y|}{x^2+y^2},$$
$$f_y(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{\operatorname{sgn}(y)\, x}{x^2+y^2}.$$

Odtud je vidět, že funkce f je diferencovatelná, neboť obě parciální derivace jsou jistě spojité v (nějakém) okolí bodu $[1, \sqrt{3}]$. Vyčíslením těchto parciálních derivací v bodě $[1, \sqrt{3}]$ dostaneme $f_x(1, \sqrt{3}) = \sqrt{3}/4$ a $f_y(1, \sqrt{3}) = -1/4$, z čehož plyne

$$\mathrm{d}f_{(1,\sqrt{3})}(h,k) = \frac{\sqrt{3}}{4}\, h - \frac{1}{4}\, k.$$

▲

Příklad 3.4.2.

Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^4 - 2xy$$

v bodě $[1, 2, f(x,y)]$.

Řešení. Potřebujeme určit funkční hodnotu a hodnoty parciálních derivací v bodě $[1,2]$, tj. $f(1,2) = 13$ a

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 2y \rightsquigarrow -1, \qquad f_y(x,y) = 4y^3 - 2x \rightsquigarrow 30.$$

Proto tečná rovina τ je dána rovnicí (existence je zaručena spojitostí parciálních derivací v bodě $[1,2]$)

$$\tau: \; z = 13 - (x-1) + 30(y-2)$$

neboli

$$\tau: \; z = -x + 30y - 46.$$

▲

Příklad 3.4.3.

Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - xy + x$$

v bodě $[1, 0, f(x,y)]$.

Řešení. Potřebujeme určit funkční hodnotu a hodnoty parciálních derivací v bodě $[1,0]$, tj. $f(1,0) = 2$ a

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - y + 1 \rightsquigarrow 4, \qquad f_y(x,y) = 6xy - x \rightsquigarrow -1.$$

Proto tečná rovina τ je dána rovnicí (existence je zaručena spojitostí parciálních derivací v bodě $[1,0]$)

$$\tau: \ z = 2 + 4(x-1) - 1(y-0)$$

neboli

$$\tau: \ z = 4x - y - 2.$$

▲

Příklad 3.4.4.

Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x,y) = \ln(x+2y)$$

v bodě $[2, 1, f(x,y)]$.

Řešení. Potřebujeme určit funkční hodnotu a hodnoty parciálních derivací v bodě $[2,1]$, tj. $f(2,1) = \ln 4$ a

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x+2y} \rightsquigarrow \frac{1}{4}, \qquad f_y(x,y) = \frac{2}{x+2y} \rightsquigarrow \frac{1}{2}.$$

Proto tečná rovina τ je dána rovnicí (existence je zaručena spojitostí parciálních derivací v bodě $[2,1]$)

$$\tau: \; z = \ln 4 + \tfrac{1}{4}(x-2) + \tfrac{1}{2}(y-1)$$

neboli

$$\tau: \; 4z = x + 2y + 4(\ln 4 - 1).$$

▲

Příklad 3.4.5.

Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

v bodě $[-1,2,f(x,y)]$.

Řešení. Potřebujeme určit funkční hodnotu a hodnoty parciálních derivací v bodě $[1,1]$, tj. $f(-1,2) = 1/25$ a

$$f_x(x,y) = -\frac{4x}{(x^2+y^2)^3} \rightsquigarrow \frac{4}{125}, \qquad f_y(x,y) = -\frac{4y}{(x^2+y^2)^3} \rightsquigarrow -\frac{8}{125}.$$

Proto tečná rovina τ je dána rovnicí (existence je zaručena spojitostí parciálních derivací v bodě $[1,1]$)

$$\tau:\ z = \tfrac{1}{25} + \tfrac{4}{125}(x+1) - \tfrac{8}{125}(y-2)$$

neboli

$$\tau:\ 125z = 4x - 8y + 25.$$

▲

Příklad 3.4.6.

Určete rovnici tečné nadroviny ke grafu funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = \operatorname{arctg} \frac{x_1 x_2}{x_3}$$

v bodě $[\sqrt{3}, 2, 6, f(x_1, x_2, x_3)]$.

Řešení. Potřebujeme určit funkční hodnotu a hodnoty parciálních derivací v bodě $[\sqrt{3}, 2, 6]$, tj. $f(\sqrt{3}, 2, 6) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \pi/6$ a

$$\begin{aligned}
f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_1 x_2}{x_3}\right)^2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \rightsquigarrow \frac{1}{4},\\
f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_1 x_2}{x_3}\right)^2} \cdot \frac{x_1}{x_3} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{8},\\
f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_1 x_2}{x_3}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x_1 x_2}{x_3^2}\right) \rightsquigarrow -\frac{\sqrt{3}}{24},
\end{aligned}$$

Proto tečná rovina τ je dána rovnicí (existence je zaručena spojitostí parciálních derivací v bodě $[\sqrt{3}, 2, 6]$)

$$\tau: \; x_4 = \tfrac{\pi}{6} + \tfrac{1}{4}(x_1 - \sqrt{3}) + \tfrac{\sqrt{3}}{8}(x_2 - 2) - \tfrac{\sqrt{3}}{24}(x_3 - 6)$$

neboli

$$\tau: \; 24x_4 = 6x_1 + 3\sqrt{3}\, x_2 - \sqrt{3}\, x_3 + 4\pi - 6\sqrt{3}.$$

▲

Příklad 3.4.7.

Určete rovnici tečné roviny i normály ke grafu funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

v bodě $[1,2,5]$.

Řešení. Bod $[1,2,5]$ leží na grafu funkce $f(x,y)$. Potřebujeme proto určit ještě hodnoty parciálních derivací v bodě $[1,2]$, tj.

$$f_x(x,y) = 2x \rightsquigarrow 2, \qquad f_y(x,y) = 2y \rightsquigarrow 4.$$

Proto tečná rovina τ je dána rovnicí (existence je zaručena spojitostí parciálních derivací v bodě $[1,2]$)

$$\tau:\ z = 5 + 2(x-1) + 4(y-2) \quad \text{neboli} \quad \tau:\ z = 2x + 4y - 5.$$

Normála n k tečné rovině je dána parametricky

$$n:\ x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 4t, \quad z = 5 - t, \quad t \in \mathbb{R},$$

což lze po vyloučení parametru t zapsat jako

$$n:\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = 5 - z.$$

▲

Příklad 3.4.8.

Určete rovnici tečné roviny i normály ke grafu funkce

$$f(x,y) = \sin(3x - 2y)$$

v bodě $[0, 0, f(x,y)]$.

Řešení. Potřebujeme určit funkční hodnotu a hodnoty parciálních derivací v bodě $[0,0]$, tj. $f(0,0) = 0$ a

$$f_x(x,y) = 3\cos(3x - 2y) \rightsquigarrow 3, \qquad f_y(x,y) = -2\cos(3x - 2y) \rightsquigarrow -2.$$

Proto tečná rovina τ je dána rovnicí (existence je zaručena spojitostí parciálních derivací v bodě $[0,0]$)

$$\tau:\ z = 0 + 3(x - 0) - 2(y - 0)$$

neboli

$$\tau:\ z = 3x - 2x.$$

Normála n k tečné rovině je dána parametricky

$$n:\ x = 0 + 3t = 3t, \quad y = 0 - 2t = -2t, \quad z = 0 - t, \quad t \in \mathbb{R},$$

což lze po vyloučení parametru t zapsat jako

$$n:\ x/3 = -y/2 = -z.$$

▲

Příklad 3.4.9.

Určete rovnici tečné roviny i normály ke grafu funkce

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

v bodě $\left[1, 1, \frac{\pi}{4}\right]$.

Řešení. Bod $\left[1, 1, \frac{\pi}{4}\right]$ leží na grafu funkce $f(x,y)$. Potřebujeme proto určit ještě hodnoty parciálních derivací v bodě $[1,1]$, tj.

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \rightsquigarrow -1/2, \qquad f_y(x,y) = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \rightsquigarrow 1/2.$$

Proto tečná rovina τ je dána rovnicí (existence je zaručena spojitostí parciálních derivací v bodě $[1,1]$)

$$\tau: \ z = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}(x-1) + \tfrac{1}{2}(y-1) \quad \text{neboli} \quad \tau: \ z = -x/2 + y/2 + \pi/4.$$

Normála n k tečné rovině je dána parametricky

$$n: \ x = 1 - t/2, \quad y = 1 + t/2, \quad z = \pi/4 - t, \quad t \in \mathbb{R},$$

což lze po vyloučení parametru t zapsat jako

$$n: \ 2 - 2x = 2y - 2 = \tfrac{\pi}{4} - z.$$

▲

Příklad 3.4.10.

Určete rovnici tečné roviny i normály ke grafu funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + xy + 1}$$

v bodě $[0, 4, f(x,y)]$

Řešení. Potřebujeme určit funkční hodnotu a hodnoty parciálních derivací v bodě $[0,4]$, tj. $f(0,4) = 1$ a

$$f_x(x,y) = \frac{2x+y}{2\sqrt{x^2+xy+1}} \rightsquigarrow 2, \qquad f_y(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{x^2+xy+1}} \rightsquigarrow 0.$$

Proto tečná rovina τ je dána rovnicí (existence je zaručena spojitostí parciálních derivací v bodě $[0,4]$)

$$\tau: \ z = 1 + 2(x-0) + 0(y-4)$$

neboli

$$\tau: \ z = 1 + 2x.$$

Normála n k tečné rovině je dána parametricky

$$n: \ x = 0 + 2t = 2t, \quad y = 4 + 0t = 4, \quad z = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 3.4.11.

Pomocí diferenciálu odhadněte hodnotu

$$e^{0{,}05^3-0{,}02}.$$

Řešení. Nejdříve potřebujeme určit funkci f a bod $[x_0, y_0]$ tak, aby f byla v tomto bodě diferencovatelná, a tudíž bylo možné aplikovat vzorec z Poznámky 3.4.7. Nejpřirozenější je volba $f(x,y) = e^{x^3-y}$ a $[x_0, y_0] = [0,0]$. Vypočteme a vyčíslíme parciální derivace, tj.

$$f_x(x,y) = 3x^2\, e^{x^3-y} \rightsquigarrow 0 \quad \text{a} \quad f_y(x,y) = -\,e^{x^3-y} \rightsquigarrow -1.$$

Odtud je vidět, že parciální derivace funkce f jsou spojité v bodě $[0,0]$. Proto funkce f je diferencovatelná v bodě $[0,0]$ s diferenciálem

$$\mathrm{d}f_{(0,0)}(x-0, y-0) = f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y = 0\,x - y \overset{\substack{x=0{,}05\\ y=0{,}02}}{\rightsquigarrow} 0 - 0,02 = -0,02.$$

Takže s využitím vzorce (3.4.2) dostaneme odhad

$$e^{0{,}05^3-0{,}02} \approx e^0 + \mathrm{d}f_{(0,0)}(0,05-0; 0,02-0) = 1 - 0,02 = 0,98.$$

Pro úplnost dodejme, že přesná hodnota je $0,9803212058\ldots$ ▲

Příklad 3.4.12.

Pomocí diferenciálu odhadněte hodnotu

$$1,04^{2,02}.$$

Řešení. Nejdříve potřebujeme určit funkci f a bod $[x_0, y_0]$ tak, aby f byla v tomto bodě diferencovatelná, a tudíž bylo možné aplikovat vzorec z Poznámky 3.4.7. Nejpřirozenější je volba $f(x,y) = x^y$ a $[x_0, y_0] = [1, 2]$. Vypočteme a vyčíslíme parciální derivace, tj.

$$f_x(x,y) = y\,x^{y-1} \rightsquigarrow 2 \quad \text{a} \quad f_y(x,y) = x^y \ln x \rightsquigarrow 0.$$

Odtud je vidět, že parciální derivace funkce f jsou spojité v bodě $[1, 2]$. Proto funkce f je diferencovatelná v bodě $[1, 2]$ s diferenciálem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_{(1,2)}(x-1, y-2) &= f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2) = \\ &= 2\,(x-1) + 0\,(y-2) \overset{\substack{x=1,04\\ y=2,02}}{\rightsquigarrow} 2 \cdot 0,04 + 0 = 0,08. \end{aligned}$$

Takže s využitím vzorce (3.4.2) dostaneme odhad

$$1,04^{2,02} \approx 1^2 + \mathrm{d}f_{(1,2)}(1,04-1; 2,02-2) = 1 + 0,08 = 1,08.$$

Pro úplnost dodejme, že přesná hodnota je $1,082448755\ldots$ ▲

Příklad 3.4.13.

Pomocí diferenciálu odhadněte hodnotu

$$\sqrt{2,08 \cdot 1,99}.$$

Řešení. Nejdříve potřebujeme určit funkci f a bod $[x_0, y_0]$ tak, aby f byla v tomto bodě diferencovatelná, a tudíž bylo možné aplikovat vzorec z Poznámky 3.4.7. Nejpřirozenější je volba $f(x,y) = \sqrt{xy}$ a $[x_0, y_0] = [2,2]$. Vypočteme a vyčíslíme parciální derivace, tj.

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} \rightsquigarrow \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad f_y(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} \rightsquigarrow \frac{1}{2}.$$

Odtud je vidět, že parciální derivace funkce f jsou spojité v bodě $[2,2]$. Proto funkce f je diferencovatelná v bodě $[2,2]$ s diferenciálem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_{(2,2)}(x-2, y-2) &= f_x(2,2)(x-2) + f_y(2,2)(y-2) = \\ &= \frac{x-2}{2} + \frac{y-2}{2} \overset{\substack{x=2,08 \\ y=1,99}}{\rightsquigarrow} \frac{0,08}{2} - \frac{0,01}{2} = 0,035. \end{aligned}$$

Takže s využitím vzorce (3.4.2) dostaneme odhad

$$\sqrt{2,08 \cdot 1,99} \approx \sqrt{4} + \mathrm{d}f_{(2,2)}(2,08-2; 1,99-2) = 2 + 0,035 = 2,035.$$

Pro úplnost dodejme, že přesná hodnota je $2,034502396\ldots$ ▲

Příklad 3.4.14.

Pomocí diferenciálu odhadněte hodnotu

$$\ln \frac{3,01}{2,9}.$$

Řešení. Nejdříve potřebujeme určit funkci f a bod $[x_0, y_0]$ tak, aby f byla v tomto bodě diferencovatelná, a tudíž bylo možné aplikovat vzorec z Poznámky 3.4.7. Nejpřirozenější je volba $f(x,y) = \ln \frac{x}{y}$ a $[x_0, y_0] = [3,3]$. Vypočteme a vyčíslíme parciální derivace, tj.

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x} \rightsquigarrow \frac{1}{3} \quad \text{a} \quad f_y(x,y) = -\frac{1}{y} \rightsquigarrow -\frac{1}{3}.$$

Odtud je vidět, že parciální derivace funkce f jsou spojité v bodě $[3,3]$. Proto funkce f je diferencovatelná v bodě $[3,3]$ s diferenciálem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_{(3,3)}(x-3, y-3) &= f_x(3,3)(x-3) + f_y(3,3)(y-3) = \\ &= \frac{x-3}{3} - \frac{y-3}{3} \overset{\substack{x=3,01 \\ y=2,9}}{\rightsquigarrow} \frac{0,01}{3} + \frac{0,1}{3} = \frac{11}{300}. \end{aligned}$$

Takže s využitím vzorce (3.4.2) dostaneme odhad

$$\ln \frac{3,01}{2,9} \approx 0 + \mathrm{d}f_{(3,3)}(3,01-3; 2,9-3) = \frac{11}{300} \doteq 0,36667.$$

Pro úplnost dodejme, že přesná hodnota je $0,03722934130\ldots$ ▲

Příklad 3.4.15.

Pomocí diferenciálu odhadněte hodnotu

$$\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}.$$

Řešení. Nejdříve potřebujeme určit funkci f a bod $[x_0, y_0]$ tak, aby f byla v tomto bodě diferencovatelná, a tudíž bylo možné aplikovat vzorec z Poznámky 3.4.7. Nejpřirozenější je volba $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$ a $[x_0, y_0] = [1,2]$. Vypočteme a vyčíslíme parciální derivace, tj.

$$f_x(x,y) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}} \rightsquigarrow \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad f_y(x,y) = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}} \rightsquigarrow 2.$$

Odtud je vidět, že parciální derivace funkce f jsou spojité v bodě $[1,2]$. Proto funkce f je diferencovatelná v bodě $[1,2]$ s diferenciálem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_{(1,2)}(x-1, y-2) &= f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2) = \\ &= \frac{x-1}{2} + 2\,(y-2) \overset{\substack{x=1,02 \\ y=1,97}}{\rightsquigarrow} \frac{0,02}{2} - 2\cdot 0,03 = -0,05. \end{aligned}$$

Takže s využitím vzorce (3.4.2) dostaneme odhad

$$\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3} \approx \sqrt{1+8} + \mathrm{d}f_{(1,2)}(1,02-1; 1,97-2) = 3 - 0,05 = 2,95.$$

Pro úplnost dodejme, že přesná hodnota je $2,950691614\ldots$ ▲

Příklad 3.4.16.

Pomocí diferenciálu odhadněte hodnotu

$$\operatorname{arctg} \frac{1,02}{0,95}.$$

Řešení. Nejdříve potřebujeme určit funkci f a bod $[x_0, y_0]$ tak, aby f byla v tomto bodě diferencovatelná, a tudíž bylo možné aplikovat vzorec z Poznámky 3.4.7. Nejpřirozenější je volba $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ a $[x_0, y_0] = [1,1]$. Vypočteme a vyčíslíme parciální derivace, tj.

$$f_x(x,y) = \frac{1}{y + \frac{x^2}{y}} \rightsquigarrow \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad f_y(x,y) = -\frac{x}{y^2 + x^2} \rightsquigarrow -\frac{1}{2}.$$

Odtud je vidět, že parciální derivace funkce f jsou spojité v bodě $[1,1]$. Proto funkce f je diferencovatelná v bodě $[1,1]$ s diferenciálem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_{(1,1)}(x-1, y-1) &= f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) = \\ &= \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{2} \overset{\substack{x=1,02 \\ y=0,95}}{\rightsquigarrow} \frac{0,02}{2} + \frac{0,05}{2} = 0,035. \end{aligned}$$

Takže s využitím vzorce (3.4.2) dostaneme odhad

$$\operatorname{arctg} \frac{1,02}{0,95} \approx \operatorname{arctg} 1 + \mathrm{d}f_{(1,1)}(1,02 - 1; 0,95 - 1) = \pi/4 + 0,035 \doteq 0,8204.$$

Pro úplnost dodejme, že přesná hodnota je $0,8209162153\ldots$ ▲

Příklad 3.4.17.

Pomocí diferenciálu odhadněte hodnotu

$$\log_2\left[(1,96)^2+4,02\right],$$

pokud víme, že $\ln 2 \doteq 0,693$.

Řešení. Nejdříve potřebujeme určit funkci f a bod $[x_0,y_0]$ tak, aby f byla v tomto bodě diferencovatelná, a tudíž bylo možné aplikovat vzorec z Poznámky 3.4.7. Nejpřirozenější je volba $f(x,y)=\log_2\left(x^2+y\right)$ a $[x_0,y_0]=[2,4]$. Vypočteme a vyčíslíme parciální derivace, tj.

$$f_x(x,y)=\frac{2x}{(x^2+y)\ln 2}\rightsquigarrow\frac{1}{2\ln 2}\quad\text{a}\quad f_y(x,y)=\frac{1}{(x^2+y)\ln 2}\rightsquigarrow\frac{1}{8\ln 2}.$$

Odtud je vidět, že parciální derivace funkce f jsou spojité v bodě $[2,4]$. Proto funkce f je diferencovatelná v bodě $[2,4]$ s diferenciálem

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f_{(2,4)}(x-2,y-4)&=f_x(2,4)(x-2)+f_y(2,4)(y-4)=\\&=\frac{x-2}{2\ln 2}+\frac{y-4}{8\ln 2}\overset{\substack{x=1,96\\y=4,02}}{\rightsquigarrow}-\frac{0,04}{2\ln 2}+\frac{0,02}{8\ln 2}\doteq-0,025.\end{aligned}$$

Takže s využitím vzorce (3.4.2) dostaneme odhad

$$\begin{aligned}\log_2\left[(1,96)^2+4,02\right]&\approx\log_2(2^2+4)+\mathrm{d}f_{(2,4)}(1,96-2;4,02-4)\\&\doteq\log_2 2^3-0,025=3-0,025=2,975.\end{aligned}$$

Pro úplnost dodejme, že přesná hodnota je $2,974822961\ldots$ ▲

Příklad 3.4.18.

Určete Taylorův polynom třetího řádu se středem v počátku pro funkci

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y.$$

Řešení. Pro určení $T_3(x,y)$ potřebujeme určit a vyčíslit v počátku funkci f a její parciální derivace prvního, druhého a třetí řádu, tj.

$$\begin{gathered}
f(0,0) = 0, \quad f_x(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y \rightsquigarrow 0, \quad f_y(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y \rightsquigarrow 1, \\
f_{xx}(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y \rightsquigarrow 0, \quad f_{xy}(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y \rightsquigarrow 1, \quad f_{yy}(x,y) = -\mathrm{e}^x \sin y \rightsquigarrow 0, \\
f_{xxx}(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y \rightsquigarrow 0, \quad f_{xxy}(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y \rightsquigarrow 1, \\
f_{yyx}(x,y) = -\mathrm{e}^x \sin y \rightsquigarrow 0, \quad f_{yyy}(x,y) = -\mathrm{e}^x \cos y \rightsquigarrow -1.
\end{gathered}$$

Proto dostáváme (spojitost parciálních derivací v počátku a nějakém jeho je zřejmá)

$$T_3(x,y) = y + xy + \frac{x^2 y}{2} - \frac{y^3}{6}.$$

▲

Příklad 3.4.19.

Určete Taylorův polynom třetího řádu se středem v počátku pro funkci

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x \ln(1+y).$$

Řešení. Pro určení $T_3(x,y)$ potřebujeme určit a vyčíslit v počátku funkci f a její parciální derivace prvního, druhého a třetí řádu, tj.

$$f(0,0) = 0, \quad f_x(x,y) = \mathrm{e}^x \ln(1+y) \rightsquigarrow 0, \quad f_y(x,y) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+y} \rightsquigarrow 1,$$
$$f_{xx}(x,y) = \mathrm{e}^x \ln(1+y) \rightsquigarrow 0, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+y} \rightsquigarrow 1, \quad f_{yy}(x,y) = -\frac{\mathrm{e}^x}{(1+y)^2} \rightsquigarrow -1,$$
$$f_{xxx}(x,y) = \mathrm{e}^x \ln(1+y) \rightsquigarrow 0, \quad f_{xxy}(x,y) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+y} \rightsquigarrow 1,$$
$$f_{yyx}(x,y) = -\frac{\mathrm{e}^x}{(1+y)^2} \rightsquigarrow -1, \quad f_{yyy}(x,y) = \frac{2\,\mathrm{e}^x}{(1+y)^3} \rightsquigarrow 2.$$

Proto dostáváme (spojitost parciálních derivací v počátku a nějakém jeho je zřejmá)

$$T_3(x,y) = y + xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2y - xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}.$$

▲

Příklad 3.4.20.

Určete Taylorův polynom třetího řádu se středem v bodě $[1,1]$ *pro funkci*

$$f(x,y) = x^y.$$

Řešení. Pro určení $T_3(x,y)$ potřebujeme určit a vyčíslit v bodě $[1,1]$ funkci f a její parciální derivace prvního, druhého a třetí řádu, tj.

$$\begin{gathered}
f(1,1) = 1, \quad f_x(x,y) = y\,x^{y-1} \rightsquigarrow 1, \quad f_y(x,y) = x^y \ln x \rightsquigarrow 0, \\
f_{xx}(x,y) = y\,(y-1)\,x^{y-2} \rightsquigarrow 0, \quad f_{yy}(x,y) = x^y \ln^2 x \rightsquigarrow 0, \\
f_{xy}(x,y) = x^{y-1} + y\,x^{y-1} \ln x \rightsquigarrow 1, \\
f_{xxx}(x,y) = y\,(y-1)\,(y-2)x^{y-3} \rightsquigarrow 0, \\
f_{xxy}(x,y) = (y-1)\,x^{y-2} + y\,x^{y-2} + y\,(y-1)x^{y-2} \ln x \rightsquigarrow 1, \\
f_{yyx}(x,y) = y\,x^{y-1} \ln^2 x + 2x^{y-1}\,\ln x \rightsquigarrow 0, \quad f_{yyy}(x,y) = x^y \ln^3 x \rightsquigarrow 0.
\end{gathered}$$

Proto dostáváme (spojitost parciálních derivací v $[1,1]$ a nějakém jeho je zřejmá)

$$T_3(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{(x-1)^2(y-1)}{2}.$$

▲

Příklad 3.4.21.

Určete Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[-2,-3]$ *pro funkci*

$$f(x,y)=\ln\left(\frac{1}{xy}\right).$$

Řešení. Pro určení $T_2(x,y)$ potřebujeme určit a vyčíslit v bodě $[-2,-3]$ funkci f a její parciální derivace prvního i druhého řádu, tj.

$$f(-2,-3)=\ln\frac{1}{6}=-\ln 6,\quad f_x(x,y)=-\frac{1}{x}\rightsquigarrow\frac{1}{2},\quad f_y(x,y)=-\frac{1}{y}\rightsquigarrow\frac{1}{3},$$
$$f_{xx}(x,y)=\frac{1}{x^2}\rightsquigarrow\frac{1}{4},\quad f_{xy}(x,y)=0\rightsquigarrow 0,\quad f_{yy}(x,y)=\frac{1}{y^2}\rightsquigarrow\frac{1}{9}.$$

Proto dostáváme (spojitost parciálních derivací v $[-2,-3]$ a nějakém jeho okolí je zřejmá)

$$\begin{aligned}T_2(x,y)&=-\ln 6+\frac{x+2}{2}+\frac{y+3}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{(x+2)^2}{4}+0+\frac{(y+3)^2}{9}\right)=\\&=-\ln 6+3+x+\frac{2y}{3}+\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}.\end{aligned}$$

▲

Příklad 3.4.22.

Pomocí Taylorova polynomu druhého řádu se středem ve vhodném bodě určete přibližně hodnotu funkce

$$f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2+1\right)$$

v bodě $[1{,}1; 1{,}2]$.

Řešení. Nejdříve si musíme stanovit střed Taylorovy řady. Ze stejných důvodu jako v případě výpočtu diferenciálu funkce je nejpřirozenější volba $[x_0, y_0] = [1,1]$, přičemž hodnotu $f(1,1) = \ln 3$ můžeme v tuto chvíli považovat za „tabulkovou". Nyní pro určení $T_2(x,y)$ potřebujeme určit a vyčíslit v bodě $[1,1]$ funkci f (to jsme vlastně již udělali) a její parciální derivace prvního i druhého řádu, tj.

$$f(1,1) = \ln 3, \quad f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1} \rightsquigarrow \frac{2}{3}, \quad f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1} \rightsquigarrow \frac{2}{3},$$
$$f_{xx}(x,y) = \frac{2(-x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2} \rightsquigarrow \frac{2}{9}, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2} \rightsquigarrow -\frac{4}{9},$$
$$f_{yy}(x,y) = \frac{2(x^2-y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2} \rightsquigarrow \frac{2}{9}.$$

Proto dostáváme (spojitost parciálních derivací v $[1,1]$ a nějakém jeho okolí je zřejmá)

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= \ln 3 + \frac{2(x-1)}{3} + \frac{2(y-1)}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{2(x-1)^2}{9} - \frac{8(x-1)(y-1)}{9} + \frac{2(y-1)^2}{9}\right) = \\ &= \ln 3 + \tfrac{1}{9}\left(8x+8y+x^2-4xy+y^2-14\right), \end{aligned}$$

což s využitím $\ln 3 \doteq 1{,}0986$ dává $f(1{,}1; 1{,}2) \approx 1{,}295267$. Pro úplnost dodejme, že přesná hodnota je $1{,}294727168\ldots$ ▲

Příklad 3.4.23.

Pomocí Taylorova polynomu druhého řádu se středem ve vhodném bodě určete přibližně hodnotu funkce

$$\frac{\cos 44^\circ}{\cos 31^\circ}.$$

Řešení. Nejdříve si musíme stanovit vhodnou funkci f a střed Taylorovy řady. Ze stejných důvodu jako v případě výpočtu diferenciálu funkce je nejpřirozenější volba $f(x,y) = \frac{\cos x}{\cos y}$ a $[x_0, y_0] = [\pi/4, \pi/6]$, přičemž hodnoty $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ můžeme v tuto chvíli považovat za „tabulkové“. Nyní pro stanovení $T_2(x,y)$ potřebujeme určit a vyčíslit v bodě $[1,1]$ funkci f a její parciální derivace prvního i druhého řádu, tj.

$$f(\pi/4, \pi/6) = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad f_x(x,y) = -\frac{\sin x}{\cos y} \rightsquigarrow -\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad f_y(x,y) = \frac{\cos x \sin y}{\cos^2 y} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{3},$$
$$f_{xx}(x,y) = -\frac{\cos x}{\cos y} \rightsquigarrow -\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad f_{xy}(x,y) = -\frac{\sin x \sin y}{\cos^2 y} \rightsquigarrow -\frac{\sqrt{2}}{3},$$
$$f_{yy}(x,y) = \frac{\cos x \cos^2 y + 2\cos x \sin^2 y}{\cos^3 y} \rightsquigarrow \frac{5\sqrt{6}}{9}.$$

Proto dostáváme (spojitost parciálních derivací v bodě $[\pi/4, \pi/6]$ a nějakém jeho okolí je zřejmá)

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}\,(x-\pi/4)}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}\,(y-\pi/6)}{3} + \\ + \frac{1}{2}\Big(- \frac{\sqrt{2}\,(x-\pi/4)^2}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{2}\,(x-\pi/4)(y-\pi/6)}{3} + \frac{5\sqrt{6}\,(y-\pi/6)^2}{9}\Big), \end{aligned}$$

což s využitím rovností $44^\circ = \pi/4 - \pi/180$, $31^\circ = \pi/6 + \pi/180$ a aproximací $\sqrt{2} \doteq 1,4142$, $\sqrt{3} \doteq 1,7321$, $\pi \doteq 3,1416$ dává odhad $\frac{\cos 44^\circ}{\cos 31^\circ} \approx 0,8392168$. Pro úplnost dodejme, že přesná hodnota je $0,8392058351\ldots$ ▲

Příklad 3.4.24.

Pomocí Taylorova polynomu druhého řádu pro funkci tří proměnných se středem ve vhodném bodě určete přibližně hodnotu

$$\operatorname{arctg}\frac{1,1+0,1+0,01}{1,1-0,1+0,01}.$$

Řešení. Nejdříve si musíme stanovit vhodnou funkci f a střed Taylorovy řady. Ze stejných důvodu jako v případě výpočtu diferenciálu funkce je nejpřirozenější volba $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\frac{x+y+z}{x-y+z}$ a $[x_0,y_0,z_0] = [1,0,0]$. Nyní pro stanovení $T_2(x,y,z)$ potřebujeme určit a vyčíslit v bodě $[1,0,0]$ funkci f a její parciální derivace prvního i druhého řádu, tj.

$$\begin{gathered}
f(1,0,0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad f_x(x,y,z) = -\frac{2y}{(x-y+z)^2+(x+y+z)^2} \rightsquigarrow 0,\\
f_y(x,y,z) = \frac{x+z}{x^2+2xz+y^2+z^2} \rightsquigarrow 1, \quad f_z(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+2xz+y^2+z^2} \rightsquigarrow 0,\\
f_{xx}(x,y,z) = \frac{2y\,(x+z)}{(x+2xz+y^2+z^2)^2} \rightsquigarrow 0, \quad f_{xy}(x,y,z) = -\frac{(x+y+z)\,(x-y+z)}{(x+2xz+y^2+z^2)^2} \rightsquigarrow -1,\\
f_{xz}(x,y,z) = \frac{2y\,(x+z)}{(x+2xz+y^2+z^2)^2} \rightsquigarrow 0, \quad f_{yy}(x,y,z) = -\frac{2y\,(x+z)}{(x+2xz+y^2+z^2)^2} \rightsquigarrow 0,\\
f_{yz}(x,y,z) = -\frac{(x+y+z)\,(x-y+z)}{(x+2xz+y^2+z^2)^2} \rightsquigarrow -1, \quad f_{zz}(x,y,z) = \frac{2y\,(x+z)}{(x+2xz+y^2+z^2)^2} \rightsquigarrow 0.
\end{gathered}$$

Proto dostáváme (spojitost parciálních derivací v $[1,0,0]$ a nějakém jeho okolí je zřejmá)

$$\begin{aligned}
T_2(x,y,z) &= \frac{\pi}{4} + 0 + (y-0) + 0 + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\Big[0 - 2(x-1)\,(y-0) + 0 + 0 - 2(y-0)\,(z-0) + 0\Big] = \\
&= \frac{\pi}{4} + 2y - yx - yz,
\end{aligned}$$

což s využitím aproximace $\pi \doteq 3,1416$ dává odhad $f(11/10, 1/10, 1/100) \approx 0,8744$. Pro úplnost dodejme, že přesná hodnota je $0,8752457031\ldots$ ▲

III. 5. Lokální a globální extrémy funkcí více proměnných

Definice 3.5.1.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ *lokálního maxima (minima)*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(\boldsymbol{x}^*)$ bodu $\boldsymbol{x}^*$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{x}^*)$ platí $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}^*)$ $(f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^*))$.

Jsou-li nerovnosti ostré pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*$, mluvíme o *ostrých* lokálních maximech a minimech. Pro (ostrá) lokální maxima a minima se užívá jednotné označení *(ostrý) lokální extrém*.

Definice 3.5.2.

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ je *stacionárním bodem funkce* f, jestliže v bodě x^* existují všechny parciální derivace prvního řádu a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{pro } i = 1, \dots, n.$$

Věta 3.5.3.

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{x}^*$ lokální extrém a nechť v tomto bodě existují všechny parciální derivace prvního řádu funkce f. Pak bod $\boldsymbol{x}^*$ je stacionárním bodem funkce f.

Poznámka 3.5.4. Je zřejmé, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ může mít lokální extrém pouze ve stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna parciální derivace prvního řádu neexistuje.

Věta 3.5.5.

Nechť bod $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ je stacionárním bodem funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a nechť má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu. Jestliže platí

$$D(x_0, y_0) := f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 = \det \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} > 0,$$

pak má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ostrý lokální extrém. Je-li $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, jedná se o minimum, je-li $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, jedná se o maximum. V případě $D(x_0, y_0) < 0$ má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ sedlový bod, zatímco v případě $D(x_0, y_0) = 0$ nelze rozhodnout.

Poznámka 3.5.6. Zobecnění postačující podmínky z Věty 3.5.5 pro funkce n-proměnných je zprostředkováno tzv. *definitností Hessovy matice*:

(i) Nechť existují všechny parciální derivace funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, potom se čtvercová matice

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

nazývá *Hessovou maticí*. Pokud má funkce f v bodě $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ spojité smíšené parciální derivace, pak podle Věty 3.3.5 (ve formulaci pro funkce n proměnných) plyne, že matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ je v tomto bodě symetrická.

(ii) Máme-li matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, potom determinanty n-tice submatic

$$\begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se nazývají *vedoucí hlavní minory*.

Symetrická matice je *pozitivně definitní* právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla kladná ($\Leftrightarrow$ všechny vedoucí hlavní minory jsou kladné). Symetrická matice je *negativně definitní* právě tehdy, když všechna vlastní čísla jsou záporná ($\Leftrightarrow$ vedoucí hlavní minory střídají znaménka počínaje záporným).

(iii) Nechť bod $\boldsymbol{x}^*$ je stacionárním bode funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a nechť funkce f má v bodě $\boldsymbol{x}^*$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu. Je-li Hessova matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$ funkce f v bodě $\boldsymbol{x}^*$ pozitivně (negativně) definitní, pak funkce f má v bodě $\boldsymbol{x}^*$ ostré lokální minimum (maximum).

Definice 3.5.7.

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a množina $M \subseteq D(f)$ jsou dány. Řekneme, že bod $\boldsymbol{x}^* \in M$ je bodem *absolutního maxima* (nebo *minima*) funkce f na M, jestliže $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}^*)$ (nebo $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^*)$) pro každé $\boldsymbol{x} \in M$.

Věta 3.5.8 (*Weierstrassova věta*).

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá na kompaktní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak funkce f je na množině M ohraničená a nabývá zde své největší i nejmenší hodnoty (tj. existují čísla $\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{x}^* \in M$ taková, že $f(\boldsymbol{x}_*) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}^*)$ pro každé $\boldsymbol{x} \in M$).

Jak ale prakticky postupovat při hledání globálních extrémů?

Věta 3.5.9.

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina a funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Pak

f nabývá svých globálních extrémů buď v bodech lokálního extrému uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.

Příklad 3.5.1.

Určete Hessovu matici v bodě $[\mathrm{e}, 2]$ *pro funkci*

$$f(x, y) = x^y.$$

Řešení. Pro řešení úlohy musíme určit parciální derivace druhého řádu pro funkci f, tj.

$$f_x(x, y) = y\, x^{y-1}, \quad f_y(x, y) = x^y \ln x,$$
$$f_{xx}(x, y) = y\,(y-1)\, x^{y-2} \rightsquigarrow 2, \quad f_{xy}(x, y) = x^{y-1} + y\, x^{y-1} \ln x \rightsquigarrow 3\,\mathrm{e},$$
$$f_{yy}(x, y) = x^y \ln^2 x \rightsquigarrow \mathrm{e}^2\,.$$

Jelikož spojitost parciální derivace $f_{xy}(x, y)$ v bodě $[\mathrm{e}, 2]$ a nějakém jeho okolí je zřejmá, dostáváme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(\mathrm{e}, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 3\,\mathrm{e} \\ 3\,\mathrm{e} & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix}.$$

▲

Příklad 3.5.2.

Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y.$$

Řešení. Nejdříve vypočteme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = 2x - y - 2 = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = 2y - x + 1 = 0.$$

Tato soustava má jediné řešení $[1,0]$. Jelikož parciální derivace $f_x(x,y)$ a $f_y(x,y)$ existují pro všechny body $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, je nalezený bod jediným kandidátem na lokální extrém. Nyní pomocí Hessovy matice rozhodneme, zda v tomto bodě skutečně nastává lokální extrém (a případně určíme jeho druh). Parciální derivace druhého řádu jsou

$$f_{xx}(x,y) = 2, \quad f_{xy}(x,y) = -1, \quad f_{yy}(x,y) = 2,$$

takže Hessova matice je konstantní a platí

$$\nabla^2 f(x,y) \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Protože tato matice je pozitivně definitní (oba vedoucí hlavní minory jsou kladné), je bod $[1,0]$ bodem lokálního minima funkce f s hodnotou $f(1,0) = -1$. ▲

Příklad 3.5.3.

Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \ln xy - 4x - 9y.$$

Řešení. Nejdříve vypočteme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x} - 4 = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = \frac{1}{y} - 9 = 0.$$

Odtud okamžitě dostáváme stacionární bod $[1/4, 1/9]$. Protože parciální derivace $f_x(x,y)$ a $f_y(x,y)$ existují pro všechny body $[x,y] \in D(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$, je nalezený bod jediným kandidátem na lokální extrém. Nyní pomocí Hessovy matice rozhodneme, zda v tomto bodě skutečně nastává lokální extrém (a případně určíme jeho druh). Parciální derivace druhého řádu jsou

$$f_{xx}(x,y) = -1/x^2, \quad f_{xy}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = -1/y^2,$$

takže v bodě $[1/4, 1/9]$ dostáváme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(1/4, 1/9) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -81 \end{pmatrix}.$$

Tato matice je negativně definitní, takže v bodě $[1/4, 1/9]$ nastává lokální maximum s hodnotou $f(1/4, 1/9) = -2 - \ln 36$. ▲

Příklad 3.5.4.

Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = xy\,(4 - x - y).$$

Řešení. Nejdříve vypočteme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = y\,(4 - 2x - y) = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = x\,(4 - x - 2y) = 0.$$

Tato soustava má čtyři řešení $[0,0]$, $[0,4]$, $[4,0]$ a $[4/3,4/3]$, které postupně získáme podle toho zda $x = 0$ nebo $4 - 2x - y$ a současně $x = 0$ nebo $4 - x - 2y = 0$. Protože parciální derivace $f_x(x,y)$ a $f_y(x,y)$ existují pro všechny body $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, jsou nalezené body jedinými kandidáty na lokální extrém. Nyní pomocí Hessovy matice rozhodneme, zda v některém z nich nastává lokální extrém (a případně určíme jeho druh). Parciální derivace druhého řádu jsou

$$f_{xx}(x,y) = -2y, \quad f_{xy}(x,y) = 4 - 2x - 2y, \quad f_{yy}(x,y) = -2x.$$

V bodě $[0,0]$ máme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

která je indefinitní, takže v tomto bodě extrém nenastává.

V bodě $[0,4]$ máme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(0,4) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

která je také indefinitní, takže ani v tomto bodě extrém nenastává.

V bodě $[4,0]$ máme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(4,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix},$$

která je opět indefinitní, takže ani v tomto bodě extrém nenastává.

Konečně v bodě $[4/3,4/3]$ máme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(4/3,4/3) = \begin{pmatrix} -8/3 & -4/3 \\ -4/3 & -8/3 \end{pmatrix},$$

která je negativně definitní, takže v tomto bodě nastává lokální maximum s hodnotou $f(4/3,4/3) = 64/27$. ▲

Příklad 3.5.5.

Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}(x^2+y^2).$$

Řešení. Nejdříve vypočteme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}(x^2+2x+y^2) = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}(x^2+2y+y^2) = 0.$$

Jelikož exponenciální funkce nabývá pouze kladných hodnot je předchozí soustava ekvivalentní s

$$x^2+2x+y^2 = 0 \quad \& \quad x^2+2y+y^2 = 0.$$

Odečtením obou rovnic dostaneme $x = y$, z čehož zpětným dosazením získáme dva stacionární body $[0,0]$ a $[-1,-1]$. Protože parciální derivace $f_x(x,y)$ a $f_y(x,y)$ existují pro všechny body $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, jsou nalezené body jedinými kandidáty na lokální extrém. Nyní pomocí Hessovy matice rozhodneme, zda v některém z nich nastává lokální extrém (a případně určíme jeho druh). Parciální derivace druhého řádu jsou

$$f_{xx}(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}(x^2+4x+y^2+2), \quad f_{xy}(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}(x^2+2x+2y+y^2),$$
$$f_{yy}(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}(x^2+4y+y^2+2).$$

V bodě $[0,0]$ máme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která je pozitivně definitní, takže v bodě $[0,0]$ je lokální minimum s hodnotou $f(0,0) = 0$.

V bodě $[-1,-1]$ máme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2\,\mathrm{e}^{-2} \\ -2\,\mathrm{e}^{-2} & 0 \end{pmatrix},$$

která je indefinitní, takže v tomto bodě extrém nenastává. ▲

Příklad 3.5.6.

Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = 4x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

Řešení. Nejdříve vypočteme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = 4 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = -1 + \frac{1}{y^2} = 0.$$

První rovnost je splněna v případě, že $x = \pm 1/2$, zatímco druhá rovnost platí pro $y = \pm 1$. Odtud dostáváme čtyři stacionární body $[1/2, 1]$, $[1/2, -1]$, $[-1/2, 1]$ a $[-1/2, -1]$. Protože parciální derivace $f_x(x,y)$ a $f_y(x,y)$ existují pro všechny body $[x,y] \in D(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ a } y \neq 0\}$, jsou nalezené body jedinými kandidáty na lokální extrém. Nyní pomocí Hessovy matice rozhodneme, zda v některém z nich nastává lokální extrém (a případně určíme jeho druh). Parciální derivace druhého řádu jsou

$$f_{xx}(x,y) = 2/x^3, \quad f_{xy}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = -2/y^3.$$

V bodě $[1/2, 1]$ máme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(1/2, 1) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

která je indefinitní, takže v tomto bodě extrém nenastává.

V bodě $[1/2, -1]$ máme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(1/2, -1) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která je pozitivně definitní, takže v tomto bodě nastává lokální minimum s hodnotou $f(1/2, -1) = 6$.

V bodě $[-1/2, 1]$ máme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(-1/2, 1) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

která je negativně definitní, takže v tomto bodě má funkce f lokální maximum s hodnotou $f(-1/2, 1) = -6$.

Konečně v bodě $[-1/2, -1]$ máme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(-1/2, -1) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která je indefinitní, takže v tomto bodě extrém nenastává. ▲

Příklad 3.5.7.

Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,.$$

Řešení. Nejdříve vypočteme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2-2) = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = -2y\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2-3) = 0.$$

Protože exponenciální funkce je vždy kladná, máme pouze čtyři možnosti:

(i) $x = 0$ a $y = 0$, tj. máme stacionární bod $[0,0]$;

(ii) $x = 0$ a $2x^2 + 3y^2 - 2 = 0$, což po dosazení $x = 0$ do druhé rovnice ihned dává stacionární body $[0,-1]$ a $[0,1]$;

(iii) $2x^2 + 3y^2 - 3 = 0$ a $y = 0$, což po dosazení $y = 0$ do první rovnice dává stacionární body $[-1,0]$ a $[1,0]$;

(iv) a konečně $2x^2 + 3y^2 - 3 = 0$ a $2x^2 + 3y^2 - 2 = 0$, což po odečtení rovnic dává $1 = 0$, tj. v tomto případě žádný nový stacionární bod nedostaneme.

Nyní pomocí Hessovy matice rozhodneme, zda v některém z těchto bodů nastává lokální extrém (a případně určíme jeho druh). Parciální derivace druhého řádu jsou

$$\begin{gathered}
f_{xx}(x,y) = 2\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(4x^4 - 6x^2y^2 - 10x^2 - 3y^2 + 2),\\
f_{xy}(x,y) = 4xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2 - 5),\\
f_{yy}(x,y) = 2\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(4x^2y^2 + 6y^4 - 2x^2 - 15y^2 + 3).
\end{gathered}$$

V bodě $[0,0]$ máme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

která je pozitivně definitní, takže v tomto bodě nastává lokální minimum s hodnotou $f(0,0) = 0$.

V bodech $[-1,0]$ a $[1,0]$ máme tutéž Hessovu matici

$$\nabla^2 f(-1,0) = \nabla^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} -8/\,\mathrm{e} & 0 \\ 0 & 2/\,\mathrm{e} \end{pmatrix},$$

která je indefinitní, takže v těchto bodech lokální extrém nenastává.

V bodech $[0,-1]$ a $[0,1]$ máme také tutéž Hessovu matici

$$\nabla^2 f(0,-1) = \nabla^2 f(0,1) = \begin{pmatrix} -2/\,\mathrm{e} & 0 \\ 0 & -12/\,\mathrm{e} \end{pmatrix},$$

která je negativně definitní, takže v těchto bodech nastává lokální maximum s hodnotou $f(0,-1) = f(0,1) = 3\,\mathrm{e}^{-1}$. ▲

Příklad 3.5.8.

Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z},$$

přičemž se omezíme pouze na $x, y, z > 0$.

Řešení. Nejdříve vypočteme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y,z) = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \quad \& \quad f_y(x,y,z) = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \quad \& \quad f_z(x,y,z) = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0.$$

Tato soustava je ekvivalentní s

$$4x^2 - y^2 = 0 \quad \& \quad y^3 - 2xz^2 = 0 \quad \& \quad 2z^3 - 2y = 0.$$

Jelikož uvažujeme pouze $x, y, z > 0$, dostáváme z poslední rovnosti $y = z^3$, což po dosazení do první rovnice dává $2x = z^3$. Potom ze druhé rovnice máme $z^9 - z^5 = z^5(z^4 - 1) = 0$, z čehož plyne $z = 1$. Takže máme stacionární bod $[1/2, 1, 1]$. Protože parciální derivace $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$ a $f_z(x,y,z)$ existují pro všechny body $[x,y,z] \in D(f) = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0 \text{ a } z > 0\}$, je nalezený bod jediným kandidátem na lokální extrém na uvažované množině. Nyní pomocí Hessovy matice rozhodneme, zda v tomto bodě nastává lokální extrém (a případně určíme jeho druh). Parciální derivace druhého řádu jsou

$$\begin{gathered} f_{xx}(x,y,z) = \frac{y^2}{2x^3}, \quad f_{xy}(x,y,z) = -\frac{y}{2x^2}, \quad f_{xz}(x,y,z) = 0, \\ f_{yy}(x,y,z) = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}, \quad f_{yz}(x,y,z) = -\frac{2z}{y^2}, \quad f_{zz}(x,y,z) = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}. \end{gathered}$$

Takže v bodě $[1/2, 1, 1]$ máme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(1/2, 1, 1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Jelikož všechny vedoucí hlavní minory jsou kladné, je tato matice pozitivně definitní. Proto má funkce f v bodě $[1/2, 1, 1]$ lokální minimum s hodnotou $f(1/2, 1, 1) = 4$. ▲

Příklad 3.5.9.

Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Řešení. Nejdříve vypočteme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y,z) = 3x^2 + 12y = 0 \quad \& \quad f_y(x,y,z) = 2y + 12x = 0 \quad \& \quad f_z(x,y,z) = 2z + 2 = 0.$$

Z poslední rovnice dostáváme $z = -1$, zatímco odečtením šestinásobku druhé rovnice od první rovnice obdržíme $x^2 - 24x = x(x-24) = 0$. Takže máme dva stacionární body $[0,0,-1]$ a $[24,-144,-1]$. Protože parciální derivace $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$ a $f_z(x,y,z)$ existují pro všechny body $[x,y,z] \in \mathbb{R}^3$, jsou nalezené body jedinými kandidáty na lokální extrémy. Nyní pomocí Hessovy matice rozhodneme, zda v některém z nich nastává lokální extrém (a případně určíme jeho druh). Parciální derivace druhého řádu jsou

$$f_{xx}(x,y,z) = 6x, \quad f_{xy}(x,y,z) = 12, \quad f_{xz}(x,y,z) = 0,$$
$$f_{yy}(x,y,z) = 2, \quad f_{yz}(x,y,z) = 0, \quad f_{zz}(x,y,z) = 2.$$

V bodě $[0,0,-1]$ máme tedy Hessovu matici

$$\nabla^2 f(0,0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která je indefinitní (vyzkoušejte např. vektory $(1,1,0)^\top$ a $(1,-1,0)^\top$), tj. v bodě $[0,0,-1]$ nenastává extrém.

V bodě $[24,-144,-1]$ máme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(0,0,-1) = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která je pozitivně definitní. Takže funkce f má v bodě $[24,-144,-1]$ lokální minimum s hodnotou $f(24,-144,-1) = -6913$. ▲

Příklad 3.5.10.

Pro $a, x, y, z > 0$ určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = xyz\,(4a - x - y - z).$$

Řešení. Nejdříve vypočteme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y,z) = yz\,(4a - 2x - y - z) = 0 \quad \& \quad f_y(x,y,z) = xz\,(4a - x - 2y - z) = 0$$
$$\& \quad f_z(x,y,z) = xy\,(4a - x - y - 2z) = 0.$$

Vzhledem k předpokladu $x, y, z > 0$ se předchozí soustava redukuje na systém

$$4a - 2x - y - z = 0 \quad \& \quad 4a - x - 2y - z = 0 \quad \& \quad 4a - x - y - 2z = 0,$$

jehož jediným řešením je bod $[a, a, a]$. Nyní pomocí Hessovy matice rozhodneme, zda v tomto bodě lokální extrém (a případně určíme jeho druh). Parciální derivace druhého řádu jsou

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y,z) &= -2yz, \quad f_{xy}(x,y,z) = z\,(4a - 2x - 2y - z),\\
f_{xz}(x,y,z) &= y\,(4a - 2x - y - 2z), \quad f_{yy}(x,y,z) = -2xz,\\
f_{yz}(x,y,z) &= x\,(4a - x - 2y - 2z), \quad f_{zz}(x,y,z) = -2xy.
\end{aligned}$$

V bodě $[a, a, a]$ máme tedy Hessovu matici

$$\nabla^2 f(a,a,a) = \begin{pmatrix} -2a^2 & -a^2 & -a^2 \\ -a^2 & -2a^2 & -a^2 \\ -a^2 & -a^2 & -2a^2 \end{pmatrix},$$

která je negativně definitní. Takže funkce f má v bodě $[a, a, a]$ lokální maximum s hodnotou $f(a, a, a) = a^4$. ▲

Příklad 3.5.11.

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

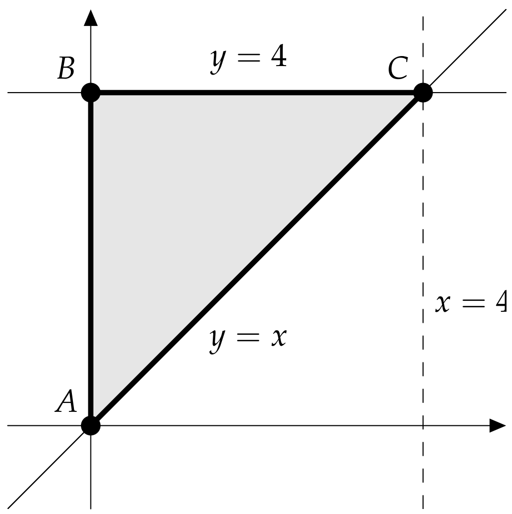
$$f(x,y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$$

na množině na množině M, která je určena nerovnostmi $0 \le x \le y \le 4$.

Řešení. Protože množina M je kompaktní a funkce f je na této množině spojitá, hledané body existují. Nejdříve určíme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = 2x - 1 = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = -6y + 18 = 0.$$

Řešením je bod $[1/2, 3]$ s funkční hodnotou $f(1/2, 3) = 123/4$. Protože $[1/2, 3] \in M$, je tento bod jedním z kandidátů na hledaný globální extrém (nicméně není potřeba určovat jeho lokální charakter).



Obrázek 3.5.42: Množina M z Příkladu 3.5.11.

Nyní se zaměříme na hranici množiny M (viz Obrázek 3.5.42), kterou tvoří tři úsečky:

(i) Úsečku spojující body A a B lze vyjádřit jako $x = 0$ pro $0 \le y \le 4$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $g(y) = -3y^2 + 18y + 4$. Určíme stacionární body funkce g, tj. $g'(y) = -6y + 18 = 0$. Odtud máme $y = 3$, což vyhovuje omezení pro y. Proto $[0,3]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(0,3) = 31$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body této úsečky, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(A) = f(0,0) = 4$ a $f(B) = f(0,4) = 28$.

(ii) Úsečku spojující body B a C lze vyjádřit jako $y = 4$ pro $0 \le x \le 4$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $h(x) = x^2 - x + 28$. Určíme stacionární body funkce h, tj. $h'(x) = 2x - 1 = 0$. Odtud máme $x = 1/2$, což vyhovuje omezení pro x. Proto

$[1/2, 4]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(1/2, 4) = 111/4$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body této úsečky, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(B) = f(0, 4) = 28$ a $f(C) = f(4, 4) = 40$.

(ii) Úsečku spojující body C a A lze vyjádřit jako $y = x$ pro $0 \leq x \leq 4$, takže z funkce $f(x, y)$ dostaneme funkci $m(x) = -2x^2 + 17x + 4$. Určíme stacionární body funkce m, tj. $m'(x) = -4x + 17 = 0$. Odtud máme $x = 17/4$, což nevyhovuje omezení pro x, tj. $[17/4, 17/4] \notin M$. Takže v tomto případě jsou kandidáty pouze krajní body této úsečky, v nichž vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(C) = f(4, 4) = 40$ a $f(A) = f(0, 0) = 4$.

Celkem jsme nalezli 6 kandidátů na globální extrém, ze kterých stačí vybrat ten s nejmenší funkční hodnotou a ten s největší funkční hodnotou, tj. globální minimum nastává v bodě $[0, 0]$ s hodnotou $f_{\text{min}} = 4$ a globální maximum v bodě $[4, 4]$ s hodnotou $f_{\text{max}} = 40$. ▲

Příklad 3.5.12.

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

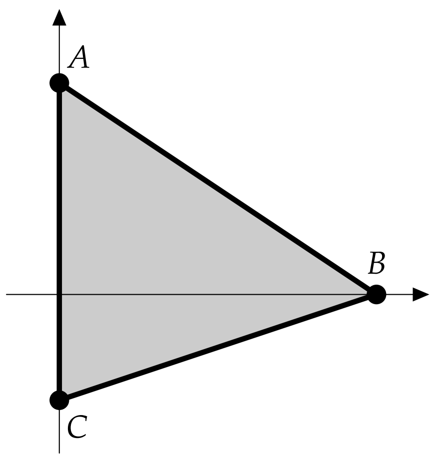
$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

na množině M, kterou je trojúhelník vymezený body $A = [0,2]$, $B = [3,0]$, $C = [0,-1]$.

Řešení. Protože množina M je kompaktní a funkce f je na této množině spojitá, hledané body existují. Nejdříve určíme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = 2x + 2y - 3 = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = 2x + 4y - 5 = 0.$$

Řešením je pouze bod $[1/2, 1]$ s funkční hodnotou $f(1/2, 1) = -13/4$. Protože $[1/2, 1] \in M$, je tento bod jedním z kandidátů na hledaný globální extrém (nicméně není potřeba určovat jeho lokální charakter).



Obrázek 3.5.43: Množina M z Příkladu 3.5.12.

Nyní se zaměříme na hranici množiny M (viz Obrázek 3.5.43), kterou tvoří tři úsečky:

(i) Přímku spojující body A a C můžeme popsat jako $x = 0$ a $-1 \leq y \leq 2$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $g(y) = 2y^2 - 5y$. Určíme stacionární body funkce g, tj. $g'(y) = 4y - 5 = 0$. Odtud máme $y = 5/4$, což vyhovuje omezení pro y. Proto $[0, 5/4]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(0, 5/4) = -25/8$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body úsečky AC, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(A) = f(0,2) = -2$ a $f(C) = f(0,-1) = 7$.

(ii) Přímku spojující body A a B můžeme popsat jako $y = -2x/3 + 2$ (rovnice přímky je $y = ax + b$ a koeficienty a, b získáme dosazením souřadnic bodů A a B) a $0 \leq x \leq 3$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $h(x) = 5x^2/9 - x - 2$. Určíme stacionární

body funkce h, tj. $h'(x) = 10x/9 - 1 = 0$. Máme $x = 9/10$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[9/10, 7/5]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(9/10, 7/5) = -49/20$. Ještě musíme spočítat funkční hodnoty v krajních bodech úsečky AB, tj. $f(A) = f(0,2) = -2$ a $f(B) = f(3,0) = 0$.

(iii) Přímku spojující body B a C můžeme popsat jako $y = x/3 - 1$ (rovnice přímky je $y = ax + b$ a koeficienty a, b získáme dosazením souřadnic bodů B a C) a $0 \leq x \leq 3$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $m(x) = 17x^2/9 - 8x + 7$. Určíme stacionární body funkce m, tj. $m'(x) = 34x/9 - 8 = 0$. Máme $x = 36/17$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[36/17, -5/17]$ je dalším kandidátem na globální extrém s funkční hodnotou $f(36/17, -5/17) = -25/17$. Ještě zbývá spočítat funkční hodnoty v krajních bodech úsečky BC, tj. $f(B) = f(3,0) = 0$ a $f(C) = f(0,-1) = 7$.

Celkem jsme nalezli 7 kandidátů na globální extrém, ze kterých stačí vybrat ten s nejmenší funkční hodnotou a ten s největší funkční hodnotou, tj. globální minimum nastává v bodě $[1/2, 1]$ s hodnotou $f_{\min} = -13/4$ a globální maximum v bodě $C = [0, -1]$ s hodnotou $f_{\max} = 7$. ▲

Příklad 3.5.13.

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

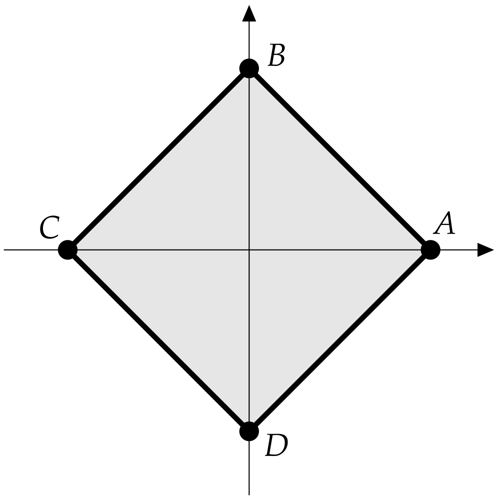
$$f(x,y) = (x-y)^2 + x^2$$

na čtverci s vrcholy $A = [2,0]$, $B = [0,2]$, $C = [-2,0]$ *a* $D = [0,-2]$.

Řešení. Protože množina M je kompaktní a funkce f je na této množině spojitá, hledané body existují. Nejdříve určíme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = 4x - 2y = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = -2x + 2y = 0.$$

Řešením je pouze bod $[0,0]$ s funkční hodnotou $f(0,0) = 0$. Protože $[0,0] \in M$, je tento bod jedním z kandidátů na hledaný globální extrém (nicméně není potřeba určovat jeho lokální charakter).



Obrázek 3.5.44: Množina M z Příkladu 3.5.13.

Nyní se zaměříme na hranici množiny M (viz Obrázek 3.5.44), kterou tvoří čtyři úsečky:

(i) Úsečku spojující body A a B lze vyjádřit jako $y = 2 - x$ pro $0 \leq x \leq 2$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $g(x) = (2x-2)^2 + x^2$. Určíme stacionární body funkce g, tj. $g'(x) = 10x - 8 = 0$. Odtud máme $x = 4/5$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[4/5, 6/5]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(4/5, 6/5) = 4/5$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body této úsečky, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(A) = f(2,0) = 8$ a $f(B) = f(0,2) = 4$.

(ii) Úsečku spojující body B a C lze vyjádřit jako $y = x + 2$ pro $-2 \leq x \leq 0$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $h(x) = 4 + x^2$. Určíme stacionární body funkce g, tj. $g'(x) = 2x = 0$. Odtud máme $x = 0$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[0,2]$ je

dalším kandidátem na globální extrém, který je ale totožný s bodem B, jehož funkční hodnotu jsme vypočítali v předchozí části. Ještě zbývá určit funkční hodnotu ve druhém krajním bodě úsečky, tj. $f(C) = f(-2,0) = 8$.

(iii) Úsečku spojující body C a D lze vyjádřit jako $y = -x - 2$ pro $-2 \leq x \leq 0$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $m(x) = (2x+2)^2 + x^2$. Určíme stacionární body funkce m, tj. $m'(x) = 10x + 8 = 0$. Odtud máme $x = -4/5$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[-4/5, -6/5]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(-4/5, -6/5) = 4/5$. Ještě vypočteme funkční hodnotu ve druhém krajním bodě úsečky, tj. $f(D) = f(0,-2) = 4$.

(iv) Úsečku spojující body D a A lze vyjádřit jako $y = x - 2$ pro $0 \leq x \leq 2$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $n(x) = 4 + x^2$. Určíme stacionární body funkce n, tj. $n'(x) = 2x = 0$. Odtud máme $x = 0$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[0,-2]$ je dalším kandidátem na globální extrém, který je ale totožný s bodem D, jehož funkční hodnotu jsme vypočítali v předchozí části stejně jako funkční hodnotu ve druhém krajním bodě úsečky.

Celkem jsme nalezli 7 kandidátů na globální extrém. Nyní stačí vybrat ten s nejmenší funkční hodnotou a ten s největší funkční hodnotou, tj. globální minimum nastává v bodě $[0,0]$ s hodnotou $f_{\min} = 0$ a globální maximum v bodech $[2,0]$ a $[-2,0]$ s hodnotou $f_{\max} = 8$. ▲

Příklad 3.5.14.

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

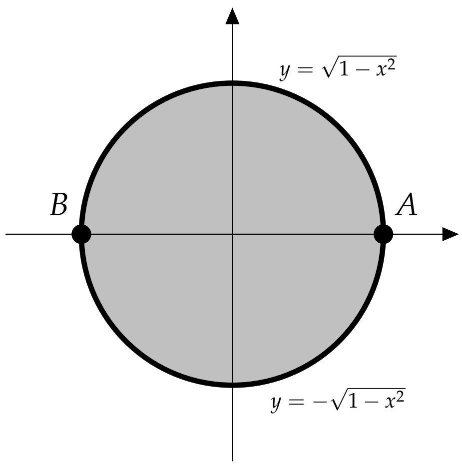
$$f(x,y) = 4y$$

na množině $M := \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Řešení. Protože množina M je kompaktní a funkce f je na této množině spojitá, hledané body existují. Nejdříve určíme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = 0 = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = 4 = 0.$$

Tato soustava ale nemá řešení, takže funkce nemá stacionární body, a tudíž nemůže mít ani lokální extrémy.



Obrázek 3.5.45: Množina M z Příkladu 3.5.14.

Nyní se zaměříme na hranici množiny M (viz Obrázek 3.5.45), kterou tvoří dva oblouky kružnice:

(i) Horní oblouk kružnice můžeme vyjádřit jako $y = \sqrt{1-x^2}$ pro $-1 \leq x \leq 1$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $g(x) = 4\sqrt{1-x^2}$. Určíme stacionární body funkce g, tj. $g'(x) = -4x/\sqrt{1-x^2} = 0$. Odtud máme $x = 0$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[0,1]$ je prvním kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(0,1) = 4$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body oblouku, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(A) = f(1,0) = 0$ a $f(B) = f(-1,0) = 0$.

(ii) Dolní oblouk kružnice můžeme vyjádřit jako $y = -\sqrt{1-x^2}$ pro $-1 \leq x \leq 1$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $h(x) = -4\sqrt{1-x^2}$. Určíme stacionární body funkce h, tj. $g'(x) = 4x/\sqrt{1-x^2} = 0$. Odtud máme $x = 0$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[0,-1]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(0,-1) = -4$.

Dalšími kandidáty jsou také krajní body oblouku, které jsou ale stejné jako v předchozí části, takže máme příslušné funkční hodnoty již vypočtené.

Celkem jsme nalezli 4 kandidáty na globální extrém. Nyní stačí vybrat ten s nejmenší funkční hodnotou a ten s největší funkční hodnotou, tj. globální minimum nastává v bodě $[0, -1]$ s hodnotou $f_{\min} = -4$ a globální maximum v bodě $[0, 1]$ s hodnotou $f_{\max} = 4$. ▲

Příklad 3.5.15.

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

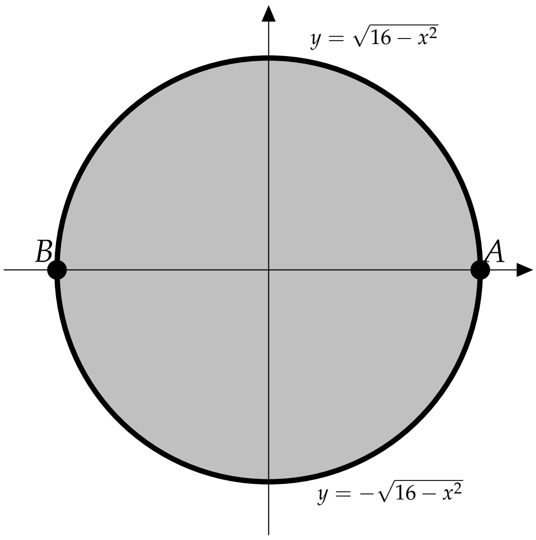
$$f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2y$$

na množině $M := \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$.

Řešení. Protože množina M je kompaktní a funkce f je na této množině spojitá, hledané body existují. Nejdříve určíme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = -2x = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = -2y + 2 = 0.$$

Řešením je pouze bod $[0,1]$ s funkční hodnotou $f(0,1) = 1$. Protože $[0,1] \in M$, je tento bod jedním z kandidátů na hledaný globální extrém (nicméně není potřeba určovat jeho lokální charakter).



Obrázek 3.5.46: Množina M z Příkladu 3.5.15.

Nyní se zaměříme na hranici množiny M (viz Obrázek 3.5.46), kterou tvoří dva oblouky kružnice:

(i) Horní oblouk kružnice můžeme vyjádřit jako $y = \sqrt{16 - x^2}$ pro $-4 \leq x \leq 4$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $g(x) = 2\sqrt{16 - x^2} - 16$. Určíme stacionární body funkce g, tj. $g'(x) = -2x/\sqrt{16 - x^2} = 0$. Odtud máme $x = 0$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[0,4]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(0,4) = -8$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body oblouku, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(A) = f(4,0) = -16$ a $f(B) = f(-4,0) = -16$.

(ii) Dolní oblouk kružnice můžeme vyjádřit jako $y = -\sqrt{16 - x^2}$ pro $-4 \leq x \leq 4$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $h(x) = -2\sqrt{16 - x^2} - 16$. Určíme stacionární body

funkce h, tj. $g'(x) = 2x/\sqrt{16 - x^2} = 0$. Odtud máme $x = 0$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[0, -4]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(0, -4) = -24$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body oblouku, které jsou ale stejné jako v předchozí části, takže máme příslušné funkční hodnoty již vypočtené.

Celkem jsme nalezli 5 kandidátů na globální extrém. Nyní stačí vybrat ten s nejmenší funkční hodnotou a ten s největší funkční hodnotou, tj. globální minimum nastává v bodě $[0, -4]$ s hodnotou $f_{\min} = -24$ a globální maximum v bodě $[0, 1]$ s hodnotou $f_{\max} = 1$. ▲

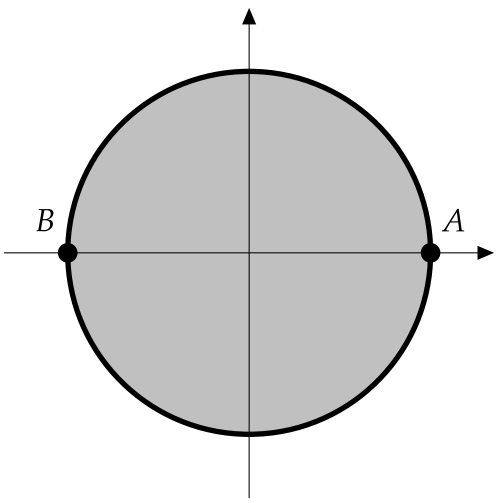
Příklad 3.5.16.

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

na množině $M := \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Řešení. Protože množina M je kompaktní a funkce f je na této množině spojitá, hledané body existují. Stacionární body jsme již vypočítali v Příkladu 3.5.7. Nalezli jsme body $[0,0]$, $[-1,0]$, $[1,0]$, $[0,1]$ a $[0,-1]$ s hodnotami $f(0,0) = 0$ a $f(0,-1) = f(0,1) = 3\,\mathrm{e}^{-1}$, přičemž body $[-1,0]$ a $[1,0]$ můžeme z našich dalších úvah vyloučit, neboť v nich lokální (a tudíž nutně ani globální) extrém nenastal.



Obrázek 3.5.47: Množina M z Příkladu 3.5.16.

Nyní se zaměříme na hranici množiny M (viz Obrázek 3.5.47), kterou tvoří dva oblouky kružnice:

(i) Horní oblouk kružnice můžeme vyjádřit jako $y = \sqrt{4-x^2}$ pro $-2 \leq x \leq 2$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $g(x) = (12 - x^2)\,\mathrm{e}^{-4}$. Určíme stacionární body funkce g, tj. $g'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-4} = 0$. Odtud máme $x = 0$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[0,2]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(0,2) = 12\,\mathrm{e}^{-4}$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body oblouku, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(A) = f(2,0) = 8\,\mathrm{e}^{-4}$ a $f(B) = f(-2,0) = 8\,\mathrm{e}^{-4}$.

(ii) Dolní oblouk kružnice můžeme vyjádřit jako $y = -\sqrt{4-x^2}$ pro $-2 \leq x \leq 2$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $h(x) = (12 - x^2)\,\mathrm{e}^{-4}$. Určíme stacionární body funkce h, tj. $h'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-4} = 0$. Odtud máme $x = 0$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[0,-2]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(0,-2) = 12\,\mathrm{e}^{-4}$.

Dalšími kandidáty jsou také krajní body oblouku, které jsou ale stejné jako v předchozí části, takže máme příslušné funkční hodnoty již vypočtené. (Poznamenejme, že v tomto speciálním případě jsme si mohli zjednodušit práci přímo dosazením $y^2 = 4 - x^2$ do funkce f, protože proměnná y se ve objevuje pouze v sudých mocninách.)

Celkem jsme nalezli 7 kandidátů na globální extrém. Nyní stačí vybrat ten s nejmenší funkční hodnotou a ten s největší funkční hodnotou, tj. globální minimum nastává v bodě $[0, 0]$ s hodnotou $f_{\min} = 0$ a globální maximum v bodech $[0, 1]$ a $[0, -1]$ s hodnotou $f_{\max} = 3\,\mathrm{e}^{-1}$ (tj. v bodech lokálních extrémů). ▲

Příklad 3.5.17.

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

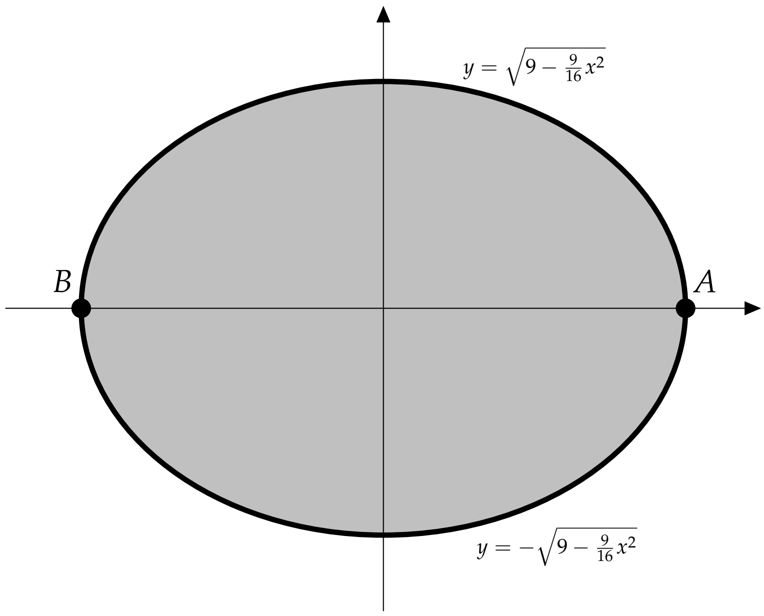
$$f(x,y) = 9x^2 - 36x + 16y^2 - 64y$$

na množině $M := \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + 16y^2 \leq 144\}$.

Řešení. Protože množina M je kompaktní a funkce f je na této množině spojitá, hledané body existují. Nejdříve určíme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = 18x - 36 = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = 32y - 64 = 0.$$

Řešením je pouze bod $[2,2]$ s funkční hodnotou $f(2,2) = -100$. Protože $[2,2] \in M$, je tento bod jedním z kandidátů na hledaný globální extrém (nicméně není potřeba určovat jeho lokální charakter).



Obrázek 3.5.48: Množina M z Příkladu 3.5.17.

Nyní se zaměříme na hranici množiny M (viz Obrázek 3.5.48), kterou tvoří dva oblouky elipsy:

(i) Horní oblouk elipsy můžeme vyjádřit jako $y = \sqrt{9 - \frac{9}{16}x^2}$ pro $-4 \leq x \leq 4$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $g(x) = -48\sqrt{16 - x^2} - 36x + 144$. Určíme stacionární body funkce g, tj. $g'(x) = 48x/\sqrt{16 - x^2} - 36 = 0$. Umocněním obou stran na druhou získáme rovnost $x^2 = 144/25$, tj. $x = \pm 12/5$. Obě hodnoty vyhovují omezení pro x. Proto $[12/5, 12/5]$ a $[-12/5, 12/5]$ jsou dalšími kandidáty na globální extrém s hodnotami $f(12/5, 12/5) = -96$ a $f(-12/5, 12/5) = 384/5$. Dalšími kandidáty

jsou také krajní body oblouku, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(A) = f(4,0) = 0$ a $f(B) = f(-4,0) = 288$.

(ii) Dolní oblouk elipsy můžeme vyjádřit jako $y = -\sqrt{9 - \frac{9}{16}x^2}$ pro $-4 \leq x \leq 4$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $h(x) = 48\sqrt{16 - x^2} - 36x + 144$. Určíme stacionární body funkce h, tj. $g'(x) = -48x/\sqrt{16 - x^2} - 36 = 0$. Umocněním obou stran na druhou získáme rovnost $x^2 = 144/25$, tj. $x = \pm 12/5$. Obě hodnoty vyhovují omezení pro x. Proto $[12/5, -12/5]$ a $[-12/5, -12/5]$ jsou dalšími kandidáty na globální extrém s hodnotami $f(12/5, -12/5) = 1056/5$ a $f(-12/5, -12/5) = 384$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body oblouku, které jsou ale stejné jako v předchozí části, takže máme příslušné funkční hodnoty již vypočtené.

Celkem jsme nalezli 7 kandidátů na globální extrém. Nyní stačí vybrat ten s nejmenší funkční hodnotou a ten s největší funkční hodnotou, tj. globální minimum nastává v bodě $[2,2]$ s hodnotou $f_{\min} = -100$ a globální maximum v bodě $[-12/5, -12/5]$ s hodnotou $f_{\max} = 384$. ▲

Příklad 3.5.18.

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

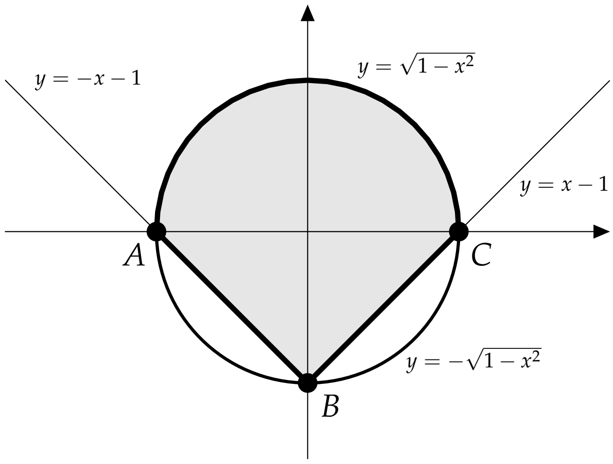
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2$$

na množině $M := \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq |x| - 1\}$.

Řešení. Protože množina M je kompaktní a funkce f je na této množině spojitá, hledané body existují. Nejdříve určíme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = 2x - y = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = 2y - x = 0.$$

Řešením je pouze bod $[0,0]$ s funkční hodnotou $f(0,0) = -2$. Protože $[0,0] \in M$, je tento bod jedním z kandidátů na hledaný globální extrém (nicméně není potřeba určovat jeho lokální charakter).



Obrázek 3.5.49: Množina M z Příkladu 3.5.18.

Nyní se zaměříme na hranici množiny M (viz Obrázek 3.5.49), kterou tvoří dvě úsečky a půlkružnice:

(i) Úsečku spojující body A a B lze vyjádřit jako $y = -x - 1$ pro $-1 \leq x \leq 0$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $g(x) = 3x^2 + 3x - 1$. Určíme stacionární body funkce g, tj. $g'(x) = 6x + 3 = 0$. Odtud máme $x = -1/2$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[-1/2, -1/2]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(-1/2, -1/2) = -7/4$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body této úsečky, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(A) = f(-1,0) = -1$ a $f(B) = f(0,-1) = -1$.

(ii) Úsečku spojující body B a C lze vyjádřit jako $y = x - 1$ pro $0 \leq x \leq 1$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $h(x) = x^2 - x - 1$. Určíme stacionární body funkce h, tj.

$h'(x) = 2x - 1 = 0$. Odtud máme $x = 1/2$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[1/2, -1/2]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(1/2, -1/2) = -5/4$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body této úsečky, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(B) = f(0, -1) = -1$ a $f(C) = f(1, 0) = -1$.

(iii) Oblouk půlkružnice spojující body A a B můžeme popsat jako $y = \sqrt{1 - x^2}$ pro $-1 \leq x \leq 1$, takže z funkce $f(x, y)$ dostaneme funkci $m(x) = -x\sqrt{1 - x^2} - 1$. Určíme stacionární body funkce m, tj.

$$h'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} - \sqrt{1 - x^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 1 - x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}.$$

Odtud dostáváme $x = \pm 1/\sqrt{2}$, což v obou případech vyhovuje omezení pro x. Proto $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ a $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ jsou dalšími kandidáty na globální extrém s hodnotami $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -3/2$ a $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -1/2$. Ještě musíme spočítat funkční hodnoty v krajních bodech oblouku, tj. $f(A) = f(-1, 0) = -1$ a $f(C) = f(1, 0) = -1$.

Celkem jsme nalezli 8 kandidátů na globální extrém. Nyní stačí vybrat ten s nejmenší funkční hodnotou a ten s největší funkční hodnotou, tj. globální minimum nastává v bodě $[0, 0]$ s hodnotou $f_{\min} = -2$ a globální maximum v bodě $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ s hodnotou $f_{\max} = -1/2$. ▲

III. 6. Vázané extrémy

Definice 3.6.1.

Nechť $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $M \subseteq D(f)$. Bod $x^* \in M$ nazveme bodem *lokálního minima funkce f na* (*vzhledem k*) *množině* M (neboli *vázaným minimem*), jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že $f(x^*) \leq f(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{O}(x^*) \cap M$. Podobně bod $\hat{x} \in M$ nazveme bodem *lokálního maxima funkce f na* (*vzhledem k*) *množině* M (neboli *vázaným maximem*), jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(\hat{x})$ bodu $\hat{x}$ takové, že $f(\hat{x}) \geq f(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{O}(\hat{x}) \cap M$. Jsou-li předchozí nerovnosti ostré, hovoříme o *ostrých* vázaných extrémech.

Věta 3.6.2.

Nechť funkce n proměnných $f, g_1, \dots, g_m$ mají spojité parciální derivace prvního řádu na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$, kde $1 \leq m \leq n$. Uvažme množinu M danou systémem rovností jako

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = 0\} \bigcap \dots \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_m(x) = 0\} = \\ = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0\} \subseteq U,$$

přičemž vektory grad $g_1(x), \dots,$ grad $g_m(x)$ *jsou lineárně nezávislé pro všechny body $x \in M$, tj. Jacobiho matice*

$$DG(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

má plnou hodnost (tj. m). Je-li bod $x^* \in M$ lokálním extrémem funkce funkce f na množině M, pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (tzv. Lagrangeovy multiplikátory*) taková, že x^* je stacionárním bodem Lagrangeovy funkce*

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(x),$$

tj. $\operatorname{grad}_x L(x^*, \lambda) = 0$ *neboli*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Předchozí tvrzení udává nutnou podmínku pro vázané extrémy. K tomu, aby bod x^* byl vázaným extrémem funkce f, není nutné, aby x^* byl také (klasickým) lokálním extré-

mem Lagrangeovy funkce vzhledem k x, tedy zejména aby matice $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda)$ byla pozitivně/negativně definitní (toto je sice postačující, ale velmi silný požadavek). Následující věta obsahuje postačující podmínku pro ostrý vázaný extrémem.

Věta 3.6.3.

Nechť funkce n proměnných $f, g_1, \dots, g_m$ mají spojité parciální derivace druhého řádu na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$, kde $1 \leq m \leq n$. Uvažme množinu M danou systémem rovností jako

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = 0\} \cap \dots \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_m(x) = 0\} = \\ = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0\} \subseteq U,$$

přičemž vektory $\operatorname{grad} g_1(x), \dots, \operatorname{grad} g_m(x)$ jsou lineárně nezávislé pro všechna $x \in M$. Jestliže pro bod $x^* \in M$ existují $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ taková, že platí následující podmínky

(i) Lagrangeova funkce

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(x)$$

má v bodě x^* stacionární bod, tj. $\operatorname{grad}_x L(x^*, \lambda) = 0$,

(ii) Hessova matice $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda)$ je pozitivně (negativně) definitní na podprostoru

$$\operatorname{Ker} DG(x^*) = \operatorname{Lin}\{\operatorname{grad} g_1(x^*), \dots, \operatorname{grad} g_m(x^*)\}^{\perp} = \\ = \bigcap\nolimits_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \perp \operatorname{grad} g_i(x^*)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid DG(x^*)\, x = 0\},$$

tj. $h^{\top} \nabla_x^2 L(x^*, \lambda) h > (<) 0$ pro všechny vektory $h \in \operatorname{Ker} DG(x^*) \setminus \{0\}$,

pak má funkce f v bodě x^* ostré lokální minimum (maximum) na množině M.

Jestliže matice $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda)$ je indefinitní na $\operatorname{Ker} DG(x^*)$, pak extrém v bodě x^* nenastává, zatímco v případě pouhé semidefinitnosti matice $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda)$ nemůžeme s pomocí uvedených tvrzení rozhodnout.

Příklad 3.6.1.

Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = \sqrt{3}x - y + 2$$

na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 = 0\}$.

Řešení. Nejdříve ověříme, zda jsou splněny požadavky Věty 3.6.2 s nutnými podmínkami pro vázané extrémy. Spojitost parciálních derivací funkce f i funkce $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2$ je zřejmá a současně Jacobiho matice $DG(x,y) = Dg(x,y) = (2x+2, 2y)$ má plnou hodnost na množině M, neboť tento požadavek je porušen pouze v bodě $[-1,0] \notin M$ (v tomto bodě je $DG(-1,0) = (0,0)$). To znamená, že vázané extrémy stačí hledat pouze mezi stacionárními body Lagrangeovy funkce

$$L(x,y,\lambda) = \sqrt{3}x - y + 2 + \lambda(x^2 + 2x + y^2).$$

Dostáváme tedy soustavu (třetí podmínka je spíše z definice množiny M, ačkoli totéž získáme derivováním podle λ)

$$L_x(x,y,\lambda) = \sqrt{3} + 2\lambda x + 2\lambda = 0, \quad L_y(x,y,\lambda) = -1 + 2\lambda y = 0, \quad x^2 + 2x + y^2 = 0.$$

Z první i druhé rovnice je zřejmé, že nutně platí $\lambda \neq 0$. Potom z první rovnice máme $x = -\sqrt{3}/(2\lambda) - 1$ a ze druhé rovnice $y = 1/(2\lambda)$, což po dosazení do třetí rovnice dává

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\lambda} - 1\right)^2 + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\lambda} - 1\right) + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 0 \iff \frac{1}{\lambda^2} = 1 \iff \lambda = \pm 1.$$

Nalezli jsme tedy dva stacionární body $[-(\sqrt{3}+2)/2, 1/2]$ s $\lambda = 1$ a $[(\sqrt{3}-2)/2, -1/2]$ s $\lambda = -1$. Nyní se pomocí podmínek druhého řádu z Věty 3.6.3 pokusíme rozhodnout, zda v některém z těchto stacionárních bodů nastává vázaný extrém. Parciální derivace druhého řádu Lagrangeovy funkce jsou

$$L_{xx}(x,y,\lambda) = 2\lambda, \quad L_{xy}(x,y,\lambda) = 0, \quad L_{yy}(x,y,\lambda) = 2\lambda,$$

takže Hessova matice Lagrangeovy funkce vzhledem k proměnným x, y je rovna

$$\nabla^2_{(x,y)} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Pro bod $[-(\sqrt{3}+2)/2, 1/2]$ s $\lambda = 1$ dostáváme matici

$$\nabla^2_{(x,y)} L(-(\sqrt{3}+2)/2, 1/2, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Protože tato matice je pozitivně definitní (pro všechny vektory $h \in \mathbb{R}^2$, takže nutně i pro vektory $h \in \operatorname{Ker} DG(-(\sqrt{3}+2)/2, 1/2))$, je tento bod vázaným minimem s hodnotou $f(-(\sqrt{3}+2)/2, 1/2) = -\sqrt{3}$.

Pro bod $[(\sqrt{3}-2)/2, -1/2]$ s $\lambda = -1$ dostáváme matici

$$\nabla^2_{(x,y)} L((\sqrt{3}-2)/2, -1/2, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Protože tato matice je negativně definitní (pro všechny vektory $h \in \mathbb{R}^2$, takže nutně i pro vektory $h \in \operatorname{Ker} DG((\sqrt{3}-2)/2, -1/2))$, je tento bod vázaným maximem s hodnotou $f((\sqrt{3}-2)/2, -1/2) = 4 - \sqrt{3}$.

Všimněte si také, že množina M je kompaktní (kružnice) a funkce f je spojitá na M, takže na této množině existují globální extrémy funkce f, kterými jsou právě vypočtené vázané extrémy. ▲

Příklad 3.6.2.

Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = x + y$$

na množině $M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1\right\}$.

Řešení. Nejdříve ověříme, zda jsou splněny požadavky Věty 3.6.2 s nutnými podmínkami pro vázané extrémy. Spojitost parciálních derivací funkce f i funkce $g(x,y) = 1/x^2 + 1/y^2 - 1$ na množině $\left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ a } y \neq 0\right\} \supset M$ je zřejmá a současně Jacobiho matice $DG(x,y) = Dg(x,y) = \left(-2/x^3, -2/y^3\right)$ má plnou hodnost na množině M, neboť $DG(x,y) \neq (0,0)$ pro všechna $[x,y] \in M$. To znamená, že vázané extrémy stačí hledat pouze mezi stacionárními body Lagrangeovy funkce

$$L(x,y,\lambda) = x + y + \lambda\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1\right).$$

Dostáváme tedy soustavu (třetí podmínka je spíše z definice množiny M, ačkoli totéž získáme derivováním podle λ)

$$L_x(x,y,\lambda) = 1 - \frac{2\lambda}{x^3} = 0, \quad L_y(x,y,\lambda) = 1 - \frac{2\lambda}{y^3} = 0, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1.$$

Odečtením první a druhé rovnice získáme $2\lambda/x^3 = 2\lambda/y^3$. Jelikož z první i druhé rovnice je zřejmé, že nutně platí $\lambda \neq 0$, plyne odtud $x = y$, což po dosazení do třetí rovnice dává $2/x^2 = 1$, neboli $x = \pm\sqrt{2}$. Nalezli jsme tedy stacionární bod $[\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ s $\lambda = \sqrt{2}$ a $[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$ s $\lambda = -\sqrt{2}$. Nyní se pomocí podmínek druhého řádu z Věty 3.6.3 pokusíme rozhodnout, zda v některém z těchto stacionárních bodů nastává vázaný extrém. Parciální derivace druhého řádu Lagrangeovy funkce jsou

$$L_{xx}(x,y,\lambda) = \frac{6\lambda}{x^4}, \quad L_{xy}(x,y,\lambda) = 0, \quad L_{yy}(x,y,\lambda) = \frac{6\lambda}{y^4},$$

takže Hessova matice Lagrangeovy funkce vzhledem k proměnným x, y je rovna

$$\nabla^2_{(x,y)} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 6\lambda/x^4 & 0 \\ 0 & 6\lambda/y^4 \end{pmatrix}.$$

Pro bod $[\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ s $\lambda = \sqrt{2}$ dostáváme matici

$$\nabla^2_{(x,y)} L(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Protože tato matice je pozitivně definitní (pro všechny vektory $h \in \mathbb{R}^2$, takže nutně i pro vektory $h \in \operatorname{Ker} DG(\sqrt{2}, \sqrt{2})$), máme vázané minimum s hodnotou $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Pro bod $[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$ s $\lambda = -\sqrt{2}$ dostáváme matici

$$\nabla^2_{(x,y)} L(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Protože tato matice je negativně definitní (pro všechny vektory $h \in \mathbb{R}^2$, takže nutně i pro vektory $h \in \operatorname{Ker} DG(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$), nastává v tomto bodě vázané maximum s hodnotou $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$.

Všimněte si, že množina M není kompaktní, takže není zaručena existence globálních extrémů funkce f na M. Snadno se můžeme přesvědčit, že nalezené vázané extrémy jsou pouze lokální charakter a nemohou být globálními extrémy (vždyť funkční hodnota ve vázaném minimu je větší než funkční hodnota ve vázaném maximu). ▲

Příklad 3.6.3.

Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$$

na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = \frac{\pi}{4}\}$.

Řešení. Nejdříve ověříme, zda jsou splněny požadavky Věty 3.6.2 s nutnými podmínkami pro vázané extrémy. Spojitost parciálních derivací funkce f i funkce $g(x,y) = x - y - \pi/4$ je zřejmá a současně Jacobiho matice $DG(x,y) = Dg(x,y) = (1, -1)$ má vždy plnou hodnost. To znamená, že vázané extrémy stačí hledat mezi stacionárními body Lagrangeovy funkce

$$L(x,y,\lambda) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda(x - y - \pi/4).$$

Dostáváme tedy soustavu (třetí podmínka je spíše z definice množiny M, ačkoli totéž získáme derivováním podle λ)

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= -2\cos x \sin x + \lambda = -\sin 2x + \lambda = 0, \\ L_y(x,y,\lambda) &= -2\cos y \sin y - \lambda = -\sin 2y - \lambda = 0, \\ x - y &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Sečtením první a druhé rovnice dostaneme $\sin 2x = -\sin 2y$, z čehož plyne $x = -y + k\pi$ pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$. Odtud po dosazení do třetí podmínky získáme stacionární body $[\pi/8 + k\pi/2, -\pi/8 + k\pi/2]$ pro $k \in \mathbb{Z}$ a s $\lambda = 1/\sqrt{2}$ pro sudé k a $\lambda = -1/\sqrt{2}$ pro liché k. Nyní se pomocí podmínek druhého řádu z Věty 3.6.3 pokusíme rozhodnout, zda v těchto bodech nastává vázaný extrém. Parciální derivace druhého řádu Lagrangeovy funkce jsou

$$L_{xx}(x,y,\lambda) = -2\cos 2x, \quad L_{xy}(x,y,\lambda) = 0, \quad L_{yy}(x,y,\lambda) = -2\cos 2y,$$

takže Hessova matice Lagrangeovy funkce vzhledem k proměnným x, y je rovna

$$\nabla^2_{(x,y)} L(x,y,\lambda) \begin{pmatrix} -2\cos 2x & 0 \\ 0 & -2\cos 2y \end{pmatrix}.$$

Pak v bodech $[\pi/8 + k\pi/2, -\pi/8 + k\pi/2]$ pro sudé $k \in \mathbb{Z}$, tj. $k = 2n$ pro $n \in \mathbb{Z}$, dostáváme matici

$$\nabla^2_{(x,y)} L(\pi/8 + n\pi, -\pi/8 + n\pi, 1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Protože tato matice je negativně definitní (pro všechny vektory $h \in \mathbb{R}^2$, takže nutně i pro vektory $h \in \operatorname{Ker} DG(\pi/8 + n\pi, -\pi/8 + n\pi)$), jsou tyto body vázanými maximy s hodnotou $f(\pi/8 + n\pi, -\pi/8 + n\pi) = 1 + 1/\sqrt{2}$.

V bodech $[\pi/8 + k\pi/2, -\pi/8 + k\pi/2]$ pro liché $k \in \mathbb{Z}$, tj. $k = 2n + 1$ pro $n \in \mathbb{Z}$, dostáváme matici

$$\nabla^2_{(x,y)} L(5\pi/8 + n\pi, -5\pi/8 + n\pi, 1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Protože tato matice je pozitivně definitní (pro všechny vektory $h \in \mathbb{R}^2$, takže nutně i pro vektory $h \in \operatorname{Ker} DG(5\pi/8 + n\pi, -5\pi/8 + n\pi)$), jsou tyto body vázanými minimy s hodnotou $f(5\pi/8 + n\pi, -5\pi/8 + n\pi) = 1 - 1/\sqrt{2}$. ▲

Příklad 3.6.4.

Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

na množině $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 3z + 7 = 0 \text{ a } x - y + z - 3 = 0\}$.

Řešení. Nejdříve ověříme, zda jsou splněny požadavky Věty 3.6.2 s nutnými podmínkami pro vázané extrémy. Spojitost parciálních derivací funkce f i funkcí $g_1(x,y,z) = x + y - 3z + 7$ a $g_2(x,y,z) = x - y + z - 3$ je zřejmá a současně Jacobiho matice

$$DG(x,y,z) = D\begin{pmatrix} g_1(x,y,z) \\ g_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

má vždy plnou hodnost. To znamená, že vázané extrémy stačí hledat mezi stacionárními body Lagrangeovy funkce

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y - 3z + 7) + \lambda_2(x - y + z - 3)$$

Dostáváme tedy soustavu (poslední dvě podmínky jsou spíše z definice množiny M, ačkoli totéž získáme derivováním podle λ_1 a λ_2)

$$\begin{aligned} L_x(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 2x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad L_y(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ L_z(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 2z - 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad x + y - 3z + 7 = 0, \quad x - y + z - 3 = 0. \end{aligned}$$

Máme lineární soustavu pěti rovnic o pěti neznámých, takže si při jejím řešení můžeme pomocí maticovým zápisem, tj.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11/2 & 3/2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12/11 & 12/11 \end{array}\right].$$

Odtud dostáváme jediný stacionární bod $[0,-1,2]$ s $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$. Nyní se pomocí podmínek druhého řádu z Věty 3.6.3 pokusíme rozhodnout, zda v tomto bodě nastává vázaný extrém. Parciální derivace druhého řádu Lagrangeovy funkce jsou

$$\begin{aligned} L_{xx}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 2, \quad L_{xy}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 0, \quad L_{xz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 0, \\ L_{yy}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 2, \quad L_{yz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 0, \quad L_{zz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 2, \end{aligned}$$

takže Hessova matice Lagrangeovy funkce vzhledem k proměnným x, y, z je rovna

$$\nabla^2_{(x,y,z)} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vzhledem ke nezávislosti této matice na všech proměnných je totožná s Hessovou maticí $\nabla^2_{(x,y,z)} L(0,-1,2,1,-1)$. Současně je tato matice pozitivně definitní (pro všechny vektory $h \in \mathbb{R}^2$, takže nutně i pro vektory $h \in \operatorname{Ker} DG(0,-1,2)$), je tento bod vázaným minimem s hodnotou $f(0,-1,2) = 5$. ▲

Příklad 3.6.5.

Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = 2x^2 + 4y^2$$

na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9\}$.

Řešení. Nejdříve ověříme, zda jsou splněny požadavky Věty 3.6.2 s nutnými podmínkami pro vázané extrémy. Spojitost parciálních derivací funkce f i funkce $g(x,y) = x^2 + y^2 - 9$ je zřejmá a současně Jacobiho matice $DG(x,y) = Dg(x,y) = (2x, 2y)$ má plnou hodnost na množině M, neboť tento požadavek je porušen pouze v bodě $[0,0] \notin M$ (v tomto bodě je $DG(0,0) = (0,0)$). To znamená, že vázané extrémy stačí hledat pouze mezi stacionárními body Lagrangeovy funkce

$$L(x,y,\lambda) = 2x^2 + 4y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 9).$$

Dostáváme tedy soustavu (třetí podmínka je spíše z definice množiny M, ačkoli totéž získáme derivováním podle λ)

$$L_x(x,y,\lambda) = 2x(2-\lambda) = 0, \quad L_y(x,y,\lambda) = 2y(4-\lambda) = 0, \quad x^2 + y^2 = 9,$$

pro jejíž řešení musíme uvážit tři možnosti:

(i) volba $x = 0 = y$ je v rozporu se třetí podmínkou;

(ii) při volbě $x = 0 = 4 - \lambda$ dostaneme ze třetí podmínky $y^2 = 9$, takže máme dva stacionární body $[0, \pm 3]$ s $\lambda = 4$;

(iii) při volbě $2 - \lambda = 0 = y$ dostaneme ze třetí podmínky $x^2 = 9$, takže máme dva stacionární body $[\pm 3, 0]$ s $\lambda = 2$.

Nyní se pomocí podmínek druhého řádu z Věty 3.6.3 pokusíme rozhodnout, zda v některém z těchto stacionárních bodů nastává vázaný extrém. Parciální derivace druhého řádu Lagrangeovy funkce jsou

$$L_{xx}(x,y,\lambda) = 4 - 2\lambda, \quad L_{xy}(x,y,\lambda) = 0, \quad L_{yy}(x,y,\lambda) = 8 - 2\lambda,$$

takže Hessova matice Lagrangeovy funkce vzhledem k proměnným x, y je rovna

$$\nabla^2_{(x,y)} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 4-2\lambda & 0 \\ 0 & 8-2\lambda \end{pmatrix}.$$

Pro body $[0, \pm 3]$ s $\lambda = 4$ dostáváme matici

$$\nabla^2_{(x,y)} L(0,\pm 3, 4) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jelikož tato je matice pouze negativně semidefinitní, potřebujeme určit $\operatorname{Ker} DG(0, \pm 3) = \operatorname{Ker}(0, \pm 6)$. Pokud vektor $h \in \mathbb{R}^2$ patří do $\operatorname{Ker} DG(0, \pm 3) = \operatorname{Ker}(0, \pm 6)$, pak nutně platí $h = (t, 0)^\top = t\,(1, 0)^\top$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$. Potom pro tyto vektory máme

$$h^\top \nabla^2_{(x,y)} L(0, \pm 3, 4)\, h = t^2\,(1, 0) \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (1, 0)^\top = -4t^2,$$

z čehož plyne $h^\top \nabla^2_{(x,y)} L(0, \pm 3, 4)\, h < 0$ pro všechna $t \neq 0$, tj. pro libovolný vektor $h \in \operatorname{Ker} DG(0, \pm 3) \setminus \{0\}$. Takže body $[0, \pm 3]$ jsou vázaná maxima s hodnotou $f(0, \pm 3) = 36$.

Pro body $[\pm 3, 0]$ s $\lambda = 2$ dostáváme matici

$$\nabla^2_{(x,y)} L(\pm 3, 0, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

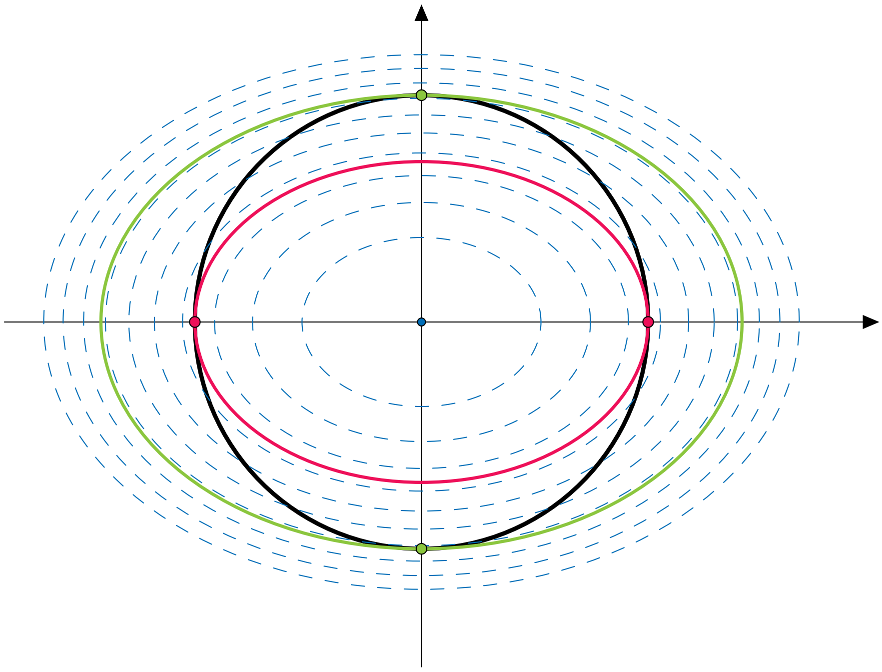
Jelikož tato je matice pouze pozitivně semidefinitní, potřebujeme určit $\operatorname{Ker} DG(\pm 3, 0) = \operatorname{Ker}(\pm 6, 0)$. Pokud vektor $h \in \mathbb{R}^2$ patří do $\operatorname{Ker} DG(\pm 3, 0) = \operatorname{Ker}(\pm 6, 0)$, pak nutně platí $h = (0, t)^\top = t\,(0, 1)^\top$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$. Potom pro tyto vektory máme

$$h^\top \nabla^2_{(x,y)} L(\pm 3, 0, 2)\, h = t^2\,(0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} (0, 1)^\top = 4t^2,$$

z čehož plyne $h^\top \nabla^2_{(x,y)} L(\pm 3, 0, 2)\, h > 0$ pro všechna $t \neq 0$, tj. pro libovolný vektor $h \in \operatorname{Ker} DG(\pm 3, 0) \setminus \{0\}$. Takže body $[\pm 3, 0]$ jsou vázaná minima s hodnotou $f(\pm 3, 0) = 18$.

Všimněte si, že množina M je kompaktní (kružnice) a funkce f je spojitá na M, takže na této množině existují globální extrémy funkce f. Těmi jsou právě vypočtené vázané extrémy, neboť funkční hodnota ve vázaných minimech (maximech) je stejná. Tato řešení můžeme získat i s pomocí grafického znázornění dané úlohy, viz Obrázek 3.6.50. Na obrázku je znázorněna množina M (černá elipsa) a vrstevnice funkce f (modré elipsy). Globální minimum potom odpovídá vrstevnici na nejmenší možné úrovni, která má neprázdný průnik s množinou M (červená elipsa), zatímco globální maximum odpovídá vrstevnici na nejvyšší možné úrovni, která má neprázdný průnik s množinou M (zelená elipsa).

Musíme tedy vyřešit soustavu $2x^2 + 4y^2 = c$ a $x^2 + y^2 = 9$, kde $c \in \mathbb{R}$. Toto je sice soustava pouhých dvou rovnic pro tři neznámé, ale z Obrázku 3.6.50 vidíme, že nás zajímají pouze hodnoty $c \geq 0$ (záporné hodnoty nemá vůbec smysl uvažovat vzhledem k první rovnici) takové, že soustava má právě dvě řešení. Odečtením dvojnásobku druhé rovnice od první, dostaneme $y^2 = c/2 - 9$, tj. $y = \pm\sqrt{c/2 - 9}$. Takže řešením této soustavy jsou (obecně) čtyři body $[\pm\sqrt{18 - c/2}, \pm\sqrt{c/2 - 9}]$ v závislosti na hodnotě $c \in [18, 36]$. Avšak právě pro $c = 18$ a $c = 36$ bude jedna ze souřadnic nulová, tudíž změna znaménka nedává nový bod. Odtud proto dostáváme globální minimum v bodech $[\pm 3, 0]$ s hodnotou $c = 18$ a globální maximum v bodech $[0, \pm 3]$s hodnotou $c = 36$.



Obrázek 3.6.50: Grafické znázornění řešení Příkladu 3.6.5.

▲

Příklad 3.6.6.

Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = 27(x+y-1)$$

na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid 9(x^2+y^2) = 2x^2y^2\}$.

Řešení. Nejdříve ověříme, zda jsou splněny požadavky Věty 3.6.2 s nutnými podmínkami pro vázané extrémy. Spojitost parciálních derivací funkce f i funkce $g(x,y) = 9(x^2+y^2) - 2x^2y^2$ je zřejmá a současně Jacobiho matice $DG(x,y) = Dg(x,y) = (18x - 4xy^2, 18y - 4x^2y)$ má plnou hodnost na množině M vyjma bodu $[0,0] \in M$, přičemž tento požadavek je porušen také v bodech $[\pm 3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}], [\pm 3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}] \notin M$ (v těchto bodech je $DG(\cdot,\cdot) = (0,0)$). To znamená, že bod $[0,0]$ je možným kandidátem na vázaný extrém a další vázané extrémy stačí hledat mezi stacionárními body Lagrangeovy funkce

$$L(x,y,\lambda) = 27(x+y-1) + \lambda(9x^2 + 9y^2 - 2x^2y^2).$$

Dostáváme tedy soustavu (třetí podmínka je spíše z definice množiny M, ačkoli totéž získáme derivováním podle λ)

$$L_x(x,y,\lambda) = 27 + \lambda(18x - 4xy^2) = 0, \quad L_y(x,y,\lambda) = 27 + \lambda(18y - 4x^2y) = 0,$$
$$9x^2 + 9y^2 - 2x^2y^2 = 0.$$

Z první i druhé rovnosti plyne $\lambda \neq 0$, takže odečtením těchto rovnic dostaneme po vydělením λ rovnost

$$18x - 4xy^2 = 18y - 4x^2y \quad \Longrightarrow \quad (18 + 4xy)(x-y) = 0.$$

Pro získání řešení tedy musíme uvážit dvě možnosti:

(i) volba $x = y$ dává po dosazení do třetí rovnice $2x^2(9 - x^2) = 0$, z čehož máme $[0,0] \notin M$ a stacionární body $[\pm 3, \pm 3]$ s $\lambda = \pm 1/2$;

(ii) volba $4xy = -18$ dává (nutně $y \neq 0$) $x = -9/(2y)$, z čehož po dosazení do třetí rovnice, vynásobení y^2 a substituci $z = y^2$ dostaneme kvadratickou rovnici $36z^2 - 162z + 729 = 0$, která nemá reálné řešení.

Nyní se pomocí podmínek druhého řádu z Věty 3.6.3 pokusíme rozhodnout, zda v některém z těchto stacionárních bodů nastává vázaný extrém. Parciální derivace druhého řádu Lagrangeovy funkce jsou

$$L_{xx}(x,y,\lambda) = 18\lambda - 4\lambda y^2, \quad L_{xy}(x,y,\lambda) = -8\lambda xy, \quad L_{yy}(x,y,\lambda) = 18\lambda - 4\lambda x^2,$$

takže Hessova matice Lagrangeovy funkce vzhledem k proměnným x, y je rovna

$$\nabla^2_{(x,y)} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 18\lambda - 4\lambda y^2 & -8\lambda xy \\ -8\lambda xy & 18\lambda - 4\lambda x^2 \end{pmatrix}.$$

Pro body $[\pm 3, \pm 3]$ s $\lambda = \pm 1/2$ dostáváme matice

$$\nabla^2_{(x,y)} L(\pm 3, \pm 3, \pm 1/2) = \begin{pmatrix} \mp 9 & \mp 36 \\ \mp 36 & \mp 9 \end{pmatrix},$$

které jsou indefinitní (determinant je v obou případech záporný). Potřebujeme proto nyní určit $\operatorname{Ker} DG(\pm 3, \pm 3) = \operatorname{Ker}(\mp 54, \mp 54) = \operatorname{Ker}(1, 1)$. Pokud vektor $h \in \mathbb{R}^2$ patří do $\operatorname{Ker} DG(\pm 3, \pm 3) = \operatorname{Ker}(1, 1)$, pak nutně platí $h = (t, -t)^\top = t\,(1, -1)^\top$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$. Potom pro tyto vektory máme

$$h^\top \nabla^2_{(x,y)} L(\pm 3, \pm 3, \pm 1/2)\, h = t^2\,(1, -1) \begin{pmatrix} \mp 9 & \mp 36 \\ \mp 36 & \mp 9 \end{pmatrix} (1, -1)^\top = \pm 54 t^2,$$

z čehož plyne $h^\top \nabla^2_{(x,y)} L(3, 3, 1/2)\, h > 0$ pro všechna $t \neq 0$, tj. pro libovolný vektor $h \in \operatorname{Ker} DG(3, 3) \setminus \{0\}$. Takže bod $[3, 3]$ je vázaným minimem s hodnotou $f(3, 3) = 135$. Podobně platí $h^\top \nabla^2_{(x,y)} L(-3, -3, -1/2)\, h < 0$ pro libovolné $h \in \operatorname{Ker} DG(-3, -3) \setminus \{0\}$, takže bod $[-3, -3]$ je vázaným maximem s hodnotou $f(-3, -3) = -189$. V bodě $[0, 0]$ vázaný extrém nenastává, neboť s každým bodem $[x, y] \in M$ máme současně také $[x, -y]$, $[-x, y]$, $[-x, -y] \in M$, takže v libovolném okolí bodu $[0, 0]$ lze najít body z množiny M s funkčními hodnotami většími i menšími než $f(0, 0) = -27$. ▲

Příklad 3.6.7.

Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$$

na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+3\}$.

Řešení. Nejdříve ověříme, zda jsou splněny požadavky Věty 3.6.2 s nutnými podmínkami pro vázané extrémy. Spojitost parciálních derivací funkce f na otevřené množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\} \supset M$ i funkce $g(x,y) = x+3-y$ je zřejmá a současně Jacobiho matice daného omezení, tj. $DG(x,y) = Dg(x,y) = (1,-1)$, má vždy plnou hodnost. To znamená, že vázané extrémy stačí hledat mezi stacionárními body Lagrangeovy funkce

$$L(x,y,\lambda) = \ln(x^2+y^2) + \lambda(x+3-y).$$

Dostáváme tedy soustavu (třetí podmínka je spíše z definice množiny M, ačkoli totéž získáme derivováním podle λ)

$$L_x(x,y,\lambda) = \frac{2x}{x^2+y^2} + \lambda = 0, \quad L_y(x,y,\lambda) = \frac{2y}{x^2+y^2} - \lambda = 0, \quad x+3-y = 0.$$

Z první a druhé rovnosti plyne $x = -y$, což po dosazení do třetí rovnice dává stacionární bod $[-3/2, 3/2]$ s multiplikátorem $\lambda = 2/3$. Nyní se pomocí podmínek druhého řádu z Věty 3.6.3 pokusíme rozhodnout, zda v některém z těchto stacionárních bodů nastává vázaný extrém. Parciální derivace druhého řádu Lagrangeovy funkce jsou

$$L_{xx}(x,y,\lambda) = -\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad L_{xy}(x,y,\lambda) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad L_{yy}(x,y,\lambda) = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

takže Hessova matice Lagrangeovy funkce vzhledem k proměnným x, y je rovna

$$\nabla^2_{(x,y)} L(x,y,\lambda) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} -2(x^2-y^2) & -4xy \\ -4xy & 2(x^2-y^2) \end{pmatrix}.$$

V bodě $[-3/2, 3/2]$ s $\lambda = 2/3$ dostáváme matici

$$\nabla^2_{(x,y)} L(-3/2, 3/2, 2/3) = \begin{pmatrix} 0 & 4/9 \\ 4/9 & 0 \end{pmatrix},$$

která je indefinitní. Potřebujeme proto nyní určit $\operatorname{Ker} DG(-3/2, 3/2) = \operatorname{Ker}(1,-1)$. Pokud vektor $h \in \mathbb{R}^2$ patří do $\operatorname{Ker} DG(-3/2, 3/2) = \operatorname{Ker}(1,-1)$, pak nutně platí $h = (t,t)^\top = t\,(1,1)^\top$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$. Potom pro tyto vektory máme

$$h^\top \nabla^2_{(x,y)} L(-3/2, 3/2, 2/3)\, h = t^2\,(1,1) \begin{pmatrix} 0 & 4/9 \\ 4/9 & 0 \end{pmatrix} (1,1)^\top = \frac{8t^2}{9},$$

z čehož plyne $h^\top \nabla^2_{(x,y)} L(-3/2, 3/2, 2/3)\, h > 0$ pro všechna $t \neq 0$, tj. pro libovolný vektor $h \in \operatorname{Ker} DG(-3/2, 3/2) \setminus \{0\}$. Takže bod $[-3/2, 3/2]$ je vázaným minimem s hodnotou $f(-3/2, 3/2) = \ln 9/2$. ▲

Příklad 3.6.8.

Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = \ln(x+y)$$

na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$.

Řešení. Nejdříve ověříme, zda jsou splněny požadavky Věty 3.6.2 s nutnými podmínkami pro vázané extrémy. Všimněme si, že množina M je větší než definiční obor funkce f, kterým je otevřená množina $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0\}$. Současně víme, že množinu M tvoří dvě větve (rovnoosé) hyperboly, viz Obrázek 3.6.51 níže. Bylo by proto potřeba doplnit množinu M podmínkou $x \geq 0$, jenže „naše“ teorie nedovoluje omezení ve tvaru nerovností. Nicméně bez újmy na obecnosti můžeme body ležící ve třetím kvadrantu zanedbat, neboť větve hyperboly jsou oddělené a otevřené množiny (takže platnost podmínek pro lokální extrém není ovlivněna zahrnutím druhé větve). Spojitost parciálních derivací funkce f na uvažované části množiny M i funkce $g(x,y) = xy - 1$ je zřejmá a současně Jacobiho matice $DG(x,y) = Dg(x,y) = \begin{pmatrix} y, x \end{pmatrix}$ má plnou hodnost na celé množině M, neboť tento požadavek je porušen pouze v bodě $[0,0] \notin M$ (v tomto bodě je $DG(0,0) = (0,0)$). To znamená, že vázané extrémy stačí hledat mezi stacionárními body Lagrangeovy funkce

$$L(x,y,\lambda) = \ln(x+y) + \lambda(xy-1).$$

Dostáváme tedy soustavu (třetí podmínka je spíše z definice množiny M, ačkoli totéž získáme derivováním podle λ)

$$L_x(x,y,\lambda) = \frac{1}{x+y} + \lambda y = 0, \quad L_y(x,y,\lambda) = \frac{1}{x+y} + \lambda x = 0, \quad xy - 1 = 0.$$

Z první i druhé rovnice plyne $\lambda \neq 0$, takže odečtením těchto rovnic obdržíme $x = y$. Potom dosazením do třetí rovnice získáme body $[1,1]$ a $[-1,-1]$. Stacionárním bode je ovšem pouze $[1,1]$ s $\lambda = -1/2$, neboť $[-1,-1] \notin D(f)$. Nyní se pomocí podmínek druhého řádu z Věty 3.6.3 pokusíme rozhodnout, zda v tomto bodě nastává vázaný extrém. Parciální derivace druhého řádu Lagrangeovy funkce jsou

$$L_{xx}(x,y,\lambda) = -\frac{1}{(x+y)^2}, \quad L_{xy}(x,y,\lambda) = -\frac{1}{(x+y)^2} + \lambda, \quad L_{yy}(x,y,\lambda) = \frac{1}{(x+y)^2},$$

takže Hessova matice Lagrangeovy funkce vzhledem k proměnným x, y je rovna

$$\nabla^2_{(x,y)} L(x,y,\lambda) \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} + \lambda \\ -\frac{1}{(x+y)^2} + \lambda & -\frac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}.$$

Pak v bodě $[1,1]$ s $\lambda = -1/2$ dostáváme matici

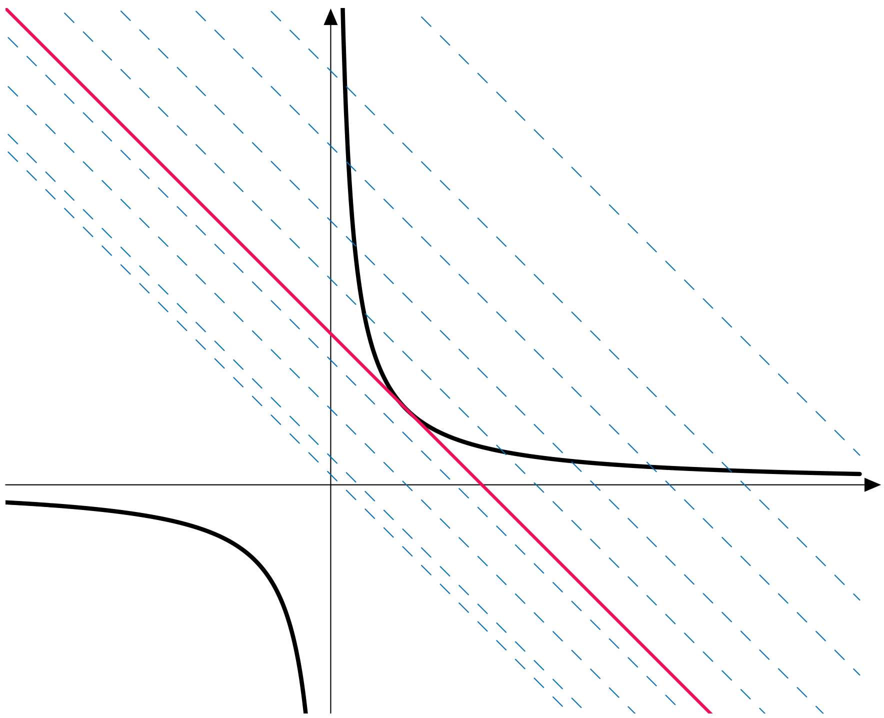
$$\nabla^2_{(x,y)} L(1,1,1/2) = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 \\ -3/4 & -1/4 \end{pmatrix},$$

která je indefinitní. Potřebujeme proto nyní určit $\operatorname{Ker} DG(1,1) = \operatorname{Ker}(1,1)$. Pokud vektor $h \in \mathbb{R}^2$ patří do $\operatorname{Ker} DG(1,1) = \operatorname{Ker}(1,1)$, pak nutně platí $h = (t,-t)^\top = t\,(1,-1)^\top$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$. Potom pro tyto vektory máme

$$h^\top\,\nabla^2_{(x,y)} L(1,1,1/2)\,h = t^2\,(1,-1)\begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 \\ -3/4 & -1/4 \end{pmatrix}(1,-1)^\top = t^2,$$

z čehož plyne $h^\top\,\nabla^2_{(x,y)} L(1,1,1/2)\,h > 0$ pro všechna $t \neq 0$, tj. pro libovolný vektor $h \in \operatorname{Ker} DG(1,1) \setminus \{0\}$. Takže bod $[1,1]$ je vázaným minimem s hodnotou $f(1,1) = \ln 2$.

Uvažovaná část množiny M není kompaktní (není ohraničená), takže nemáme zaručenu existenci globálních extrémů. Vzhledem k výsledku je ale jasné, že funkce bude mít nejvýše jeden globální extrém. S pomocí náčrtku vrstevnic a přípustné množiny ukážeme, že nalezené vázané minimum je současně globálním minimem. Vrstevnice funkce f jsou dány jako $\ln(x+y) = c$ pro $c \in \mathbb{R}$, což jsou vlastně přímky $y = \mathrm{e}^c - x$, viz Obrázek 3.6.51. Globální minimum potom odpovídá vrstevnici na nejmenší možné úrovni, která má neprázdný průnik s množinou M (červená přímka).



Obrázek 3.6.51: Grafické znázornění řešení Příkladu 3.6.8.

Musíme tedy vyřešit soustavu $y = \mathrm{e}^c - x$ a $xy = 1$, kde $c \in \mathbb{R}$. Toto je sice soustava pouhých dvou rovnic pro tři neznámé, ale z Obrázku 3.6.51 vidíme, že nás zajímá pouze hodnota c taková, že soustava má právě jedno řešení. Zkombinováním prvním a druhé rovnice dostaneme rovnici $y = \mathrm{e}^c - 1/y$ neboli $y^2 - \mathrm{e}^c\,y + 1 = 0$. Tato kvadratická rovnice bude mít jedno řešení právě tehdy, když je její diskriminant nulový, tj. $\mathrm{e}^{2c} - 4 = 0$. Toto je

splněno pro $c = \ln 2$, což následně dává $y = \mathrm{e}^c/2 = 1$ a $x = 1$. Tedy v bodě $[1, 1]$ skutečně nastává globální minimum s hodnotou $\ln 2$. ▲

Příklad 3.6.9.

Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25}$$

na množině $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

Řešení. Nejdříve ověříme, zda jsou splněny požadavky Věty 3.6.2 s nutnými podmínkami pro vázané extrémy. Spojitost parciálních derivací funkce f i funkce $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ je zřejmá a současně Jacobiho matice $DG(x,y,z) = Dg(x,y,z) = (2x,2y,2z)$ má plnou hodnost na množině M, neboť tento požadavek je porušen pouze v bodě $[0,0,0] \notin M$ (v tomto bodě je $DG(0,0,0) = (0,0,0)$). To znamená, že vázané extrémy stačí hledat mezi stacionárními body Lagrangeovy funkce

$$L(x,y,\lambda) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} + \lambda\,(x^2+y^2+z^2-1).$$

Dostáváme tedy soustavu (čtvrtá podmínka je spíše z definice množiny M, ačkoli totéž získáme derivováním podle λ)

$$L_x(x,y,z,\lambda) = x\,(1/2+2\lambda) = 0, \quad L_y(x,y,z,\lambda) = y\,(2/9+2\lambda) = 0,$$
$$L_z(x,y,z,\lambda) = z\,(2/25+2\lambda) = 0, \quad x^2+y^2+z^2 = 1.$$

První tři rovnice budou současně splněny pouze v případě, že dvě proměnné položíme rovny nule a λ zvolíme tak, aby byla splněna zbývající rovnost, neboť volba $x = y = z = 0$ nevyhovuje čtvrté rovnici. Zbývající proměnnou pak snadno dopočteme z poslední rovnice. Takto dostaneme 6 stacionárních bodů

$$\begin{aligned} P_{1\pm}: &\quad [\pm 1,0,0], &\quad \lambda_{1\pm} &= -1/4,\\ P_{2\pm}: &\quad [0,\pm 1,0], &\quad \lambda_{2\pm} &= -1/9,\\ P_{3\pm}: &\quad [0,0,\pm 1], &\quad \lambda_{3\pm} &= -1/25. \end{aligned}$$

Nyní se pomocí podmínek druhého řádu z Věty 3.6.3 pokusíme rozhodnout, zda v tomto bodě nastává vázaný extrém. Parciální derivace druhého řádu Lagrangeovy funkce jsou

$$L_{xx}(x,y,z,\lambda) = 1/2+2\lambda, \quad L_{xy}(x,y,z,\lambda) = 0, \quad L_{xz}(x,y,z,\lambda) = 0,$$
$$L_{yy}(x,y,z,\lambda) = 2/9+2\lambda, \quad L_{yz}(x,y,z,\lambda) = 0, \quad L_{zz}(x,y,z,\lambda) = 2/25+2\lambda,$$

takže Hessova matice Lagrangeovy funkce vzhledem k proměnným x,y,z je rovna

$$\nabla^2_{(x,y,z)} L(x,y,z,\lambda) = \begin{pmatrix} 1/2+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2/9+2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2/25+2\lambda \end{pmatrix}.$$

Pak v bodech $P_{1\pm}$ dostáváme matici

$$\nabla^2_{(x,y,z)} L(P_{1\pm}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5/18 & 0 \\ 0 & 0 & -11/30 \end{pmatrix}.$$

která je pouze negativně semidefinitní. Potřebujeme proto nyní určit $\operatorname{Ker} DG(\pm1,0,0) = \operatorname{Ker}(\pm2,0,0)$. Pokud vektor $h \in \mathbb{R}^3$ patří do $\operatorname{Ker} DG(\pm1,0,0) = \operatorname{Ker}(\pm2,0,0)$, pak nutně platí $h = (0,u,v)^\top$ pro libovolné $u, v \in \mathbb{R}$, což můžeme vyjádřit jako

$$h = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Potom pro tyto vektory máme

$$h^\top \nabla^2_{(x,y,z)} L(P_{1\pm})\, h = \begin{pmatrix} u, v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5/18 & 0 \\ 0 & 0 & -11/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} u, v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5/18 & 0 \\ 0 & -11/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Protože matice $\left(\begin{smallmatrix} -5/18 & 0 \\ 0 & -11/30 \end{smallmatrix}\right)$ je negativně definitní, platí $h^\top \nabla^2_{(x,y,z)} L(P_{1\pm})\, h < 0$ pro všechna $u, v \in \mathbb{R}$ splňující $u^2 + v^2 \neq 0$, tj. pro libovolný vektor $h \in \operatorname{Ker} DG(\pm1,0,0) \setminus \{0\}$. Tudíž body $[\pm1, 0, 0]$ jsou ostrými vázanými maximy s hodnotou $f(\pm1,0,0) = 1/4$.

V bodech $P_{2\pm}$ máme matici

$$\nabla^2_{(x,y,z)} L(P_{2\pm}) = \begin{pmatrix} 5/18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -32/225 \end{pmatrix}.$$

která je indefinitní. Potřebujeme proto nyní určit $\operatorname{Ker} DG(0,\pm1,0) = \operatorname{Ker}(0,\pm2,0)$. Pokud vektor $h \in \mathbb{R}^3$ patří do $\operatorname{Ker} DG(0,\pm1,0) = \operatorname{Ker}(0,\pm2,0)$, pak nutně platí $h = (u,0,v)^\top$ pro libovolné $u, v \in \mathbb{R}$, což můžeme vyjádřit jako

$$h = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Potom pro tyto vektory máme

$$h^\top \nabla^2_{(x,y,z)} L(P_{2\pm})\, h = \begin{pmatrix} u, v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -32/225 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} u, v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/18 & 0 \\ 0 & -32/225 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Protože matice $\begin{pmatrix} 5/18 & 0 \\ 0 & -32/225 \end{pmatrix}$ je indefinitní, v bodech $[0, \pm 1, 0]$ extrém nenastává.

Konečně v bodech $P_{3\pm}$ dostáváme matici

$$\nabla^2_{(x,y,z)} L(P_{3\pm}) = \begin{pmatrix} 21/50 & 0 & 0 \\ 0 & 32/225 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

která je pouze pozitivně semidefinitní. Potřebujeme proto nyní určit $\operatorname{Ker} DG(0,0,\pm 1) = \operatorname{Ker}(0,0,\pm 2)$. Pokud vektor $h \in \mathbb{R}^3$ patří do $\operatorname{Ker} DG(0,0,\pm 1) = \operatorname{Ker}(0,0,\pm 2)$, pak nutně platí $h = (u,v,0)^\top$ pro libovolné $u, v \in \mathbb{R}$, což můžeme vyjádřit jako

$$h = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Potom pro tyto vektory máme

$$\begin{aligned} h^\top \nabla^2_{(x,y,z)} L(P_{3\pm})\, h &= \begin{pmatrix} u, v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21/50 & 0 & 0 \\ 0 & 32/225 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} u, v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21/50 & 0 \\ 0 & 32/225 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Protože matice $\begin{pmatrix} 21/50 & 0 \\ 0 & 32/225 \end{pmatrix}$ je pozitivně definitní, platí $h^\top \nabla^2_{(x,y,z)} L(P_{3\pm})\, h > 0$ pro libovolná $u, v \in \mathbb{R}$ splňující $u^2 + v^2 \neq 0$, tj. pro libovolný vektor $h \in \operatorname{Ker} DG(0,0,\pm 1) \setminus \{0\}$. Tudíž body $[0,0,\pm 1]$ jsou ostrými vázanými minimy s hodnotou $f(0,0,\pm 1) = 1/25$.

Všimněte si, že množina M je kompaktní (kulová plocha) a funkce f je spojitá na M, takže na této množině existují globální extrémy funkce f. Těmi jsou právě vypočtené vázané extrémy. ▲

Příklad 3.6.10.

Určete vázané extrémy funkce

$$f(x, y, z) = xyz$$

na množině $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ a } x + y + z = 0\}$. *Dokážete tuto úlohu také interpretovat „geometricky"?*

Řešení. Nejdříve ověříme, zda jsou splněny požadavky Věty 3.6.2 s nutnými podmínkami pro vázané extrémy. Spojitost parciálních derivací funkce f i funkce $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ a $g_2(x, y, z) = x + y + z$ je zřejmá a současně Jacobiho matice

$$DG(x, y, z) = D\begin{pmatrix} g_1(x, y, z) \\ g_2(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

má plnou hodnost na množině M, neboť tento požadavek je porušen pouze v bodech tvaru $[t, t, t]$, z nichž žádný nepatří do množiny M. To znamená, že vázané extrémy stačí hledat mezi stacionárními body Lagrangeovy funkce

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xyz + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z).$$

Dostáváme tedy soustavu (poslední dvě podmínky jsou spíše z definice množiny M, ačkoli totéž získáme derivováním podle λ_1 a λ_2)

$$\begin{aligned} L_x(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= yz + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ L_y(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= xz + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ L_z(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= xy + 2z\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,& \quad x + y + z = 0. \end{aligned}$$

Z prvních tří rovnic vyloučíme λ_2 jejich vzájemných odečtením, čímž dostaneme soustavu

$$\begin{gathered} (y - x)(z - 2\lambda_1) = 0, \quad (z - y)(x - 2\lambda_1) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0. \end{gathered}$$

První rovnice je splněna pouze v případě $y = x$ nebo $z = 2\lambda_1$, zatímco druhá rovnice platí pouze pro $y = z$ nebo $x = 2\lambda_1$. Zkombinováním těchto možností a dosazením do posledních dvou rovnic dostaneme stacionární body a odpovídající multiplikátory

$$\begin{aligned} P_{1\pm}: &\quad \left[\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\right], \quad \lambda_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{6}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{6}, \\ P_{2\pm}: &\quad \left[\mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \lambda_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{6}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{6}, \\ P_{3\pm}: &\quad \left[\mp\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{2}{\sqrt{6}}, \mp\frac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \lambda_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{6}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Nyní se pomocí podmínek druhého řádu z Věty 3.6.3 pokusíme rozhodnout, zda v tomto bodě nastává vázaný extrém. Parciální derivace druhého řádu Lagrangeovy funkce jsou

$$L_{xx}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=2\lambda_1,\quad L_{xy}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=z,\quad L_{xz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=y,$$
$$L_{yy}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=2\lambda_1,\quad L_{yz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x,\quad L_{zz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=2\lambda_1,$$

takže Hessova matice Lagrangeovy funkce vzhledem k proměnným x, y, z je rovna

$$\nabla^2_{(x,y,z)}L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix}2\lambda_1 & z & y\\ z & 2\lambda_1 & x\\ y & x & 2\lambda_1\end{pmatrix}.$$

Pak v bodě P_{1+} dostáváme matici

$$\nabla^2_{(x,y,z)}L(P_{1+})=\begin{pmatrix}1/\sqrt6 & -2/\sqrt6 & 1/\sqrt6\\ -2/\sqrt6 & 1/\sqrt6 & 1/\sqrt6\\ 1/\sqrt6 & 1/\sqrt6 & 1/\sqrt6\end{pmatrix}.$$

která je ovšem indefinitní. Potřebujeme proto nyní určit

$$\operatorname{Ker} DG(1/\sqrt6,1/\sqrt6,-2/\sqrt6)=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}2/\sqrt6 & 2/\sqrt6 & -4/\sqrt6\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Jestliže vektor $h\in\mathbb{R}^3$ patří do $\operatorname{Ker} DG(1/\sqrt6,1/\sqrt6,-2/\sqrt6)$, pak nutně platí

$$h=(t,-t,0)^\top=t\,(1,-1,0)^\top$$

pro libovolné $t\in\mathbb{R}$. Potom pro tyto vektory máme

$$h^\top\,\nabla^2_{(x,y,z)}L(P_{1+})\,h=t^2\,(1,-1,0)\begin{pmatrix}1/\sqrt6 & -2/\sqrt6 & 1/\sqrt6\\ -2/\sqrt6 & 1/\sqrt6 & 1/\sqrt6\\ 1/\sqrt6 & 1/\sqrt6 & 1/\sqrt6\end{pmatrix}(1,-1,0)^\top=\sqrt6\,t^2.$$

To znamená, že $h^\top\,\nabla^2_{(x,y,z)}L(P_{1+})\,h>0$ pro všechna $t\neq0$, tj. pro libovolný vektor $h\in\operatorname{Ker} DG(1/\sqrt6,1/\sqrt6,-2/\sqrt6)\setminus\{0\}$. Tudíž $[1/\sqrt6,1/\sqrt6,-2/\sqrt6]$ je vázaným minimem s hodnotou $f(1/\sqrt6,1/\sqrt6,-2/\sqrt6)=-\frac{2}{6\sqrt6}$. V bodech P_{2+} a P_{3+} dostaneme tentýž výsledek (s velmi podobnými mezivýsledky).

V bodě P_{1-} dostáváme matici

$$\nabla^2_{(x,y,z)}L(P_{1-})=\begin{pmatrix}-1/\sqrt6 & 2/\sqrt6 & -1/\sqrt6\\ 2/\sqrt6 & -1/\sqrt6 & -1/\sqrt6\\ -1/\sqrt6 & -1/\sqrt6 & -1/\sqrt6\end{pmatrix}.$$

která je opět indefinitní. Potřebujeme proto nyní určit

$$\operatorname{Ker} DG(-1/\sqrt6,-1/\sqrt6,2/\sqrt6)=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}-2/\sqrt6 & -2/\sqrt6 & 4/\sqrt6\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Jestliže vektor $h \in \mathbb{R}^3$ patří do $\operatorname{Ker} DG(-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$, pak nutně platí

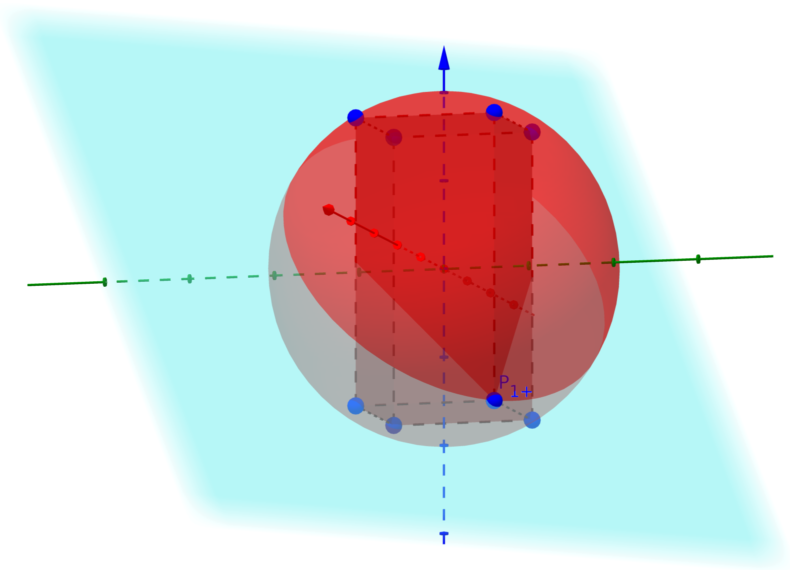
$$h = (t, -t, 0)^\top = t\,(1, -1, 0)^\top$$

pro libovolné $t \in \mathbb{R}$. Potom pro tyto vektory máme

$$h^\top\, \nabla^2_{(x,y,z)} L(P_{1-})\, h = t^2\,(1, -1, 0) \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} (1, -1, 0)^\top = -\sqrt{6}\,t^2.$$

To znamená, že $h^\top\, \nabla^2_{(x,y,z)} L(P_{1+})\, h < 0$ pro všechna $t \neq 0$, tj. pro libovolný vektor $h \in \operatorname{Ker} DG(-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}) \setminus \{0\}$. Tudíž $[-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}]$ je ostrým vázaným maximem s hodnotou $f(-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}) = \frac{2}{6\sqrt{6}}$. V bodech P_{2-} a P_{3-} dostaneme tentýž výsledek (s velmi podobnými mezivýsledky).

První podmínka určuje kulovou plochu a druhá podmínka rovinu, takže množina M je kružnice. Odtud plyne, že nalezené extrémy jsou současně globálními extrémy. Z geometrického pohledu lze úlohu interpretovat tak, že hledáme kvádr s maximálním objemem, středem v počátku a jedním vrcholem v množině M (ostatní vrcholy jsou poté určeny ze symetrie podle souřadných os), protože objem takového kvádru lze vyjádřit jako $V = 8\,|xyz| = 8\,|f(x, y, z)|$, viz Obrázek 3.6.52.



Obrázek 3.6.52: Geometrická interpretace zadání Příkladu 3.6.10.

▲

Příklad 3.6.11.

Na parabole $y^2 = 4x$ nalezněte bod, který je nejblíže přímce $x - y + 4 = 0$.

Řešení. Vzdálenost bodu $[x_0, y_0]$ od přímky dané rovnicí $ax + by + c = 0$ lze určit pomocí vzorce

$$d(x_0, y_0) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

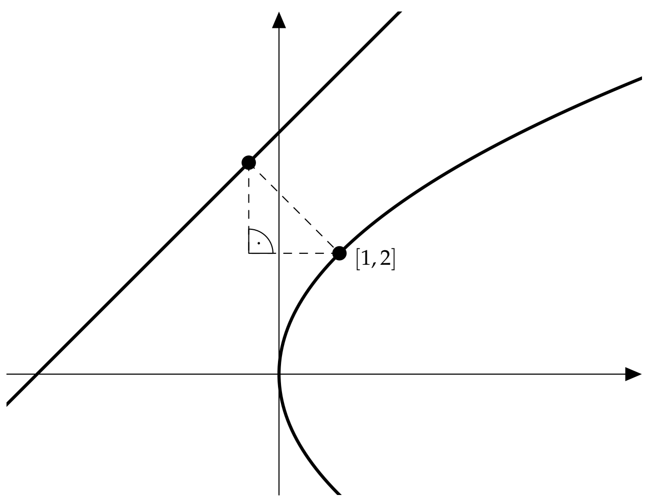
(dokážete odvodit tento vzorec?). Daný problém lze tedy formulovat tak, že chceme minimalizovat funkci $f(x, y) = \frac{x-y+4}{\sqrt{2}}$ na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4x\}$. Absence absolutní hodnoty ve funkci f je způsobena tím, že hodnota čitatele je kladná pro všechny body $[x, y] \in M$, viz také Obrázek 3.6.53. K řešení této úlohy využijeme vázané extrémy. Začneme proto tím, že ověříme, zda jsou pro tento problém splněny požadavky Věty 3.6.2 s nutnými podmínkami pro vázané extrémy. Spojitost parciálních derivací funkce d i funkce $g(x, y) = y^2 - 4x$ je zřejmá a současně Jacobiho matice $DG(x, y) = Dg(x, y) = \big(-4, 2y\big)$ má vždy plnou hodnost. To znamená, že vázané extrémy stačí hledat mezi stacionárními body Lagrangeovy funkce

$$L(x, y, \lambda) = \frac{x - y + 4}{\sqrt{2}} + \lambda(y^2 - 4x).$$

Dostáváme tedy soustavu (třetí podmínka je spíše z definice množiny M, ačkoli totéž získáme derivováním podle λ)

$$L_x(x, y, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 4\lambda = 0, \quad L_y(x, y, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\lambda y = 0, \quad y^2 - 4x = 0.$$

Z první rovnice ihned plyne $\lambda = \frac{1}{4\sqrt{2}}$, což po dosazení do druhé rovnice dává $y = 2$. Ze třetí rovnice potom plyne $x = 1$.



Obrázek 3.6.53: Grafické znázornění zadání a řešení Příkladu 3.6.11.

Z Obrázku 3.6.53 je patrné, že nalezený bod musí být hledaným minimem. Nicméně ještě pomocí podmínek druhého řádu z Věty 3.6.3 potvrdíme, že se jedná o ostré vázané minimum. Parciální derivace druhého řádu Lagrangeovy funkce jsou

$$L_{xx}(x, y, \lambda) = 0, \quad L_{xy}(x, y, \lambda) = 0, \quad L_{yy}(x, y, \lambda) = 2\lambda,$$

takže Hessova matice Lagrangeovy funkce vzhledem k proměnným x, y je rovna

$$\nabla^2_{(x,y)} L(x, y, \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Pak v bodě $[1, 2]$ s $\lambda = 1/(4\sqrt{2})$ dostáváme matici

$$\nabla^2_{(x,y)} L(1, 2, 1/(4\sqrt{2})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/(2\sqrt{2}) \end{pmatrix},$$

která je pouze pozitivně semidefinitní. Potřebujeme proto určit $\operatorname{Ker} DG(1, 2) = \operatorname{Ker}(-4, 4)$. Pokud vektor $h \in \mathbb{R}^2$ patří do $\operatorname{Ker} DG(1, 2) = \operatorname{Ker}(-4, 4)$, pak nutně platí $h = (t, t)^\top = t\,(1, 1)^\top$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$. Potom pro tyto vektory máme

$$h^\top\, \nabla^2_{(x,y)} L(1, 2, 1/(4\sqrt{2}))\, h = t^2\,(1, 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/(2\sqrt{2}) \end{pmatrix} (1, 1)^\top = \frac{t^2}{2\sqrt{2}},$$

z čehož plyne $h^\top\, \nabla^2_{(x,y)} L(1, 2, 1/(4\sqrt{2}))\, h > 0$ pro všechna $t \neq 0$, tj. pro libovolný vektor $h \in \operatorname{Ker} DG(1, 2) \setminus \{0\}$. Takže bod $[1, 2]$ je skutečně ostrým vázaným minimem s hodnotou $f(1, 2) = 3/\sqrt{2}$. Zbývá tedy ještě určit souřadnice odpovídajícího body na dané přímce. Tento bod musí splňovat (viz opět Obrázek 3.6.53) rovnosti $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 3/\sqrt{2}$ a $y = x + 4$. Dosazením druhé podmínky do první rovnice dostaneme kvadratickou rovnici $2x^2 + 2x + 5 = 9/2$, která má dvojnásobné řešení $x = -1/2$. Proto souřadnice hledaného bodu jsou $[-1/2, 7/2]$. ▲

Příklad 3.6.12.

Mezi všemi kvádry vepsanými do elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$*, kde* $a, b, c > 0$*, určete rozměry toho, který má největší objem.*

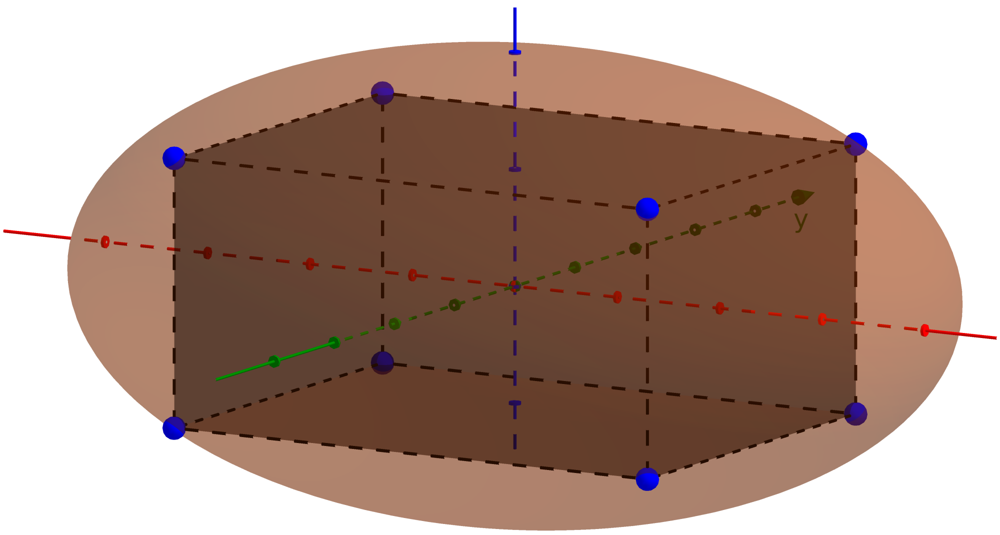
Řešení. Nejdříve si rozeberme několik základních faktů. K dosažení maximálního objemu je nutné, aby

(i) hrany kvádru byly rovnoběžné se souřadnými osami,

(ii) střed kvádru byl umístěn ve středu elipsoidu (vzhledem k symetrii elipsoidu),

(iii) všechny vrcholy kvádru ležely na elipsoidu (protože v opačném případě by díky symetrii elipsoidu bylo možné „rozšířit" kvádr, čímž bychom zvětšili jeho objem)

Proto bude-li mít jeden vrchol hledaného kvádru souřadnice $[x, y, z]$, pak ostatní musí být $[-x, y, z]$, $[x, -y, z]$, $[-x, -y, z]$ a $[x, y, -z]$, $[-x, y, -z]$, $[x, -y, -z]$, $[-x, -y, -z]$, přičemž objem takového kvádru je $V(x, y, z) = 8xyz$ (bez újmy na obecnosti totiž můžeme vzít $x, y, z \geq 0$), viz Obrázek 3.6.54.



Obrázek 3.6.54: Grafické znázornění zadání Příkladu 3.6.12.

Zadaná úloha je tedy ekvivalentním s nalezením maximální hodnoty funkce $V(x, y, z)$ na množině M, kterou je elipsoid. Ovšem toto naše omezení je potřeba ještě doplnit požadavkem $x, y, z \geq 0$. Každopádně funkce funkce V je spojitá na množině M s dodatečným požadavkem nezápornosti, takže řešení určitě existuje. Jelikož ale vyložená teorie nedovoluje omezení ve tvaru nerovností, neměli bychom zapomenout na situaci, kdy x, y nebo z nabývá největší nebo nejmenší možnou hodnotu. Jenže ve všech těchto případech ($x = 0, a$ nebo $y = 0, b$ nebo $z = 0, c$) je objem $V(x, y, z) = 0$, takže pro tyto volby jistě maximum nenastává. Tudíž nám stačí najít vázané maximum funkce $V(x, y, z)$ za podmínky $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, tj. na množině $M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$.

Začneme proto s tím, že ověříme, zda jsou splněny požadavky Věty 3.6.2 s nutnými podmínkami pro vázané extrémy. Spojitost parciálních derivací funkce V i funkce určující omezení $g(x,y,z) = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1$ je zřejmá a současně Jacobiho matice $DG(x,y,z) = Dg(x,y,z) = \big(2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2\big)$ má plnou hodnost na množině M, neboť tento požadavek je porušen pouze v bodě $[0,0,0] \notin M$ (v tomto bodě je $DG(0,0,0) = (0,0,0)$). To znamená, že vázané extrémy stačí hledat mezi stacionárními body Lagrangeovy funkce

$$L(x,y,z,\lambda) = 8xyz + \lambda(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1).$$

Dostáváme tedy soustavu (čtvrtá podmínka je spíše z definice množiny M, ačkoli totéž získáme derivováním podle λ)

$$L_x(x,y,z,\lambda) = 8yz + 2\lambda x/a^2 = 0, \quad L_y(x,y,z,\lambda) = 8xz + 2\lambda y/b^2 = 0,$$
$$L_z(x,y,z,\lambda) = 8xy + 2\lambda z/c^2 = 0, \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1 = 0.$$

Jelikož maximum musí splňovat $x,y,z > 0$, můžeme první rovnici vynásobit x, druhou y a třetí z, což po sečtení dává $24xyz + 2\lambda(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)$. Odtud s využitím poslední rovnice získáme $\lambda = -12xyz$. Potom po dosazení do první rovnice máme $8yz(1 - 3x^2/a^2) = 0$, což dává $x = a/\sqrt{3}$. Podobně ze druhé a třetí rovnice dostaneme $y = b/\sqrt{3}$ a $z = c/\sqrt{3}$. Nalezli jsme proto řešení, kterým je kvádr s délkami hran $2a/\sqrt{3}$, $2b/\sqrt{3}$ a $2c/\sqrt{3}$ a výsledným objemem $V = 8abc/(3\sqrt{3})$.

Alternativní postup. Tuto úlohu lze vyřešit i velmi elegantně bez derivování. K tomu je potřeba využít tzv. *nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \tag{3.6.1}$$

pro $x_1, \dots, x_n \ge 0$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x_1 = \cdots = x_n$. Nechť $x,y,t \ge 0$ má stejný význam jako v první části a zvolme $x_1 = x^2/a^2$, $x_2 = y^2/b^2$ a $x_3 = z^2/c^2$, potom z nerovnosti (3.6.1) plyne

$$\frac{x^2\,y^2\,z^2}{a^2\,b^2\,c^2} \le \left(\frac{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \quad \Longleftrightarrow \quad V^2 \le \frac{64\,a^2\,b^2\,c^2}{27}.$$

Neboli při libovolné délce hran (a dodržení požadavku, aby vrcholy ležely na elipsoidu) bude objem kvádru splňovat nerovnost $V \le \frac{8\,a\,b\,c}{3\sqrt{3}}$, přičemž rovnost (tj. maximální možná hodnota) nastane právě tehdy, když $x_1 = x_2 = x_3$. Protože ale $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, plyne odtud $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$, takže

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \& \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}} \quad \& \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}},$$

což je přesně ve shodě s výsledkem získaným v předchozí části. ▲

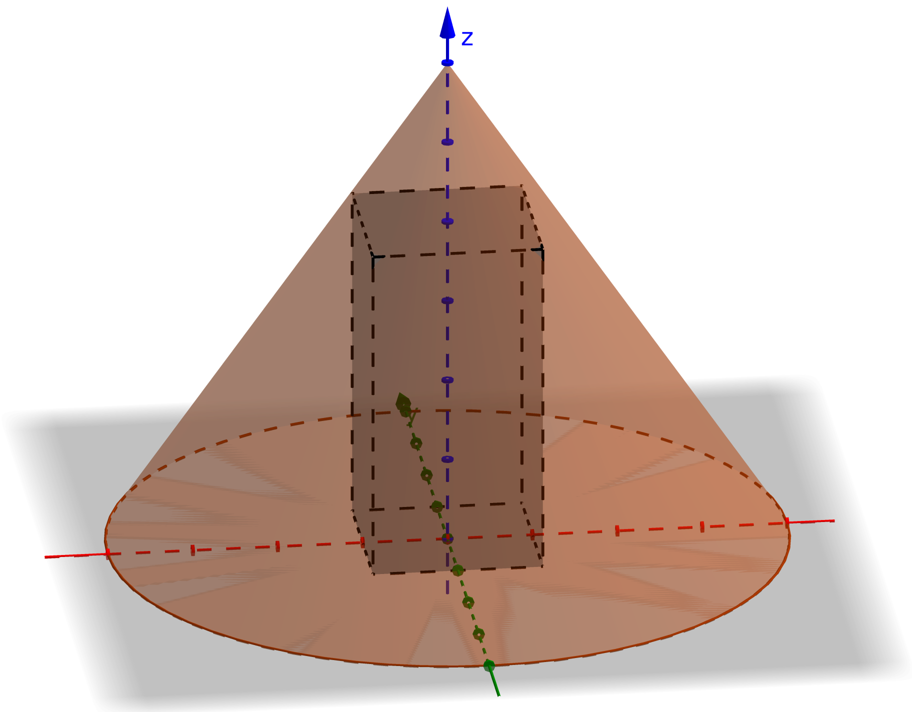
Příklad 3.6.13.

Mezi všemi kvádry vepsanými do rotačního kužele s délkou strany pláště $\ell > 0$ svírající s podstavou úhel $\alpha \in (0, \pi/2)$ určete rozměry toho, který má největší povrch.

Řešení. Nejdříve si rozeberme několik základních faktů. Je jasné, že maximálního povrch dosáhneme tak, že „horní“ vrcholy kvádru budou ležet na plášti kužele (v opačném případě by bylo možné „rozšířit“ kvádr, čímž bychom zvětšili jeho povrch). Současně ale „spodní“ vrcholy musí ležet uvnitř základny nikoli na kružnici vymezující podstavu kužele (v opačném případě by kvádr měl nulovou výšku). Ještě si také uvědomme, že kvádr musí být umístěn ve středu kužele (jinak bychom jej mohli posunout a poté i zvětšit). Označíme-li tedy délku hran základny kvádru jako a, b a jeho výšku jako c, pak souřadnice vrcholů musí být $[a/2, b/2, 0]$, $[-a/2, b/2, 0]$, $[a/2, -b/2, 0]$, $[-a/2, -b/2, 0]$ a $[a/2, b/2, c]$, $[-a/2, b/2, c]$, $[a/2, -b/2, c]$, $[-a/2, -b/2, c]$ a povrch tohoto kvádru je určen vzorcem

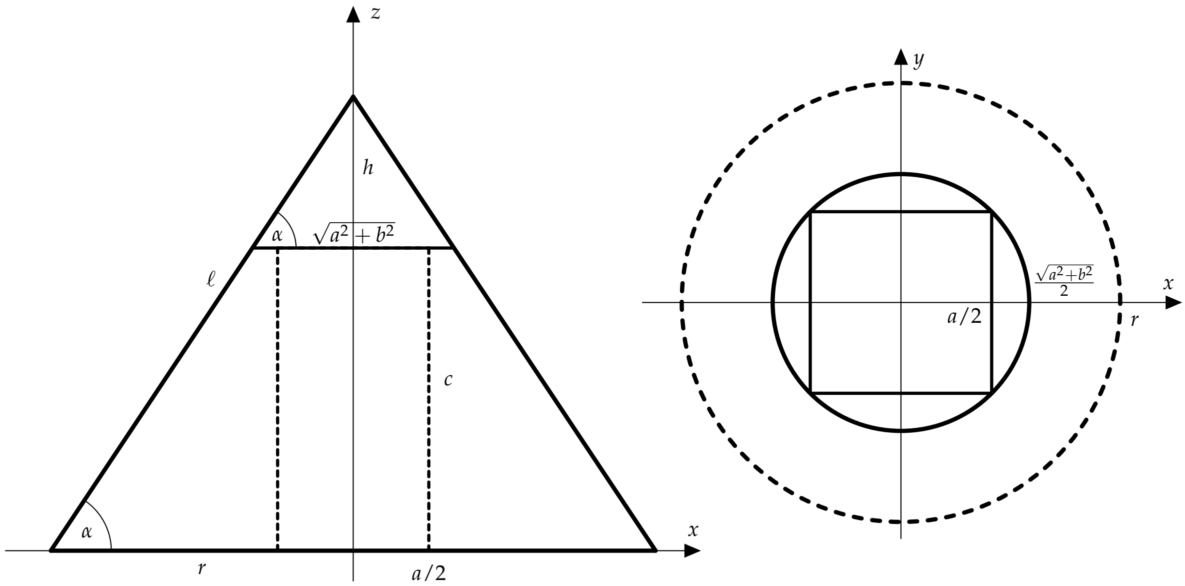
$$S(a, b, c) = 2(ab + bc + ac).$$

Zadaná úloha je proto ekvivalentním s nalezením maximální hodnoty funkce $S(a, b, c)$ na množině M, kterou je plášť kužele. Pro využití teorie vázaných extrémů ještě potřebujeme množinu M popsat analyticky. Na Obrázku 3.6.55 je komplexní pohled znázorňující vzájemnou polohu kužele a kvádru.



Obrázek 3.6.55: Grafické znázornění zadání Příkladu 3.6.13.

Na Obrázku 3.6.56 je pohled zepředu (nárys) a také shora (půdorys), přičemž zde jsou zaznačeny některé známé i neznámé veličiny.



Obrázek 3.6.56: Grafické znázornění zadání Příkladu 3.6.13.

Protože situaci, kdy $a^2 + b^2 = 0$ můžeme z našich úvah vyloučit (v takovém případě by totiž $a = b = 0$ a povrch by byl nulový), dostáváme dvojici podmínek

$$\sin\alpha = \frac{h+c}{\ell} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}},$$

viz Obrázek 3.6.56(i). Odtud plyne

$$2\ell\sin\alpha - 2c = \sqrt{a^2+b^2}\,\operatorname{tg}\alpha,$$

což je podmínka určující množinu M. Ovšem toto naše omezení je potřeba ještě doplnit přirozeným požadavkem $a, b, c \geq 0$. Jelikož ale vyložená teorie nedovoluje omezení ve tvaru nerovností, budeme se muset ještě v závěru podívat na situaci, kdy a, b nebo c nabývá největší nebo nejmenší možnou hodnotu.

Začneme tím, že ověříme, zda jsou splněny požadavky Věty 3.6.2 s nutnými podmínkami pro vázané extrémy. Spojitost parciálních derivací funkce S i funkce $g(a,b,c) = \sqrt{a^2+b^2}\,\operatorname{tg}\alpha + 2c - 2\ell\sin\alpha$ je zřejmá v případě $a^2 + b^2 \neq 0$ a současně Jacobiho matice $DG(a,b,c) = Dg(a,b,c) = (a\operatorname{tg}\alpha/\sqrt{a^2+b^2}, b\operatorname{tg}\alpha/\sqrt{a^2+b^2}, 2)$ má vždy plnou hodnost. Vázané extrémy proto budeme nejdříve hledat mezi stacionárními body Lagrangeovy funkce

$$L(a,b,c,\lambda) = 2(ab+bc+ac) + \lambda\Big(\sqrt{a^2+b^2}\,\operatorname{tg}\alpha + 2c - 2\ell\sin\alpha\Big).$$

Dostáváme tedy soustavu (čtvrtá podmínka je spíše z definice množiny M, ačkoli totéž získáme derivováním podle λ)

$$L_a(a,b,c,\lambda) = 2(b+c) + \frac{a\,\lambda\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0, \quad L_b(a,b,c,\lambda) = 2(a+c) + \frac{b\,\lambda\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0,$$
$$L_c(a,b,c,\lambda) = 2(a+b) + 2\lambda = 0, \quad 2\ell\sin\alpha - 2c = \sqrt{a^2+b^2}\;\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Odečtením prvních dvou rovnic dostaneme

$$2(b-a) + \lambda(a-b)\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0. \tag{3.6.2}$$

Tato rovnost bude určitě splněna pro $a=b$, což po dosazení do třetí rovnice dává $\lambda = -2a$. Potom z první a čtvrté rovnice máme soustavu

$$2(a+c) - \frac{2a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{2}} = 0 \quad \& \quad 2\ell\sin\alpha - 2c = \sqrt{2}\,a\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Odtud po sečtení obou rovnic a vynásobení $\sqrt{2}/2$ obdržíme

$$\sqrt{2}\,a + \sqrt{2}\,\ell\sin\alpha - a\,\mathrm{tg}\,\alpha = a\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

z čehož pro $\mathrm{tg}\,\alpha \neq \sqrt{2}/2$ získáme

$$a = \frac{\sqrt{2}\,\ell\sin\alpha}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha - \sqrt{2}} = \frac{\ell\sin\alpha}{\sqrt{2}\;\mathrm{tg}\,\alpha - 1} = b = -\frac{\lambda}{2}.$$

Z vazebné podmínky ještě (po chvíli upravování) vypočteme

$$c = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \sqrt{2}}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha - \sqrt{2}}\;\ell\sin\alpha.$$

Současně si však všimněme, že pro $\mathrm{tg}\,\alpha \in (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}]$ je $c \leq 0$ a pro $\mathrm{tg}\,\alpha \in (0, \sqrt{2}/2)$ také i $a = b < 0$. Proto vypočtený stacionární bod má smysl pouze pro $\mathrm{tg}\,\alpha > \sqrt{2}$, tj. $\alpha > \mathrm{arctg}\,\sqrt{2} \approx 0{,}95531$.

Nyní se vraťme k rovnosti (3.6.2) a uvažme tentokrát, že $a \neq b$. Potom $\lambda = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{\mathrm{tg}\,\alpha}$, což po dosazení do rovnosti $L_a(a,b,c,\lambda) = 0$ dává $a+b+c=0$. Jenže v takovém případě $S(a,b,c) = 2[a(b+c)+bc] = -2(b+c)^2 + bc = -b^2 - c^2 - bc < 0$, takže tento bod můžeme zanedbat.

Nalezli jsme jediný stacionární bod (a to ještě jenom pro $\alpha > \mathrm{arctg}\,\sqrt{2}$) s hodnotou

$$S(a^*,b^*,c^*) = \frac{2\,\ell^2\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha - \cos\alpha}.$$

Teď se ještě musíme podívat na hraniční hodnoty a, b, c. V situaci, kdy jeden z parametrů a, b nebo c nabývá největší možné hodnoty (tj. a nebo b je rovno průměru kružnice určující základnu kužele nebo c je rovno výšce kužele), určitě maximum nenastává, neboť v takovém případě jsou nutně ostatní dvě proměnné nulové, a tudíž $S(a,b,c) = 0$. Totéž platí i o situaci, kdy je pouze jedno z čísel a, b, c nenulové (např. $a = b = 0$). Zbývá tedy případ, kdy právě jedna z hodnot a, b a c je nulová (tj. z kvádru se stane obdélník).

(i) Je-li $a = 0$, pak $b = 2(\ell \sin\alpha - c)/\operatorname{tg}\alpha$ a dostáváme funkci

$$f(c) = S(0, b, c) = 2c\,(\ell \sin\alpha - c)/\operatorname{tg}\alpha,$$

přičemž $c \in [0, H]$, kde $H = \ell \sin\alpha$ je výška kužele. Potom derivováním získáme $f'(c) = 2(\ell \sin\alpha - 2c)/\operatorname{tg}\alpha$ a $f''(c) = -4/\operatorname{tg}\alpha$, z čehož snadno vypočteme, že funkce f nabývá své největší hodnoty ve stacionárním bodě $c_* = \frac{1}{2}\,\ell \sin\alpha$ s funkční hodnotou $f(c_*) = \frac{1}{2}\,\ell^2 \sin\alpha\cos\alpha$.

(ii) Je-li $b = 0$, pak $a = 2(\ell \sin\alpha - c)/\operatorname{tg}\alpha$ a dostáváme funkci

$$S(a, 0, c) = 2c\,(\ell \sin\alpha - c)/\operatorname{tg}\alpha = f(c),$$

takže máme zcela totožný výsledek jako v předchozí části.

(iii) Konečně pro $c = 0$ je $\sqrt{a^2 + b^2} = 2\ell\cos\alpha$ neboli $a = \sqrt{4\,\ell^2\cos^2\alpha - b^2}$. Proto dostáváme funkci

$$g(b) = S(a, b, 0) = b\sqrt{4\,\ell^2\cos^2\alpha - b^2},$$

přičemž $b \in [0, 2\,\ell\cos\alpha]$. Derivováním obdržíme

$$g'(b) = \frac{4\,\ell^2\cos^2\alpha - 2b^2}{\sqrt{4\,\ell^2\cos^2\alpha - b^2}},$$

takže funkce g má na uvažovaném intervalu jediný stacionární bod $b_* = \sqrt{2}\,\ell\cos\alpha$. Z tvaru $g'(b)$ je patrné (viz znaménko $g'(b)$ napravo a nalevo od b_*), že funkce g nabývá v tomto bodě své největší hodnoty $g(b_*) = 2\,\ell^2\cos^2\alpha$.

Jelikož funkce $S(a, b, c)$ je spojitá a množina M s požadavkem $a, b, c \geq 0$ je kompaktní, stačí porovnat získané funkční hodnoty. Jaký je vztah mezi $f(c_*)$ a $f(b_*)$? Rovnost nastane právě tehdy, když $\operatorname{tg}\alpha = 4$, tj. $\alpha = \operatorname{arctg} 4 \approx 1{,}3258$. Pro $\alpha \in (0, \operatorname{arctg} 4)$ je $f(c_*) < g(b_*)$, takže v bodě b_* nastává maximum pro $\alpha \leq \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Nyní ještě zbývá stanovit řešení pro $\alpha > \operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

(a) Vzhledem k tomu, že na intervalu $(\operatorname{arctg}\sqrt{2}, \operatorname{arctg} 4)$ platí $f(c_*) < g(b_*)$, musíme pro $\alpha \in (\operatorname{arctg}\sqrt{2}, \operatorname{arctg} 4]$ určit vztah mezi hodnotami $S(a^*, b^*, c^*)$ a $g(b_*)$. Funkce $S(a^*, b^*, c^*) - g(b_*)$ v proměnné α nemá na intervalu $(\operatorname{arctg}\sqrt{2}, \operatorname{arctg} 4]$ ani nulový bod ($\alpha = \pi/2$) ani bod nespojitosti ($\alpha = \operatorname{arctg}(\sqrt{2}/2)$), což znamená, že se její znaménko na uvažovaném intervalu nemění. Proto s pomocí libovolné hodnoty $\alpha \in (\operatorname{arctg}\sqrt{2}, \operatorname{arctg} 4]$ zjistíme, že $S(a^*, b^*, c^*) > g(b_*)$, tj. pro $\alpha \in (\operatorname{arctg}\sqrt{2}, \operatorname{arctg} 4]$ nastává maximum v bodě $[a^*, b^*, c^*]$.

(b) Vzhledem k tomu, že na intervalu $(\operatorname{arctg}(4), \pi/2)$ tentokrát platí $f(c_*) > g(b_*)$, musíme pro $\alpha \in [\operatorname{arctg} 4, \pi/2)$ určit vztah mezi hodnotami $S(a^*, b^*, c^*)$ a $f(c_*)$. Funkce $S(a^*, b^*, c^*) - f(c_*)$ v proměnné α nemá na intervalu $[\operatorname{arctg} 4, \pi/2)$ ani nulový bod ($\alpha = 0, \pi/2, -\operatorname{arctg}(2/7 + \sqrt{2}/14)$) ani bod nespojitosti ($\alpha = \operatorname{arctg}(\sqrt{2}/2)$). Proto s pomocí libovolné hodnoty $\alpha \in [\operatorname{arctg} 4, \pi/2)$ zjistíme, že $S(a^*, b^*, c^*) > f(c_*)$, tj. pro $\alpha \in (\operatorname{arctg}\sqrt{2}, \operatorname{arctg} 4]$ nastává maximum opět v bodě $[a^*, b^*, c^*]$.

Celkem jsme tedy v závislosti na hodnotě α nalezli následující řešení dané úlohy:

	$\alpha \in (0, \operatorname{arctg}\sqrt{2}]$	$\alpha \in (\operatorname{arctg}\sqrt{2}, \pi/2)$
a	$\sqrt{2}\,\ell\cos\alpha$	$\dfrac{\ell\sin\alpha}{\sqrt{2}\,\operatorname{tg}\alpha - 1}$
b	$\sqrt{2}\,\ell\cos\alpha$	$\dfrac{\ell\sin\alpha}{\sqrt{2}\,\operatorname{tg}\alpha - 1}$
c	0	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{2}}\,\ell\sin\alpha$
S	$2\,\ell^2\cos^2\alpha$	$\dfrac{2\,\ell^2\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha - \cos\alpha}$

▲

III. 7. Implicitně zadané funkce

Definice 3.7.1 (*Impicitně zadaná funkce*).

Nechť $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $[\boldsymbol{x}^*, y^*] \in D(F)$ a nechť platí $F(\boldsymbol{x}^*, y^*) = 0$. Označme graf funkce F jako $Gr = \{[\boldsymbol{x}, y] \in D(F) \mid F(\boldsymbol{x}, y) = 0\}$. Jestliže existuje otevřená množina $\mathcal{U}$ obsahující bod $\boldsymbol{x}^*$ a okolí bodu y^*, tj. $\mathcal{O}(y^*) = (y^* - \varepsilon, y^* + \varepsilon)$ pro nějaké $\varepsilon > 0$, tak, že množina $Gr \cap \big(\mathcal{U} \times \mathcal{O}(y^*)\big)$ je totožná s grafem funkce $y = f(\boldsymbol{x})$ pro $x \in U$, řekneme, že funkce f je v okolí bodu $[\boldsymbol{x}^*, y^*]$ *definována implicitně* rovnicí $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$. Jinými slovy, rovnice $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$ je splněna v $\mathcal{U} \times \mathcal{O}(y^*)$ právě tehdy, když $y = f(\boldsymbol{x})$ pro $\boldsymbol{x} \in U$ neboli

$$\{[\boldsymbol{x}, y] \in \mathcal{U} \times \mathcal{O}(y^*) \mid F(\boldsymbol{x}, y) = 0\} = \{[\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})] \mid x \in \mathcal{U}\}.$$

Věta 3.7.2 (*O existenci implicitní funkce*).

Nechť funkce $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $[\boldsymbol{x}^*, y^*] \in D(F)$ a nechť platí $F(\boldsymbol{x}^*, y^*) = 0$. Jestliže funkce F je spojitá na otevřené množině obsahující bod $[\boldsymbol{x}^*, y^*]$, parciální derivace $F_y(x, y)$ je spojitou funkcí v bodě $[\boldsymbol{x}^*, y^*]$ a současně platí $F_y(\boldsymbol{x}^*, y^*) \neq 0$, pak lze rovnici $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$ lokálně vyřešit pomocí funkce $y = f(\boldsymbol{x})$, tj. existuje otevřená množina $\mathcal{U}$ obsahující $\boldsymbol{x}^*$ a okolí bodu y^* tak, že rovnice $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$ je pro $\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$ a $y \in \mathcal{O}(y^*)$ splněna právě tehdy, když $y = f(\boldsymbol{x})$ pro $\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$, tj. rovnicí $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$ je v okolí bodu $[\boldsymbol{x}^*, y^*]$ implicitně zadána funkce $y = f(\boldsymbol{x})$.

Má-li navíc funkce F v bodě $[\boldsymbol{x}^*, y^*]$ spojité parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, y)$, má implicitní funkce f v bodě $\boldsymbol{x}^* = [x_1, \dots, x_n]$ parciální derivace a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*, y^*)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}^*, y^*)}. \tag{3.7.1}$$

Poznámka 3.7.3.

(i) V případě $n = 1$ dostaneme v Definici 3.7.1 a ve Větě 3.7.2 implicitně zadanou funkci jedné proměnné $y = f(x)$ a místo parciálních derivací v (3.7.1) dostaneme vzorec pro výpočet obyčejné derivace $f'(x)$.

(ii) K určení derivací vyšších řádů (pro implicitně zadanou funkci jedné nebo více proměnných) lze také sestavit vzorec podobně jako v (3.7.1). Ovšem druhý (a vhodnější) způsob je ten, že zderivujeme identitu $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$ podle jednotlivých proměnných $x_1, \dots, x_n$ s tím, že člen $y = f(x_1, \dots, x_n)$ samozřejmě nelze derivovat „explicitně“. Z takto zderivované rovnosti poté vyjádříme hledanou parciální/obyčejnou derivaci.

Poznámka 3.7.4. Ačkoli v případě implicitně zadané funkce $y = f(\boldsymbol{x})$ obvykle není možné získat explicitní předpis pro funkci f, můžeme díky vztahu (3.7.1) vyšetřit některé základní vlastnosti funkce f v bodě $\boldsymbol{x}^*$. Např. tečná (nad)rovina ke grafu funkce f v bodě $[\boldsymbol{x}^*, y^*] = [\boldsymbol{x}^*, f(\boldsymbol{x}^*)]$ je určena rovnicí

$$t:\ F_{x_1}(\boldsymbol{x}^*, y^*)\,(x_1 - x_1^*) + \cdots + F_{x_n}(\boldsymbol{x}^*, y^*)\,(x_n - x_n^*) + F_y(\boldsymbol{x}^*, y^*)\,(y - y^*) = 0. \tag{3.7.2}$$

Normálu k této tečné (nad)rovině lze vyjádřit parametricky

$$n:\ \begin{cases} x_1 &= x_1^* + F_{x_1}(\boldsymbol{x}^*, y^*)\,t, \\ &\vdots \\ x_n &= x_n^* + F_{x_n}(\boldsymbol{x}^*, y^*)\,t, \\ y &= y^* + F_y(\boldsymbol{x}^*, y^*)\,t, \end{cases}$$

pro $t \in \mathbb{R}$. V případě $F_{x_1}(\boldsymbol{x}^*, y^*) \neq 0, \dots, F_{x_n}(\boldsymbol{x}^*, y^*) \neq 0$ je dokonce možné parametr vyloučit a normála je určena rovnostmi

$$\frac{x_1 - x_1^*}{F_{x_1}(\boldsymbol{x}^*, y^*)} = \cdots = \frac{x_n - x_n^*}{F_{x_n}(\boldsymbol{x}^*, y^*)} = \frac{y - y^*}{F_y(\boldsymbol{x}^*, y^*)}. \tag{3.7.3}$$

Příklad 3.7.1.

Určete body $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ vyhovující rovnici

$$x^2 + 2xy - y^2 - 8 = 0,$$

v jejichž okolí není touto rovnicí implicitně zadána funkce $y = f(x)$.

Řešení. Položíme-li $F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 8$, pak hledané body musí splňovat $F(x, y) = 0$ a $F_y(x, y) = 2x - 2y = 0$. Ze druhé podmínky plyne $x = y$, což po dosazení do první rovnosti dává kvadratickou rovnici $2x^2 - 8 = 0$, jejímž řešením jsou $x = \pm 2$. Proto v okolí bodů $[2, 2]$ a $[-2, -2]$ není rovnicí $F(x, y) = 0$ implicitně zadána funkce $y = f(x)$. ▲

Příklad 3.7.2.

Rozhodněte, v okolí kterých bodů je rovnicí

$$x - y^2 = \ln y$$

implicitně zadána funkce $y = f(x)$*, a v těchto bodech vypočtěte* $f'(x)$.

Řešení. Jelikož pro $F(x,y) = x - y^2 - \ln y$ je $F_y(x,y) = -2y - 1/y$, je rovnicí $F(x,y) = 0$ implicitě definovaná funkce $y = f(x)$ v libovolném bodě $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňujícím $y > 0$ a $F(x,y) = 0$. Potom zderivováním rovnosti $F(x, f(x)) = x - f(x)^2 - \ln f(x) = 0$ dostaneme

$$1 - 2f(x)\,f'(x) - \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \quad \text{neboli} \quad f'(x) = \frac{f(x)}{2f^2(x) + 1}.$$

Tentýž výsledek také můžeme získat pomocí vzorce (3.7.1). ▲

Příklad 3.7.3.

Rozhodněte, v okolí kterých bodů je rovnicí

$$2^{xy} + 3^{x+y} = 4$$

implicitně zadána funkce $y = f(x)$*, a v těchto bodech vypočtěte* $f'(x)$*.*

Řešení. Položíme-li $F(x,y) = 2^{xy} + 3^{x+y} - 4$, pak rovnicí $F(x,y) = 0$ je implicitně definovaná funkce $y = f(x)$ v okolí bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ takových, že platí $F(x,y) = 0$ a $F_y(x,y) = x\,2^{xy} \ln 2 + 3^{x+y} \ln 3 \neq 0$. Potom zderivováním rovnosti $F(x, f(x)) = 2^{x\,f(x)} + 3^{x+f(x)} - 4 = 0$ dostaneme

$$2^{x\,f(x)} \ln 2[f(x) + x\,f'(x)] + 3^{x+f(x)} \ln 3[1 + f'(x)] = 0$$

neboli

$$f'(x) = -\frac{f(x)\,2^{x\,f(x)} \ln 2 + 3^{x+f(x)} \ln 3}{x\,2^{x\,f(x)} \ln 2 + 3^{x+f(x)} \ln 3}.$$

Tentýž výsledek také můžeme získat pomocí vzorce (3.7.1). ▲

Příklad 3.7.4.

Rozhodněte, v okolí kterých bodů je rovnicí

$$\sin^2(xy) = 0$$

implicitně zadána funkce $y = f(x)$, a v těchto bodech vypočtěte $f'(x)$ i $f''(x)$.

Řešení. Jelikož pro $F(x, y) = \sin^2(xy)$ je $F_y(x, y) = 2x \sin(xy) \cos(xy)$, je rovnicí $F(x, y) = 0$ implicitě definovaná funkce $y = f(x)$ v libovolném bodě $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ splňujícím $F(x, y) = 0$ a $xy \neq \pi/2 + k\pi/2$ pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$. Potom zderivováním rovnosti $F(x, f(x)) = \sin^2[x f(x)] = 0$ dostaneme

$$2 \sin[x f(x)] \cos[x f(x)] [f(x) + x f'(x)] = 0 \quad \text{neboli} \quad f'(x) = -\frac{f(x)}{x},$$

přičemž tentýž výsledek můžeme získat i pomocí vzorce (3.7.1). Odtud tedy máme $f(x) + x f'(x) = 0$, což po zderivování dává (pozor na derivování součinů)

$$f'(x) + f'(x) + x f''(x) = 0 \quad \text{neboli} \quad f''(x) = -\frac{2f'(x)}{x} = \frac{2f(x)}{x^2}.$$

▲

Příklad 3.7.5.

Rozhodněte, v okolí kterých bodů je rovnicí

$$y^3 - 2xy + x^2 = 0$$

implicitně zadána funkce $y = f(x)$, a v těchto bodech vypočtěte $f'(x)$ i $f''(x)$.

Řešení. Jelikož pro $F(x,y) = y^3 - 2xy + x^2$ je $F_y(x,y) = 3y^2 - 2x$, je rovnicí $F(x,y) = 0$ implicitě definovaná funkce $y = f(x)$ v libovolném bodě $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňujícím $F(x,y) = 0$ a $x \neq 3y^2/2$. Potom zderivováním rovnosti $F(x, f(x)) = f^3(x) - 2x\,f(x) + x^2 = 0$ dostaneme

$$3f^2(x)\,f'(x) - 2f(x) - 2x\,f'(x) + 2x = 0 \quad \text{neboli} \quad f'(x) = \frac{2f(x) - 2x}{3f^2(x) - 2x},$$

přičemž tentýž výsledek můžeme získat i pomocí vzorce (3.7.1). Další derivování předchozí rovnosti dává (pozor na ifileerivování součinů)

$$6f(x)\,[f'(x)]^2 + 3f^2(x)\,f''(x) - 2f'(x) - 2f'(x) - 2x\,f''(x) + 2 = 0$$

neboli

$$f''(x) = \frac{4f'(x) - 6f(x)\,[f'(x)]^2 - 2}{3f^2(x) - 2x}.$$

▲

Příklad 3.7.6.

V bodě $[1,1]$ *určete rovnici tečné roviny i normály k ploše*

$$x^3 + y^3 - 2xy = 0.$$

Řešení. Nejdříve ověříme, zda v okolí bodu $[1,1]$ je rovnicí $F(x,y) = 0$ zadána implicitně funkce $y = f(x)$ pro $F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$. Odpověď je kladná, neboť platí $F(1,1) = 0$ a

$$F_y(x,y) = 3y^2 - 2x \overset{[1,1]}{\rightsquigarrow} 1 \neq 0.$$

Nyní vypočteme hodnotu derivace funkce $f'(x)$ v daném bodě, tj. derivováním rovnosti $F(x, f(x)) = x^3 + f^3(x) - 2x\,f(x) = 0$ dostaneme

$$3x^2 + 3f^2(x)\,f'(x) - 2f(x) - 2x\,f'(x) = 0 \quad \text{neboli} \quad f'(x) = \frac{2f(x) - 3x^2}{3f^2(x) - 2x} \overset{[1,1]}{\rightsquigarrow} -1.$$

Proto ze známých vzorců pro tečnu ke grafu funkce v bodě $[x^*, f(x^*)]$ a její normálu, tj. $t:\ y - f(x^*) = f'(x^*)(x - x^*)$ a $n:\ y - f(x^*) = -(x - x^*)/f'(x^*)$, obdržíme

$$t:\ y - 1 = -(x-1) \quad \text{a} \quad n:\ y - 1 = (x-1)$$

neboli

$$t:\ y + x - 2 = 0 \quad \text{a} \quad n:\ y - x = 0.$$

Tentýž výsledek můžeme získat pomocí vzorců uvedených v Poznámce 3.7.4. Jelikož z rovnosti $F_x(x,y) = 3x^2 - 2y$ plyne $F_x(1,1) = 1$, platí dle zmíněných vzorců

$$t:\ (x-1) + (y-1) = 0 \quad \text{a} \quad n:\ x - 1 = y - 1$$

neboli (opět)

$$t:\ y + x - 2 = 0 \quad \text{a} \quad n:\ y - x = 0.$$

▲

Příklad 3.7.7.

V bodě $[3,1]$ *určete rovnici tečné roviny i normály k ploše*

$$\frac{x+y}{x-y}=2.$$

Řešení. Nejdříve ověříme, zda v okolí bodu $[3,1]$ je rovnicí $F(x,y)=0$ zadána implicitně funkce $y=f(x)$ pro $F(x,y)=\frac{x+y}{x-y}-2$. Odpověď je kladná, neboť platí $F(3,1)=0$ a

$$F_y(x,y)=\frac{2x}{(x-y)^2}\overset{[3,1]}{\rightsquigarrow}\frac{3}{2}\neq 0.$$

Nyní vypočteme hodnotu derivace funkce $f'(x)$ v daném bodě, tj. derivováním rovnosti $F(x,f(x))=\frac{x+f(x)}{x-f(x)}-2=0$ dostaneme

$$\frac{[1+f'(x)][x-f(x)]-[x+f(x)][1-f'(x)]}{[x-f(x)]^2}=0 \quad \text{neboli} \quad f'(x)=\frac{f(x)}{x}\overset{[3,1]}{\rightsquigarrow}\frac{1}{3}.$$

Proto ze známých vzorců pro tečnu ke grafu funkce v bodě $[x^*,f(x^*)]$ a její normálu, tj. $t:\ y-f(x^*)=f'(x^*)(x-x^*)$ a $n:\ y-f(x^*)=-(x-x^*)/f'(x^*)$, obdržíme

$$t:\ y-1=(x-3)/3 \quad \text{a} \quad n:\ y-1=-3(x-3)$$

neboli

$$t:\ 3y-x=0 \quad \text{a} \quad n:\ y+3x-10=0.$$

Tentýž výsledek můžeme získat pomocí vzorců uvedených v Poznámce 3.7.4. Jelikož z rovnosti $F_x(x,y)=-\frac{2y}{(x-y)^2}$ plyne $F_x(3,1)=-1/2$, platí dle zmíněných vzorců

$$t:\ -(x-3)/2+3(y-1)/2=0 \quad \text{a} \quad n:\ -2(x-3)=2(y-1)/3$$

neboli (opět)

$$t:\ 3y-x=0 \quad \text{a} \quad n:\ y+3x-10=0.$$

▲

Příklad 3.7.8.

Najděte body, ve kterých je tečna křivky

$$4x^2 + y^2 - 8x + 6y - 12 = 0$$

rovnoběžná s osou x.

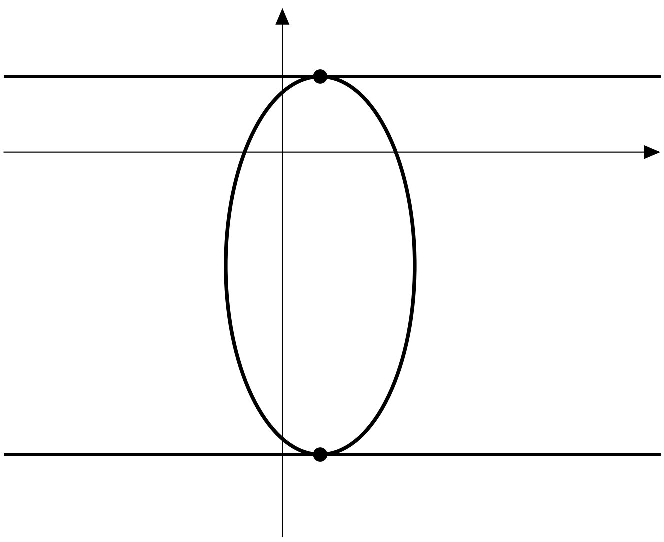
Řešení. K určení rovnice tečny potřebujeme znát souřadnice bodu dotyku $[x^*, y^*]$. Předpokládejme, že tento bod je takový, že v jeho okolí je rovnicí $F(x, y) = 0$ implicitně zadána funkce $y = f(x)$ pro $F(x, y) = 4x^2 + y^2 - 8x + 6y - 12$. Jestliže má být tečna rovnoběžná s osou x, musí být její směrnice nulová neboli $f'(x^*) = 0$. Jelikož derivace funkce f je v bodě $[x^*, f(x^*)]$ rovna

$$f'(x^*) = -\frac{4x^* - 4}{f(x^*) + 3},$$

dostáváme odtud $x^* = 1$. Současně bod $[x^*, y^*]$ musí ležet na dané křivce, tj. musí platit $F(x^*, f(x^*)) = 0$. Proto dosazením $x^* = 1$ dostaneme kvadratickou rovnici

$$f^2(x) + 6f(x) - 16 = 0,$$

jejímiž řešeními jsou hodnoty $f(x^*) = 2$ a $f(x^*) = -8$, tj. souřadnice hledaných bodů dotyku jsou $[1, 2]$ a $[1, -8]$. Jelikož $F_y(x, y) = 2y + 6$, v obou nalezených bodech platí $F_y \neq 0$, takže náš výchozí předpoklad ohledně implicitně dané funkce $y = f(x)$ je splněn a nalezené řešení je korektní. Řešení je také ilustrováno na Obrázku 3.7.57.



Obrázek 3.7.57: Řešení Příkladu 3.7.8.

▲

Příklad 3.7.9.

Určete rovnici tečny procházející počátkem ke kuželosečce

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0.$$

Řešení. K určení rovnice tečny potřebujeme znát souřadnice bodu dotyku $[x^*, y^*]$. Předpokládejme, že tento bod je takový, že v jeho okolí je rovnicí $F(x, y) = 0$ implicitně zadána funkce $y = f(x)$ pro $F(x, y) = 3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1$, tj. $F_y(x, y) \neq 0$. Jelikož v takovém případě je derivace funkce f v bodě $[x^*, f(x^*)]$ rovna

$$f'(x^*) = -\frac{6x^* + 7f(x^*) + 4}{7x^* + 10f(x^*) + 5},$$

má rovnice příslušná tečna tvar

$$t: \; y - f(x^*) = -\frac{6x^* + 7f(x^*) + 4}{7x^* + 10f(x^*) + 5}\,(x - x^*). \tag{3.7.4}$$

Protože hledáme tečnu procházející počátkem, musí být předchozí rovnost splněna pro $[x, y] = [0, 0]$, tj.

$$-f(x^*) = -\frac{6x^* + 7f(x^*) + 4}{7x^* + 10f(x^*) + 5}(-x^*).$$

Vynásobením obou stran rovnice výrazem $7x^* + 10f(x^*) + 5$ dostaneme

$$-f(x^*)[7x^* + 10f(x^*) + 5] = -[6x^* + 7f(x^*) + 4]\,(-x^*),$$

což po roznásobení a sečtení/odečtení stejných členů dává

$$2\big[3(x^*)^2 + +7x^* f(x^*) + 5f^2(x^*)\big] + 5f(x^*) + 4x^* = 0.$$

Současně bod $[x*, y^*]$ musí ležet na kuželosečce, tj. musí platit $F(x^*, f(x^*)) = 0$, díky čemuž můžeme předchozí rovnost upravit do tvaru

$$2\big[-4x^* - 5f(x^*) - 1\big] + 5f(x^*) + 4x^* = 0 \quad \text{neboli} \quad x^* = \frac{-2 - 5f(x^*)}{4}.$$

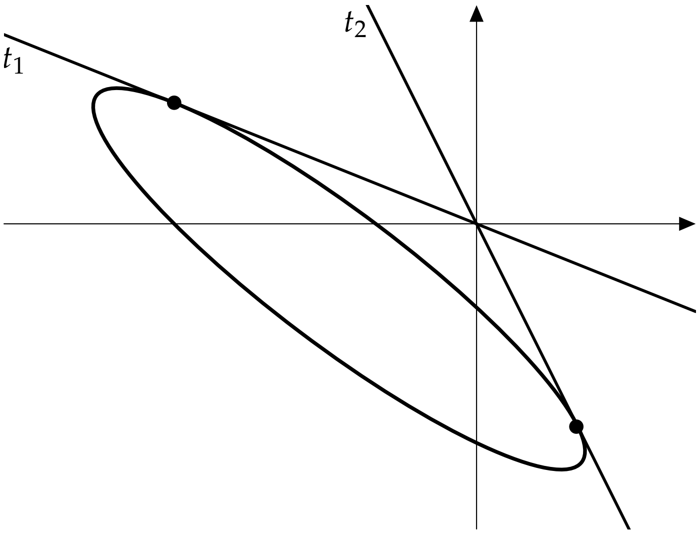
Dosazením poslední rovnosti do podmínky $F(x^*, f(x^*)) = 0$ obdržíme po drobné úpravě kvadratickou rovnici

$$\frac{15f^*(x^*)}{16} + \frac{f(x^*)}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$

jejímiž řešeními jsou hodnoty $f(x^*) = 2/5$ a $f(x^*) = -2/3$. Dopočtením odpovídajících hodnot x^* nalezneme souřadnice dvou bodů dotyku $[-1, 2/5]$ a $[1/3, -2/3]$. Jelikož $F_y(x, y) = 7x + 10y + 5$, v obou nalezených bodech platí $F_y \neq 0$, takže náš výchozí předpoklad ohledně implicitně dané funkce $y = f(x)$ je splněn. Proto dosazením nalezených souřadnic do rovnice (3.7.4) získáme rovnice hledaných tečen

$$t_1: \; 5y + 2x = 0 \quad \text{a} \quad t_2: \; y + 2x = 0.$$

Nalezené řešení je ilustrováno na Obrázku 3.7.58.



Obrázek 3.7.58: Řešení Příkladu 3.7.4.

▲

Příklad 3.7.10.

Na elipse o rovnici

$$x^2 + 3y^2 - 2x + 6y = 8$$

najděte body, v nichž je normála rovnoběžná s osou y.

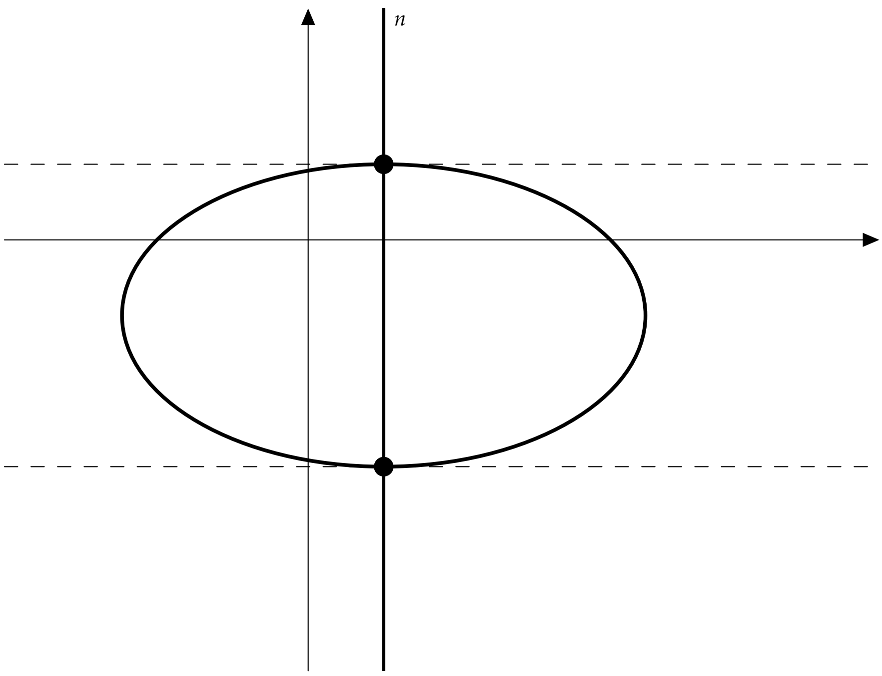
Řešení. K určení rovnice normály potřebujeme znát souřadnice bodu dotyku $[x^*, y^*]$. Předpokládejme, že tento bod je takový, že v jeho okolí je rovnicí $F(x,y) = 0$ implicitně zadána funkce $y = f(x)$ pro $F(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8$, tj. $F_y(x,y) \neq 0$. Potom podle Poznámky 3.7.4 je normála v bodě $[x^*, y^*]$ je dána parametricky

$$\begin{aligned} x &= x^* + t\, F_x(x^*, y^*) = x^* + t\,(2x^* - 2), \\ y &= y^* + t\, F_y(x^*, y^*) = y^* + t\,(6y^* + 6), \end{aligned}$$

Jelikož rovnoběžnost s osou y je totéž jako kolmost na osu x, musí být skalární součin vektorů $\left(2x^* - 2, 6y^* + 6\right)^\top$ a $(1,0)^\top$ nulový, tj.

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2x^* - 2 \\ 6y^* + 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

což dává $2x^* - 2 = 0$ neboli $x^* = 1$. Protože bod $[x^*, y^*]$ musí ležet na elipse, vyřešení rovnice $F(1, y^*) = 0$ určíme také y^*. Tím získáme hledané body $[1, 1]$ a $[1, -3]$.



▲

Příklad 3.7.11.

Rozhodněte, v okolí kterých bodů je rovnicí

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$$

implicitně zadána funkce $y = f(x)$, a určete, ve kterých těchto bodech nastává lokální extrém.

Řešení. Jelikož pro $F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ je

$$F_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{1+y^2/x^2}\,\frac{1}{x} = \frac{y-x}{x^2+y^2},$$

je rovnicí $F(x,y) = 0$ implicitě definovaná funkce $y = f(x)$ v libovolném bodě $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňujícím $F(x,y) = 0$ a $y \neq x \neq 0$ (a v takovém případě nutně $x^2+y^2 > 0$). Protože derivace funkce f je v těchto bodech rovna

$$f'(x) = \frac{x+f(x)}{x-f(x)},$$

je nutná podmínka pro lokální extrém $f'(x) = 0$ splněna v bodech $x + f(x) = 0$. Současně tyto body musí vyhovovat rovnici $F(x, f(x)) = 0$, což po dosazení dává podmínku

$$\ln\sqrt{2x^2} - \operatorname{arctg}(-1) = 0 \quad \text{neboli} \quad \ln(\sqrt{2}\,|x|) = -\pi/4,$$

čemuž vyhovuje $x^* = \pm\,\mathrm{e}^{-\pi/4}/\sqrt{2}$ s odpovídajícími hodnotami $f(x^*) = \mp\,\mathrm{e}^{-\pi/4}/\sqrt{2}$. Samozřejmě tyto body splňují podmínky pro implicitně definované funkce. Nyní musíme rozhodnout, zda v některém z těchto bodů nastává lokální extrém. Jelikož rozhodnutí pomocí znaménka $f'(x)$ v okolí bodu x^* by bylo velmi komplikované, využijeme k řešení hodnotu druhé derivace. Derivováním rovnosti $f'(x)\,[x - f(x)] = x + f(x)$ dostaneme

$$f''(x)\,[x-f(x)] + f'(x)\,[1-f'(x)] = 1 + f'(x) \quad \text{neboli} \quad f''(x) = \frac{1+[f'(x)]^2}{x-f(x)}.$$

Potom v bodě $[\mathrm{e}^{-\pi/4}/\sqrt{2}, -\mathrm{e}^{-\pi/4}/\sqrt{2}]$ je $f''(x^*) > 0$, takže v tomto bodě nastává ostré lokální minimum. Podobně pro $[-\mathrm{e}^{-\pi/4}/\sqrt{2}, \mathrm{e}^{-\pi/4}/\sqrt{2}]$ máme $f''(x^*) < 0$, takže v tomto bodě je ostré lokální maximum. ▲

Příklad 3.7.12.

Rozhodněte, zda je v okolí bodu $[1, 3]$ *rovnicí*

$$\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$$

implicitně zadaná funkce $y = f(x)$*. V případně kladné odpovědi určete, zda graf této funkce leží v okolí bodu* $[1, 3]$ *nad nebo pod tečnou.*

Řešení. Jelikož pro $F(x, y) := \frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2}$ platí $F(1, 3) = 0$ a $F_y(1, 3) = 9 \neq 0$, je v okolí bodu $[1, 3]$ rovnicí $F(x, y) = 0$ implicitně zadaná funkce $y = f(x)$. K zodpovězení druhé otázky potřebuje určit znaménko druhé derivace funkce $y = f(x)$ v bodě $[1, 3]$. Derivováním rovnosti $F(x, f(x)) = 0$ dostaneme

$$9x - 3f^2(x) - 6x\,f(x)\,f'(x) + 3f^2(x)\,f'(x) = 0 \quad \text{neboli} \quad f'(x) = -\frac{9x - 3f^2(x)}{3f^2(x) - 6x\,f(x)}.$$

Dosazením $x = 1$ a $f(1) = 3$ získáme $f'(1) = 2$. Zderivujeme-li první rovnost ještě jednou, obdržíme

$$9 - 12f(x)\,f'(x) - 6x(f'(x))^2 - 6xf(x)\,f''(x) + 6f(x)\,(f'(x))^2 + 3f^2(x)\,f''(x) = 0.$$

Dosazením $x = 1$, $f(1) = 3$ a $f'(1) = 2$ dostaneme $f''(1) = 15/9 > 0$. To znamená, že implicitně zadaná funkce $z = f(x, y)$ je ostře konvexní v okolí bodu $x = 1$, takže její graf leží nad tečnou. ▲

Příklad 3.7.13.

Pro dané $a \in \mathbb{R}$ rozhodněte, v okolí kterých bodů je rovnicí

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = a$$

implicitně zadána funkce $z = f(x, y)$, a v těchto bodech vypočtěte parciální derivace $f_x(x, y)$ a $f_y(x, y)$.

Řešení. Jelikož pro $F(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - a$ je $F_z(x, y, z) = -y \sin z + \cos x$, je rovnicí $F(x, y, z) = 0$ implicitě definovaná funkce $z = f(x, y)$ v libovolném bodě $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ splňujícím $F(x, y, z) = 0$ a $\cos x \neq -y \sin z$. Potom zderivováním rovnosti $F(x, y, f(x, y)) = x \cos y + y \cos f(x, y) + f(x, y) \cos x - a = 0$ vzhledem k x dostaneme

$$\cos y - y \sin f(x, y)\, f_x(x, y) + f_x(x, y) \cos x - f(x, y) \sin x = 0$$

neboli

$$f_x(x, y) = \frac{f(x, y)\, \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin f(x, y)}.$$

Podobně derivováním vzhledem k y obdržíme

$$-x \sin y + \cos f(x, y) - y \sin f(x, y)\, f_y(x, y) + f_y(x, y) \cos x = 0$$

neboli

$$f_y(x, y) = \frac{x \sin y - \cos f(x, y)}{\cos x - y \sin f(x, y)}.$$

Tytéž výsledky je samozřejmě možné získat také pomocí vzorce (3.7.1). ▲

Příklad 3.7.14.

Rozhodněte, v okolí kterých bodů je rovnicí

$$\frac{x+2y+z}{y+z} = x$$

implicitně zadána funkce $z = f(x,y)$, a v těchto bodech vypočtěte parciální derivace $f_x(x,y)$ a $f_y(x,y)$.

Řešení. Jelikož pro $F(x,y,z) = (x+2y+z)/(y+z) - x$ je $F_z(x,y,z) = -\frac{x+y}{(y+z)^2}$, je rovnicí $F(x,y,z) = 0$ implicitě definovaná funkce $z = f(x,y)$ v libovolném bodě $[x,y,z] \in \mathbb{R}^3$ splňujícím $y+z \neq 0$, $F(x,y,z) = 0$ a $x+y \neq 0$. Potom zderivováním rovnosti $F(x,y,f(x,y)) = \frac{x+2y+f(x,y)}{y+f(x,y)} - x = 0$ vzhledem k x dostaneme

$$\frac{[1+f_x(x,y)]\,[y+f(x,y)] - [x+2y+f(x,y)]\,f_x(x,y)}{[y+f(x,y)]^2} - 1 = 0$$

neboli

$$f_x(x,y) = \frac{[1-y-f(x,y)]\,[y+f(x,y)]}{x+y}.$$

Podobně derivováním vzhledem k y obdržíme

$$\frac{[2+f_y(x,y)]\,[y+f(x,y)] - [x+2y+f(x,y)]\,[1+f_y(x,y)]}{[y+f(x,y)]^2} = 0$$

neboli

$$f_y(x,y) = \frac{f(x,y)-x}{x+y}.$$

Tytéž výsledky je samozřejmě možné získat také pomocí vzorce (3.7.1). ▲

Příklad 3.7.15.

Rozhodněte, v okolí kterých bodů je rovnicí

$$\operatorname{arctg}(x+y)+\operatorname{arctg}(y+z)=x+y+z$$

implicitně zadána funkce $z=f(x,y)$, a v těchto bodech vypočtěte parciální derivace $f_x(x,y)$ a $f_y(x,y)$.

Řešení. Jelikož pro $F(x,y,z)=\operatorname{arctg}(x+y)+\operatorname{arctg}(y+z)-x-y-z$ platí $F_z(x,y,z)=\frac{1}{1+(y+z)^2}-1=-\frac{(y+z)^2}{1+(y+z)^2}$, je rovnicí $F(x,y,z)=0$ implicitě definovaná funkce $z=f(x,y)$ v libovolném bodě $[x,y,z]\in\mathbb{R}^3$ splňujícím $F(x,y,z)=0$ a $y+z\neq 0$. Nyní s pomocí vzorce (3.7.1) vypočteme parciální derivace $f_x(x,y)$ a $f_y(x,y)$, k čemuž potřebujeme určit $F_x(x,y,z)$ a $F_y(x,y,z)$, tj.

$$\begin{aligned}F_x(x,y,z)&=\frac{1}{1+(x+y)^2}-1=-\frac{(x+y)^2}{1+(x+y)^2},\\ F_y(x,y,z)&=\frac{1}{1+(x+y)^2}+\frac{1}{1+(y+z)^2}-1.\end{aligned}$$

Odtud proto plyne

$$f_x(x,y)=-\frac{F_x(x,y,f(x,y))}{F_z(x,y,f(x,y))}=-\frac{-\frac{(x+y)^2}{1+(x+y)^2}}{-\frac{[y+f(x,y)]^2}{1+[y+f(x,y)]^2}}=-\frac{(x+y)^2\left\{1+[y+f(x,y)]^2\right\}}{[y+f(x,y)]^2\left[1+(x+y)^2\right]}$$

a

$$\begin{aligned}f_y(x,y)&=-\frac{F_y(x,y,f(x,y))}{F_z(x,y,f(x,y))}=-\frac{\frac{1}{1+(x+y)^2}+\frac{1}{1+[y+f(x,y)]^2}-1}{-\frac{[y+f(x,y)]^2}{1+[y+f(x,y)]^2}}=\\ &=\frac{\frac{1+[y+f(x,y)]^2}{1+(x+y)^2}-[y+f(x,y)]^2}{[y+f(x,y)]^2}=\frac{1-[y+f(x,y)]^2\,(x+y)^2}{[y+f(x,y)]^2\left[1+(x+y)^2\right]}.\end{aligned}$$

▲

Příklad 3.7.16.

Určete rovnici tečné roviny i normály v bodě $[1, 1, 5/6]$ *k ploše dané rovnicí*

$$\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - 3z = 0.$$

Řešení. Nejdříve zjistíme, zda v okolí bodu $[1, 1, 5/6]$ je rovnicí $F(x, y, z) = 0$ zadána implicitně funkce $z = f(x, y)$ pro $F(x, y, z) = 9x^2/2 - 3xy^2 + y^3 - 3z$. Odpověď je kladná, neboť platí $F(1, 1, 5/6) = 0$ a

$$F_z(x, y, z) = -3 \overset{[1,1,5/6]}{\rightsquigarrow} -3 \neq 0.$$

Nyní určíme ještě zbývající parciální derivace funkce $F(x, y, z)$, tj.

$$F_x(x, y, z) = 9x - 3y^2 \overset{[1,1,5/6]}{\rightsquigarrow} 6,$$
$$F_y(x, y, z) = -6xy + 3y^2 \overset{[1,1,5/6]}{\rightsquigarrow} -3.$$

Proto podle vzorce (3.7.2) dostáváme rovnici tečny

$$t:\ 6(x-1) - 3(y-1) - 3(z - 5/6) = 0 \quad \text{neboli} \quad t:\ 12x - 6y - 6z - 1 = 0.$$

Protože jednotlivé parciální derivace jsou nenulové, můžeme použít vzorec (3.7.3) pro určení normály

$$n:\ x - 1 = 2(1 - y) = 2(5/6 - z),$$

což lze také vyjádřit parametricky

$$n: \begin{cases} x = 1 + 6t, \\ y = 1 - 3t, \\ z = 5/6 - 3t \end{cases}$$

pro $t \in \mathbb{R}$. ▲

Příklad 3.7.17.

Určete rovnici tečné roviny i normály v bodě $[2, 4/3, -1]$ *k ploše dané rovnicí*

$$\frac{x^2}{2} - 3y + 2z^2 = 0.$$

Řešení. Nejdříve zjistíme, zda v okolí bodu $[2, 4/3, -1]$ je rovnicí $F(x, y, z) = 0$ zadána implicitně funkce $z = f(x, y)$ pro $F(x, y, z) = x^2/2 - 3y + 2z^2$. Odpověď je kladná, neboť platí $F(2, 4/3, -1) = 0$ a

$$F_z(x, y, z) = 4z \quad \overset{[2,4/3,-1]}{\rightsquigarrow} \quad -4 \neq 0.$$

Nyní určíme ještě zbývající parciální derivace funkce $F(x, y, z)$, tj.

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z) = x \quad &\overset{[2,4/3,-1]}{\rightsquigarrow} \quad 2, \\ F_y(x, y, z) = -3 \quad &\overset{[2,4/3,-1]}{\rightsquigarrow} \quad -3. \end{aligned}$$

Proto podle vzorce (3.7.2) dostáváme rovnici tečny

$$t: \; 2(x-2) - 3(y - 4/3) - 4(z+1) = 0 \quad \text{neboli} \quad t: \; 2x - 3y - 4z - 4 = 0.$$

Protože jednotlivé parciální derivace jsou nenulové, můžeme použít vzorec (3.7.3) pro určení normály

$$n: \; \frac{x-2}{2} = -\frac{y - 4/3}{3} = -\frac{z+1}{4} \quad \text{neboli} \quad n: \; 2x - 4 = -\frac{4}{3}y + \frac{16}{9} = -z - 1,$$

což lze také vyjádřit parametricky

$$n: \begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = 4/3 - 3t, \\ z = -1 - 4t \end{cases}$$

pro $t \in \mathbb{R}$. ▲

Příklad 3.7.18.

Určete rovnici tečné roviny i normály v bodě $[-1,3,2]$ *k ploše dané rovnicí*

$$\ln(xy+z^2)=0.$$

Řešení. Nejdříve zjistíme, zda v okolí bodu $[-1,3,2]$ je rovnicí $F(x,y,z)=0$ zadána implicitně funkce $z=f(x,y)$ pro $F(x,y,z)=\ln(xy+z^2)$. Odpověď je kladná, neboť platí $F(-1,3,2)=0$ a

$$F_z(x,y,z)=\frac{2z}{xy+z^2}\overset{[-1,3,2]}{\rightsquigarrow}4\neq 0.$$

Nyní určíme ještě zbývající parciální derivace funkce $F(x,y,z)$, tj.

$$F_x(x,y,z)=\frac{y}{xy+z^2}\overset{[-1,3,2]}{\rightsquigarrow}3,$$
$$F_y(x,y,z)=\frac{x}{xy+z^2}\overset{[-1,3,2]}{\rightsquigarrow}-1.$$

Proto podle vzorce (3.7.2) dostáváme rovnici tečny

$$t:\ 3(x+1)-1(y-3)+4(z-2)=0\quad\text{neboli}\quad t:\ 3x-y+4z-2=0.$$

Protože jednotlivé parciální derivace jsou nenulové, můžeme použít vzorec (3.7.3) pro určení normály

$$n:\ \frac{x+1}{3}=3-y=\frac{z-2}{4},$$

což lze také vyjádřit parametricky

$$n:\ \begin{cases}x=-1+3t,\\ y=3-t,\\ z=2+4t\end{cases}$$

pro $t\in\mathbb{R}$. ▲

Příklad 3.7.19.

Určete rovnici tečné roviny i normály v bodě $[1,1,1]$ *k ploše dané rovnicí*

$$z = y + \ln\frac{x}{z}.$$

Řešení. Nejdříve ověříme, zda v okolí bodu $[1,1,1]$ je rovnicí $F(x,y,z) = 0$ zadána implicitně funkce $z = f(x,y)$ pro $F(x,y,z) = y + \ln\frac{x}{z} - z$. Odpověď je kladná, neboť platí $F(1,1,1) = 0$ a

$$F_z(x,y,z) = \frac{z}{x}\left(-\frac{x}{z^2}\right) - 1 \overset{[1,1,1]}{\rightsquigarrow} -2 \neq 0.$$

Nyní určíme ještě zbývající parciální derivace funkce $F(x,y,z)$, tj.

$$F_x(x,y,z) = \frac{z}{x}\frac{1}{z} = \frac{1}{x} \overset{[1,1,1]}{\rightsquigarrow} 1,$$
$$F_y(x,y,z) = 1 \overset{[1,1,1]}{\rightsquigarrow} 1.$$

Proto podle vzorce (3.7.2) dostáváme rovnici tečny

$$t:\ 1(x-1) + 1(y-1) - 2(z-1) = 0 \quad \text{neboli} \quad t:\ x + y - 2z = 0.$$

Protože jednotlivé parciální derivace jsou nenulové, můžeme použít vzorec 3.7.3 pro určení normály

$$n:\ x - 1 = y - 1 = \frac{1-z}{2},$$

což lze také vyjádřit parametricky

$$n:\ \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

pro $t \in \mathbb{R}$. ▲

Příklad 3.7.20.

K elipsoidu

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$$

určete rovnici tečné roviny rovnoběžné s rovinou $\alpha:\ x + 4y + 6z = 0.$

Řešení. K nalezení rovnice hledané tečné roviny potřebujeme znát souřadnice bodu dotyku $[x^*, y^*, z^*]$. Předpokládejme, že tento bod je takový, že v jeho okolí je rovnicí $F(x, y, z) = 0$ implicitně zadána funkce $z = f(x, y)$ pro $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$, tj. $F_z(x^*, y^*, z^*) = 6z^* \neq 0$. Potom z parciálních derivací

$$F_x(x, y, z) = 2x \rightsquigarrow 2x^*, \quad F_y(x, y, z) = 4y \rightsquigarrow 4y^*$$

dostáváme s pomocí vzorce (3.7.2) rovnici tečné roviny

$$t:\ 2x^*\,(x - x^*) + 4y^*\,(y - y^*) + 6z^*\,(z - z^*) = 0,$$

jejímž normálovým vektorem je $(2x^*, 4y^*, 6z^*)^\top$. Jelikož roviny t a α mají být rovnoběžné, musí být jejich normálové vektory lineárně závislé, tj. $(2x^*, 4y^*, 6z^*)^\top = a(1, 4, 6)^\top$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, z čehož plyne

$$2x^* = a, \quad 4y^* = 4a, \quad 6z^* = 6a.$$

Tedy platí $[x^*, y^*, z^*] = [a/2, a, a]$. Současně tento bod musí ležet na elipsoidu, takže musí splňovat rovnici $F(x^*, y^*, z^*) = 0$, tj.

$$\frac{a^2}{4} + 2a^2 + 3a^2 = 21 \quad \Longrightarrow \quad \frac{21}{4}a^2 = 21 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \pm 2.$$

Nalezli jsme tedy dokonce dva vhodné body dotyku $\pm[1, 2, 2]$, které zjevně splňují náš výchozí předpoklad ohledně implicitně dané funkce. Hledané tečny mají (po úpravě) rovnice

$$t_1:\ x + 4y + 6z = 21, \qquad t_2:\ x + 4y + 6z = -21.$$

▲

Příklad 3.7.21.

Najděte stacionární body funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 16$$

a zjistěte, zda v nich nastává extrém.

Řešení. Ze zadání snadno poznáme, že grafem funkce $z = f(x, y)$ je koule se středem v bodě $[1, 3, 0]$ a poloměrem 4. Takže funkce $z = f(x, y)$ zadaná implicitně pomocí rovnice $F(x, y, z) = 0$ pro $F(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2$ nabývá ostrého lokálního (a současně globálního) minima v bodě $[1, 3, -4]$ a ostrého lokálního (a současně globálního) maxima v bodě $[1, 3, 4]$. Nyní se o tomtéž přesvědčíme pomocí teorie pro implicitní funkce.

Je-li $[x^*, y^*, z^*]$ stacionárním bodem funkce $z = f(x, y)$, pak obě parciální derivace musí splňovat

$$f_x(x^*, y^*) = -F_x(x^*, y^*, z^*) / F_z(x^*, y^*, z^*) = 0, \tag{3.7.5}$$
$$f_y(x^*, y^*) = -F_y(x^*, y^*, z^*) / F_z(x^*, y^*, z^*) = 0, \tag{3.7.6}$$

tj. $F_x(x^*, y^*, z^*) = F_y(x^*, y^*, z^*) = 0$ a současně $F_z(x^*, y^*, z^*) \neq 0$. Proto

$$F_x(x^*, y^*, z^*) = 2(x^* - 1) = 0 \rightsquigarrow x^* = 1 \quad \text{a} \quad F_y(x^*, y^*, z^*) = 2(y^* - 3) = 0 \rightsquigarrow y^* = 3.$$

Odtud máme první dvě souřadnice stacionárního bodu a z podmínky $F(x^*, y^*, z^*) = 0$ dopočteme z^*, tj. $(z^*)^2 = 16$, čemuž vyhovuje $z_1^* = 4$ a $z_2^* = -4$. Nalezli jsme tedy dva stacionární body $[1, 3, 4]$ a $[1, 3, -4]$, které jistě splňují požadavek $F_z(x^*, y^*, z^*) = 2z^* \neq 0$. Nyní s pomocí parciálních derivací druhého řádu ověříme, zda v těchto bodech nastává extrém. Z rovností $f(x, y)\, f_x(x, y) = 1 - x$ a $f(x, y)\, f_y(x, y) = 3 - y$, které plynou z (3.7.5) a (3.7.6), dalším derivováním obdržíme

$$f_x^2(x, y) + f(x, y)\, f_{xx}(x, y) = -1, \quad f_y(x, y)\, f_x(x, y) + f(x, y)\, f_{xy}(x, y) = 0,$$
$$f_y^2(x, y) + f(x, y)\, f_{yy}(x, y) = -1.$$

V bodě $[x_1^*, y_1^*, z_1^*] = [1, 3, 4]$ proto s využitím faktu $f_x(x_1^*, y_1^*) = f_y(x_1^*, y_1^*) = 0$ platí $f_{xx}(x_1^*, y_1^*) = -1/4 = f_{yy}(x_1^*, y_1^*)$ a $f_{xy}(x_1^*, y_1^*) = 0$. Takže Hessova matice funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[1, 3, 4]$, tj.

$$\nabla^2 f(x_1^*, y_1^*) = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix},$$

je negativně definitní, a tudíž v bodě $[1, 3, 4]$ nastává ostré lokální maximum.

V bodě $[x_2^*, y_2^*, z_2^*] = [1, 3, -4]$ dostaneme analogickým postupem $f_{xx}(x_2^*, y_2^*) = 1/4 = f_{yy}(x_2^*, y_2^*)$ a $f_{xy}(x_2^*, y_2^*) = 0$. Takže Hessova matice funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[1, 3, 4]$, tj.

$$\nabla^2 f(x_2^*, y_2^*) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix},$$

je pozitivně definitní, a tudíž v bodě $[1, 3, -4]$ nastává ostré lokální minimum. ▲

Příklad 3.7.22.

Najděte stacionární body funkce $z = f(x,y)$ zadané implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z = 10$$

a zjistěte, zda v nich nastává extrém.

Řešení. Je-li $[x^*, y^*, z^*]$ stacionárním bodem funkce $z = f(x,y)$ zadané implicitně rovnicí $F(x,y,z) = 0$ pro $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10$, pak obě parciální derivace musí splňovat

$$f_x(x^*, y^*) = -F_x(x^*, y^*, z^*)/F_z(x^*, y^*, z^*) = 0, \tag{3.7.7}$$
$$f_y(x^*, y^*) = -F_y(x^*, y^*, z^*)/F_z(x^*, y^*, z^*) = 0, \tag{3.7.8}$$

tj. $F_x(x^*, y^*, z^*) = F_y(x^*, y^*, z^*) = 0$ a současně $F_z(x^*, y^*, z^*) \neq 0$. Proto

$$F_x(x^*, y^*, z^*) = 2x^* - 2 = 0 \rightsquigarrow x^* = 1 \quad \text{a} \quad F_y(x^*, y^*, z^*) = 2y^* + 2 = 0 \rightsquigarrow y^* = -1$$

Odtud máme první dvě souřadnice stacionárního bodu a z podmínky $F(x^*, y^*, z^*) = 0$ dopočteme z^*, tj. $(z^*)^2 - 4z^* - 12 = 0$, čemuž vyhovuje $z_1^* = 6$ a $z_2^* = -2$. Nalezli jsme tedy dva stacionární body $[1, -1, 6]$ a $[1, -1, -2]$, které jistě splňují požadavek $F_z(x^*, y^*, z^*) = 2z^* - 4 \neq 0$. Nyní s pomocí parciálních derivací druhého řádu ověříme, zda v těchto bodech nastává extrém. Z rovností $[f(x,y) - 2]\, f_x(x,y) = 1 - x$ a $[2 - f(x,y)]\, f_y(x,y) = y + 1$, které plynou z (3.7.7) a (3.7.8), dalším derivováním obdržíme

$$f_x^2(x,y) + [f(x,y) - 2]\, f_{xx}(x,y) = -1, \quad f_y(x,y)\, f_x(x,y) + [f(x,y) - 2]\, f_{xy}(x,y) = 0,$$
$$-f_y^2(x,y) + [2 - f(x,y)]\, f_{yy}(x,y) = 1.$$

V bodě $[x_1^*, y_1^*, z_1^*] = [1, -1, 6]$ proto s využitím faktu $f_x(x^*, y^*) = f_y(x^*, y^*) = 0$ platí $f_{xx}(x_1^*, y_1^*) = -1/4 = f_{yy}(x_1^*, y_1^*)$ a $f_{xy}(x_1^*, y_1^*) = 0$. Takže Hessova matice funkce $z = f(x,y)$ v bodě $[1, -1, 6]$, tj.

$$\nabla^2 f(x_1^*, y_1^*) = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix},$$

je negativně definitní, a tudíž v bodě $[1, -1, 6]$ nastává ostré lokální maximum.

V bodě $[x_2^*, y_2^*, z_2^*] = [1, -1, -2]$ dostaneme zcela analogickým postupem $f_{xx}(x_2^*, y_2^*) = 1/4 = f_{yy}(x_2^*, y_2^*)$ a $f_{xy}(x_2^*, y_2^*) = 0$. Takže Hessova matice funkce $z = f(x,y)$ v bodě $[1, -1, -2]$, tj.

$$\nabla^2 f(x_2^*, y_2^*) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix},$$

je pozitivně definitní, a tudíž v bodě $[1, -1, -2]$ nastává ostré lokální minimum. ▲

Příklad 3.7.23.

Rozhodněte, zda má funkce $z = f(x,y)$ implicitně zadaná rovnicí

$$z^2 + \ln(x+y+z) = xy$$

lokální extrém v bodě $[1,1,-1]$. V případě kladné odpovědi určete také typ extrému.

Řešení. Nejdříve ověříme, zda v okolí bodu $[1,1,-1]$ je rovnicí $F(x,y,z) = 0$ zadána implicitně funkce $z = f(x,y)$ pro $F(x,y,z) = z^2 - xy + \ln(x+y+z)$. Odpověď je kladná, neboť platí $F(1,1,-1) = 0$ a

$$F_z(x,y,z) = 2z + \frac{1}{x+y+z} \overset{[1,1,-1]}{\rightsquigarrow} -1 \neq 0.$$

Nyní určíme ještě zbývající parciální derivace funkce $F(x,y,z)$, tj.

$$F_x(x,y,z) = -y + \frac{1}{x+y+z} \overset{[1,1,-1]}{\rightsquigarrow} 0,$$
$$F_y(x,y,z) = -x + \frac{1}{x+y+z} \overset{[1,1,-1]}{\rightsquigarrow} 0.$$

Odtud plyne

$$f_x(x,y) = -\frac{-y + \frac{1}{x+y+f(x,y)}}{2f(x,y) + \frac{1}{x+y+f(x,y)}} = \frac{y\,[x+y+f(x,y)] - 1}{2f(x,y)\,[x+y+f(x,y)] + 1} \overset{[1,1,-1]}{\rightsquigarrow} 0, \tag{3.7.9}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{-x + \frac{1}{x+y+f(x,y)}}{2f(x,y) + \frac{1}{x+y+f(x,y)}} = \frac{x\,[x+y+f(x,y)] - 1}{2f(x,y)\,[x+y+f(x,y)] + 1} \overset{[1,1,-1]}{\rightsquigarrow} 0, \tag{3.7.10}$$

tj. obě parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x,y)$ jsou nulové v bodě $[1,1,-1]$, takže tento bod je stacionárním bodem implicitně zadané funkce f. Nyní s pomocí parciálních derivací druhého řádu ověříme, zda-li zde nastává extrém. Z rovností (3.7.9) a (3.7.10) po úpravě dostaneme

$$\{2f(x,y)\,[x+y+f(x,y)] + 1\}\, f_x(x,y) = y\,[x+y+f(x,y)] - 1,$$
$$\{2f(x,y)\,[x+y+f(x,y)] + 1\}\, f_y(x,y) = x\,[x+y+f(x,y)] - 1,$$

z čehož po dalším derivování plyne

$$\{2f_x(x,y)\,[x+y+f(x,y)] + 2f(x,y)\,[1+f_x(x,y)]\}\, f_x(x,y) + \\ + \{2f(x,y)\,[x+y+f(x,y)] + 1\}\, f_{xx}(x,y) = y\,[1+f_x(x,y)],$$
$$\{2f_y(x,y)\,[x+y+f(x,y)] + 2f(x,y)\,[1+f_y(x,y)]\}\, f_x(x,y) + \\ + \{2f(x,y)\,[x+y+f(x,y)] + 1\}\, f_{xy}(x,y) = x+y+f(x,y) + y\,[1+f_y(x,y)]$$
$$\{2f_y(x,y)\,[x+y+f(x,y)] + 2f(x,y)\,[1+f_y(x,y)]\}\, f_y(x,y) + \\ + \{2f(x,y)\,[x+y+f(x,y)] + 1\}\, f_{yy}(x,y) = x\,[1+f_y(x,y)].$$

Odtud plyne $f_{xx}(1,1) = -1 = f_{yy}(1,1)$ a $f_{xy}(1,1) = -2$, takže Hessova matice implicitně zadané funkce $z = f(x,y)$ ve stacionárním bodě $[1,1,-1]$, tj.

$$\nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

je indefinitní. Proto v bodě $[1,1,-1]$ extrém nenastává (je to sedlový bod funkce f). ▲

Příklad 3.7.24.

Rozhodněte, zda plocha

$$x + y^2 + z^3 + z = 4$$

leží v okolí bodu $[1,1,1]$ *nad nebo pod tečnou.*

Řešení. Nejdříve ověříme, zda v okolí bodu $[1,1,1]$ je rovnicí $F(x,y,z) = 0$ zadána implicitně funkce $z = f(x,y)$ pro $F(x,y,z) = x + y^2 + z^3 + z - 4$. Odpověď je kladná, neboť platí $F(1,1,1) = 0$ a

$$F_z(x,y,z) = 3z^2 + 1 \overset{[1,1,1]}{\rightsquigarrow} 4 \neq 0.$$

Nyní určíme ještě zbývající parciální derivace funkce $F(x,y,z)$, tj.

$$F_x(x,y,z) = 1 \overset{[1,1,1]}{\rightsquigarrow} 1, \quad F_y(x,y,z) = 2y \overset{[1,1,1]}{\rightsquigarrow} 2.$$

Odtud plyne

$$f_x(x,y) = -\frac{1}{3f^2(x,y)+1} \overset{[1,1,1]}{\rightsquigarrow} -\frac{1}{4}, \tag{3.7.11}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{2y}{3f^2(x,y)+1} \overset{[1,1,1]}{\rightsquigarrow} -\frac{1}{2}. \tag{3.7.12}$$

Pro zodpovězení dané otázky potřebujeme ještě určit parciální derivace druhého řádu pro funkci $z = f(x,y)$. Z rovností (3.7.11) a (3.7.12) po úpravě dostaneme

$$[3f^2(x,y)+1]\, f_x(x,y) = -1, \quad [3f^2(x,y)+1]\, f_y(x,y) = -2y,$$

z čehož po dalším derivování plyne

$$\begin{aligned} 6f(x,y)\, f_x^2(x,y) + [3f^2(x,y)+1]\, f_{xx}(x,y) &= 0, \\ 6f(x,y)\, f_y(x,y)\, f_x(x,y) + [3f^2(x,y)+1]\, f_{xy}(x,y) &= 0, \\ 6f(x,y)\, f_y^2(x,y) + [3f^2(x,y)+1]\, f_{yy}(x,y) &= -2. \end{aligned}$$

Odtud dosazením hodnot $f(1,1) = 1$, $f_x(1,1) = -1/4$ a $f_y(1,1) = -1/2$ obdržíme $f_{xx}(1,1) = -3/32$, $f_{xy}(1,1) = -3/16$ a $f_{yy}(1,1) = -7/8$. Takže Hessova matice implicitně zadané funkce $z = f(x,y)$ v bodě $[1,1,1]$, tj.

$$\nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} -3/32 & -3/16 \\ -3/16 & -7/8 \end{pmatrix},$$

je negativně definitní. Proto graf implicitně zadané funkce $z = f(x,y)$ leží v okolí bodu $[1,1,1]$ pod tečnou (funkce f je totiž v tomto okolí dokonce ostře konkávní – ale to je již za rámcem naší sbírky). ▲

Seznam použité literatury

[1] B. P. Děmidovič, *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, první vydání, Fragment, Havlíčkův Brod, 2003.

[2] Z. Došlá, O. Došlý, *Diferenciální počet funkcí více proměnných proměnné*, druhé vydání, Masarykova univerzita, Brno, 1999.

[3] Z. Došlá, O. Došlý, *Metrické prostory*, 2. vydání, Masarykova univerzita, Brno, 2000.

[4] J. Dula, J. Hájek, *Cvičení z matematické analýzy: Obyčejné diferenciální rovnice*, první vydání, Masarykova univerzita, Brno, 1990.

[5] J. Eliaš, J. Horváth, J. Kajan, *Zbierka úloh z vyššej matematiky 3*, druhé vydání, ALFA, Bratislava, 1971.

[6] J. Hamhalter, J. Tišer, *Diferenciální počet funkcí více proměnných* [online], ČVUT, Praha, 2005 [vid. 28. února 2016]. Dostupné z `http://math.feld.cvut.cz/tiser/difpocet.html`

[7] F. Jirásek, S. Čipera, M. Vacek, *Sbírka řešených příkladů z matematiky II*, SNTL, Praha, 1989.

[8] Z. Kadeřábek, *Limity funkcí více proměnných*, bakalářská práce, Masarykova univerzita, Brno, 2007.

[9] R. Plch, *Příklady z matematické analýzy: Diferenciální rovnice*, první vydání, Masarykova univerzita, Brno, 2007.

[10] M. Ráb, *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, třetí vydání, Masarykova univerzita, Brno, 1998.