

MPE_VPAM: VYBRANÉ PARTIE APLIKOVANÉ MATEMATIKY

PETR ZEMÁNEK (MASARYKOVA UNIVERZITA, BRNO)

Kapitola 6: Maximalizace bez omezujících podmínek
(verze: 23. září 2020)



1 OBECNÝ ÚVOD

2 VOLNÉ EXTRÉMY



Obrázek převzat z goo.gl/TBdxET

Cum enim Mundi universi fabrica sit perfectissima atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quaequam eluceat.

/Jelikož uspořádání vesmíru je na nejvýše dokonalé a ve skutečnosti dílem nejmoudřejšího Stvořitele, neexistuje ve vesmíru zhola nic, z čeho by nevyzařoval nějaký princip maxima nebo minima./

Leonhard Euler (1707–1783)

Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti (1744; viz Additamentum 1 /str. 245/ dostupné na adrese goo.gl/9u4An2)

Obečnou optimalizační úlohou můžeme rozumět problém nalezení takového bodu v dané (připustné) množině, že v něm dané „účelové zobrazení“ přiřazující prvkům připustné množiny hodnoty z $\mathbb{R}$ nabývá v jistém smyslu optima (max./min.), tj. úlohu

$$\mathbb{F}(x) \rightarrow \text{opt}, \quad x \in \mathbb{X}.$$

Řešením této úlohy rozumíme prvek $x^* \in \mathbb{X}$ takový, že

$$x^* := \arg \text{opt}_{x \in \mathbb{X}} \mathbb{F}(x) = \{x \in \mathbb{X} \mid \mathbb{F}(x) \bowtie \mathbb{F}(y) \text{ pro všechna } y \in \mathbb{X}\}.$$

V některých případech ovšem není nutné (nebo možné) takový bod x^* najít a místo toho se spokojíme pouze s nalezením optimální hodnoty účelového zobrazení, tj. číslo

$$\mathbb{F}^* := \widetilde{\text{opt}}_{x \in \mathbb{X}} \mathbb{F}(x).$$

Takto formulované optimalizační úlohy můžeme podle charakteru neznámých veličin rozdělit do dvou skupin:

- funkční optimalizace ($\rightsquigarrow$ variační počet)
- parametrické optimalizace ($\rightsquigarrow$ matematické programování)

FUNKČNÍ OPTIMALIZACE

Přípustná množina = prostor funkcí (skalárních nebo vektorových) N -rozměrné proměnné definovaných na jisté množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, s jistými vlastnostmi (spojitost, diferencovatelnost apod.) a splňujícími další (tzv. vedlejší) podmínky dané soustavou nějakých algebraických, transcendentních, diferenciálních nebo integrálních rovnic či nerovnic

Účelové zobrazení = funkcionál (tj. zobrazení přiřazující každé funkci z přípustné množiny prvek z $\mathbb{R}$)

V takovém případě tedy hledáme funkci z přípustné množiny, pro kterou daný funkcionál nabývá největší/nejmenší hodnotu mezi všemi funkcemi z přípustné množiny.

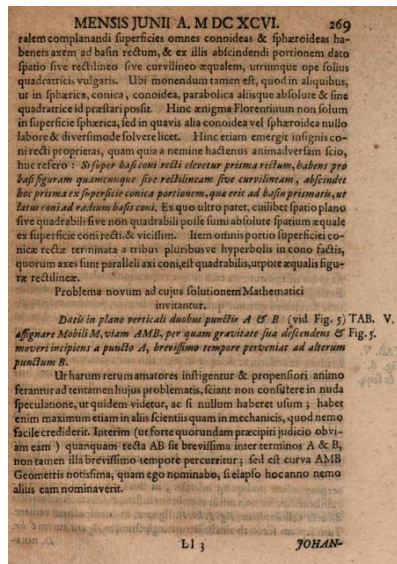
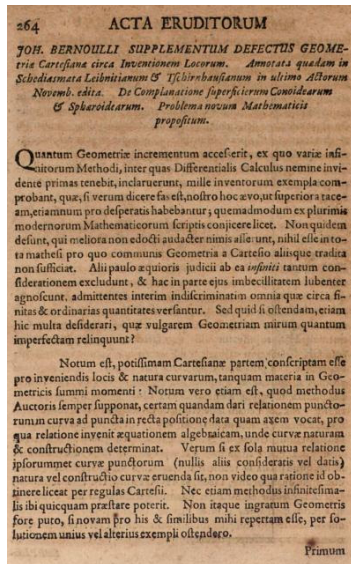


Např. mezi všemi funkcemi třídy $C^1[a, b]$ najít tu, jejíž graf je nejkratší spojnici bodů $A = [x_1, y_1]$ a $B = [x_2, y_2]$, tj.

$$\mathcal{J}[F] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx \rightarrow \min.$$

VARIAČNÍ POČET (M6800; JARO 2018 + 2k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

Johan Bernoulli, Acta Eruditorum (1696), viz goo.gl/26Fgyj





Já, Johann Bernoulli, oslovuji nejbystřejší matematiky na světě. Není nic přitažlivějšího pro inteligentní lidi než čestný a náročný problém, jehož možné řešení přinese slávu a zůstane trvalým památníkem. Následující řady příkladů Pascala, Fermata atd. doufám, že získám vděčnost celé vědecké komunity tím, že před nejlepší matematiky naší doby postavím problém, který otestuje jejich metody a sílu jejich intelektu. Jestliže mi kdokoli sdělí řešení navrhovaného problému, veřejně prohlásím, že je hoden uznání.

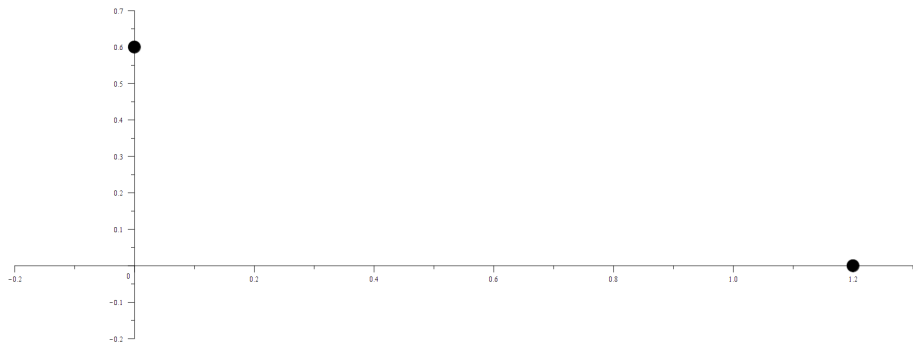
Obrázek převzat z goo.gl/UqiNUc

Problema Novum, ad cuius Solutionem Mathematici invitantur.

Datis in plano verticali duobus punctis A et B assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.

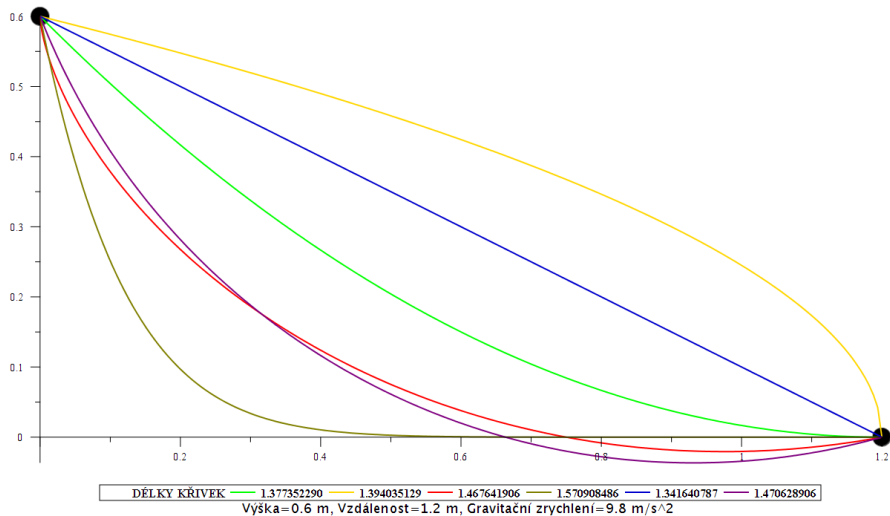
/Nová úloha, k jejímuž řešení se vyzývají matematikové: Nechť jsou dány dva body A a B ve svislé rovině. Určete křivku vyznačenou hmotným bodem, který startuje v bodě A a pouhým působením gravitace dosáhne bodu B v nejkratším možném čase (=brachistochrona)./

ÚLOHA O BRACHISTOCHRONĚ – VOLBA BODŮ

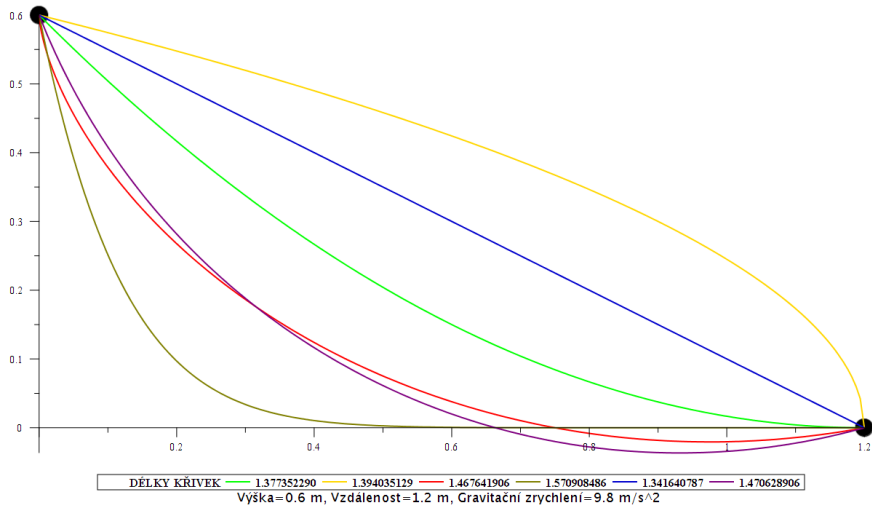


Výška=0.6 m, Vzdálenost=1.2 m, Gravitační zrychlení=9.8 m/s²

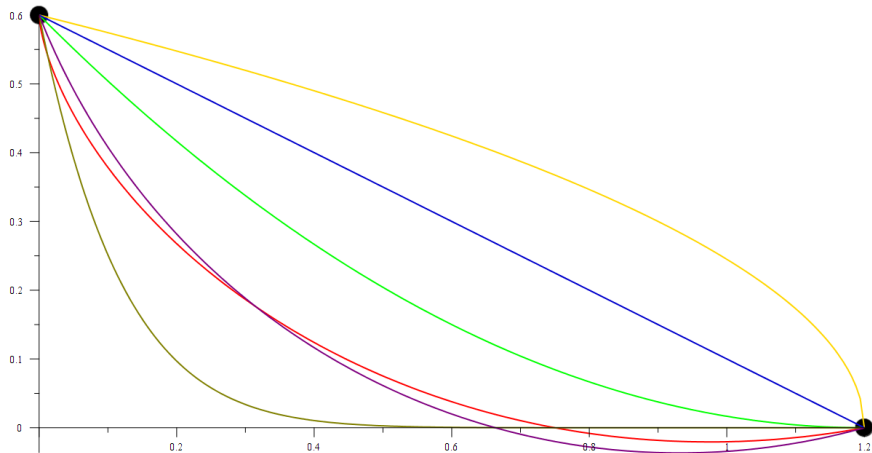
MOŽNÁ ŘEŠENÍ



ANIMACE



ANIMACE



DĚLKY KŘÍVEK 1.377352290 1.394035129 1.467641906 1.570908486 1.341640787 1.470628906

Výška=0.6 m, Vzdálenost=1.2 m, Gravitační zrychlení=9.8 m/s²

KŘÍVKY ["PŘÍMKA", 0.7824607963]

KŘÍVKY ["PARABOLA1", 0.6683953784]

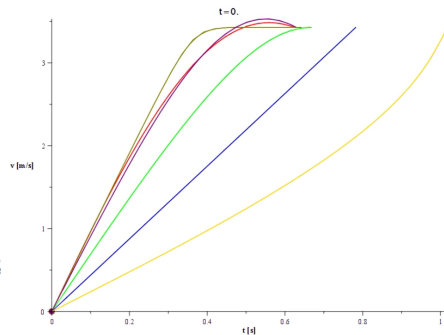
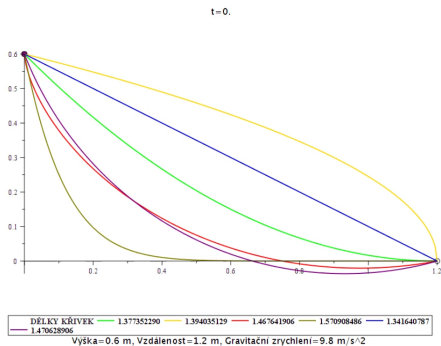
KŘÍVKY ["PARABOLA2", 1.017818985]

KŘÍVKY ["POLYNOM", 0.6406276898]

KŘÍVKY ["KRUŽNICE", 0.6286226767]

KŘÍVKY ["BRACHISTOCHRONA", 0.6243053388]

ANIMACE #2



KŘÍVKA ["PŘÍMKA", 0.7824607963]

KŘÍVKA ["POLYNOM", 0.6406276898]

KŘÍVKA ["PARABOLA1", 0.6683953784]

KŘÍVKA ["KRUŽNICE", 0.6286226767]

KŘÍVKA ["PARABOLA2", 1.017818985]

KŘÍVKA ["BRACHISTOCHRONA", 0.6243053388]

NOC VĚDCŮ, 5. ŘÍJNA 2018 OD 18 HODIN, [HTTPS://NOC-VEDCU.MUNI.CZ/](https://noc-vedcu.muni.cz/)





↑ Obrázek převzat z goo.gl/rV9esA

BVV – Pavilon A →

Obrázek převzat z goo.gl/hCHQc6





↑ BVV – Pavilon A
Obrázek převzat z goo.gl/EmGpzh



↑ Casa Milà (Barcelona © Antonio Gaudí)
Obrázek převzat z goo.gl/CAfYRe



Gateway Arch (St. Louis)



Video převzato z goo.gl/RSeshr

PARAMETRICKÁ OPTIMALIZACE

Přípustná množina = množina $X \subseteq \mathbb{R}^N$ vymezená jistými podmínkami danými soustavou nějakých algebraických nebo transcendentních rovnic či nerovnic

účelové zobrazení = reálná funkce F definovaná (alespoň) na přípustné množině. V tomto kontextu bývá (v závislosti na oblasti) funkce F označována jako účelová, cílová, ztrátová, nákladová, nepřímá užitková, užitková, energetická atd.

V takovém případě tedy hledáme bod $x^* \in X$, ve kterém daná reálná funkce F nabývá své největší hodnoty mezi všemi body $x \in X$, tj. máme řešit úlohu

$$F(x) \rightarrow \max, \quad x \in X, \quad (1)$$

přičemž množinu X můžeme vyjádřit jako

$$X := \{x \in \mathbb{R}^N \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_L(x) \leq 0 \text{ \& } h_1(x) = 0, \dots, h_K(x) = 0\}$$

pro $K, L \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a dané funkce $g_1, \dots, g_L, h_1, \dots, h_K$, tj. hledáme

$$x^* = \arg \max_{x \in X} F(x) = \{x \in X \mid F(x) \geq F(y) \text{ pro všechna } y \in X\}.$$

Úlohu (1) pak čteme jako: Najdi bod x^* , v němž reálná funkce F dosahuje největší hodnoty (tj. maxima) mezi všemi body $x \in D(F) \subseteq \mathbb{R}^N$, které vyhovují soustavě L nerovností

$$g_1(x) \leq 0 \quad \& \quad g_2(x) \leq 0 \quad \& \quad \cdots \quad \& \quad g_L(x) \leq 0$$

a soustavě K rovností

$$h_1(x) = 0 \quad \& \quad h_2(x) = 0 \quad \& \quad \cdots \quad \& \quad h_k(x) = 0.$$

Případně můžeme místo (1) řešit „pouze“ úlohu

$$F^* = \sup_{x \in X} F(x) \tag{2}$$

(1) vs. (2)

Řešení úlohy (1) pak není nic jiného než nalezení vrstevnice funkce F na úrovni F^* .

Další
klasifikace

Úlohu (1) navíc můžeme rozdělit do dvou subkategorií

- úlohy bez omezujících podmínek (tzv. volné extrémy), tj. $X = \mathbb{R}^N$, např. $1 - x^2 \rightarrow \max$
- úlohy s omezujícími podmínkami (tzv. vázané extrémy), tj. $X \subsetneq \mathbb{R}^N$, např. $x \cos y \rightarrow \max$, $[x, y] \in [-5, 5] \times \mathbb{R}$.

V případě $X \subseteq \mathbb{R}^N$ představuje bod x^* v úloze (1) optimální řešení (strategii, též návrhový vektor aj.) tzv. matematického programu (IT?!)



Matematické programování (M5170)



Lineární programování
(M4110)

Kvadratické programování

Celočíselné programování
(M8150)

Teorie optimalizace (M0160; jaro 2018 + k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

1 OBECNÝ ÚVOD

2 VOLNÉ EXTRÉMY

V celé této kapitole máme funkci $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

Definice 6.22(i)

Bod $x^* \in \mathbb{R}^N$ je lokální maximum (minimum) funkce F , pokud existuje okolí A bodu x^* ($=$ otevřená koule $B_\varepsilon(x^*) := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x - x^*\| < \varepsilon\}$) takové, že $F(x) \leq F(x^*)$ ($F(x) \geq F(x^*)$) pro každé $x \in A$. Pokud lze vzít dokonce $A = \mathbb{R}^N$, tj. $F(x) \leq F(x^*)$ ($F(x) \geq F(x^*)$) pro každé $x \in \mathbb{R}^N$, pak se bod x^* nazývá globální (absolutní) maximum (minimum) na $\mathbb{R}^N$. Analogicky je definováno globální maximum/minimum na libovolné množině $A \subset \mathbb{R}^N$. Jsou-li uvedené nerovnosti ostré pro všechna $x \neq x^*$, pak hovoříme o ostrých lokálních/globálních extrémech.

Příklad

Příklady lokálních a globálních extrémů pro $N = 1$ a $N = 2$.

Nutná podmínka 1. řádu pro lokální extrém diferencovatelných funkcí.

Věta 6.22(i)

Existují-li parciální derivace prvního řádu funkce F v bodě x^* , ve kterém nastává lokální extrém (tj. lokální maximum nebo minimum), potom $F_{x_i}(x^*) = 0$ pro každé $i = 1, \dots, N$, tj.

$$DF(x^*) = 0 \quad \text{neboli} \quad \text{grad } F(x^*) = 0.$$

Bod $x^* \in \mathbb{R}^N$, ve kterém je $\text{grad } F(x^*) = 0$ nebo neexistuje, se nazývá stacionární bod (též kritický bod).

Příklad

Lokální extrémy vs. stacionární body.

Věta 6.23(i)

Nechť $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, kde $A \subseteq \mathbb{R}^N$ je otevřená konvexní množina. Nechť $x^* \in A$ a $F \in C^1$ v nějakém okolí bodu x^* . Potom

- je-li funkce F konkávní na A , pak bod x^* je (globálním) maximem funkce F právě tehdy, když x^* je stacionárním bodem funkce F ;
- je-li funkce F konvexní na A , pak bod x^* je (globálním) minimem funkce F právě tehdy, když x^* je stacionárním bodem funkce F .

Věta 6.23(ii)

Nechť funkce $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ je ostře konkávní na otevřené konvexní množině $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Bod x^* je jediným globálním maximem funkce F právě tehdy, když x^* je stacionárním bodem funkce F .

Příklad

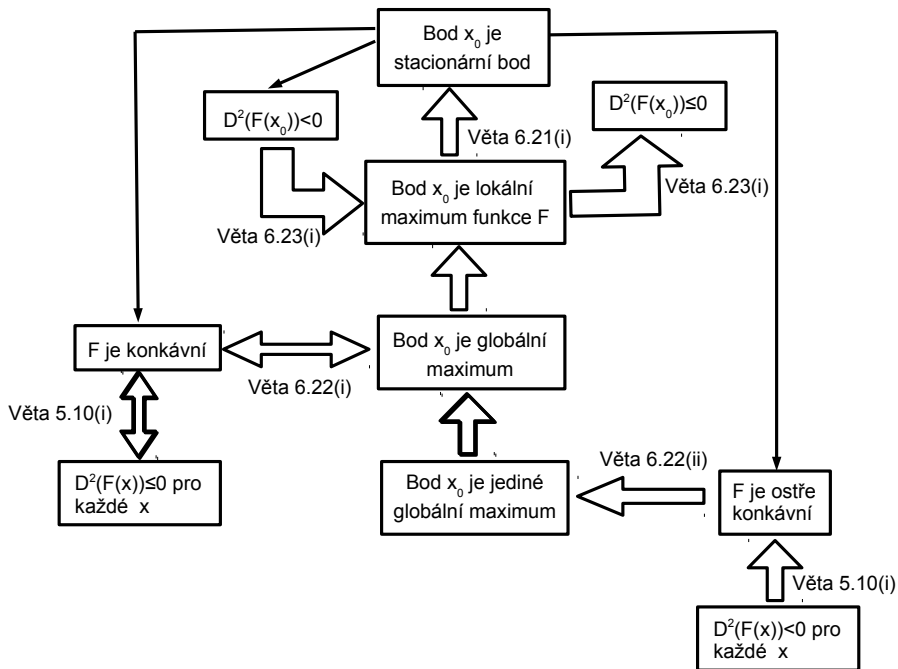
- Určete extrémy funkce $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$.
- Ukažte, že funkce $G(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz - 5)^3$ má v bodě $[0, 0, 0]$ minimum.

A jak rozhodnout, zda stacionární bod je zároveň i extrémem v případě libovolné funkce $F \in C^2$?

Věta 6.24(i)

Nechť $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitě parciální derivace druhého řádu, tj. $F \in C^2$, a nechť $\text{grad } F(x^*) = 0$ v nějakém bodě $x^* \in \mathbb{R}^N$.

- Je-li x^* lokální maximum (minimum), pak $D^2F(x^*) \leq (\geq) 0$.
- Je-li Hessova matice $D^2F(x^*) < (>) 0$, pak bod x^* je (ostré) lokální maximum (minimum) funkce F .
- Je-li Hessova matice $D^2F(x^*)$ indefinitní, pak bod x^* není lokální extrém funkce F (tzv. sedlový bod).



Příklad

Určete stacionární body a extrémy funkcí

a) $F(x, y) = 2x^2 + y^2,$

b) $F(x, y) = 4x + 2y - x^2 - y^2 + xy,$

c) $F(x, y) = 4x^2 - xy + y^2 - x^3.$

Příklad
(ekonomie)

Maximalizace zisku jedné firmy v konkurenčním prostředí.

Příklad (ekonomie)

Maximalizace zisku: uvažujme firmu, která používá N vstupů k výrobě jednoho produktu. Nechť $x \in \mathbb{R}_+^N$ reprezentuje koš vstupů, $y = G(x)$, $G \in C^1$, je produkční funkce a p je prodejní cena. Potom výnos firmy je roven

$$R(x) = p G(x).$$

Pokud $C(x)$ představuje cenu koše vstupů, potom zisk $F(x)$ je

$$F(x) = R(x) - C(x).$$

Předpokládejme, že funkce R a C jsou takové, že firma maximalizující svůj zisk používá kladné množství každého zdroje, tudíž hodnota x^* , která maximalizuje zisk, leží uvnitř kladného ortantu $\mathbb{R}_+^N$. Potom podle Věty 6.22(i) musí být parciální derivace funkce F nulové v bodě x^* , který maximalizuje zisk, tj.

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) = \frac{\partial R}{\partial x_i}(x^*) - \frac{\partial C}{\partial x_i}(x^*).$$

Tedy příjem z mezního produktu vytvořeného zapojením dodatečné jednotky i -tého vstupu musí být roven mezním nákladům na pořízení dodatečné jednotky i -tého vstupu (toto platí pro každé i , tedy přírůstky produkce z dodatečných jednotek musí mít stejnou nákladovost; zlaté pravidlo maximalizace zisku: mezní příjmy = mezní náklady).

Příklad
(ekonomie;
pokr.)

Předpokládejme dále, že pro každé $i \in \{1, \dots, N\}$ má i -tý vstup konstantní cenu w_i , tj.

$$C(x) = w_1 x_1 + \dots + w_N x_N.$$

Podmínka prvního řádu nyní dává

$$\frac{\partial R}{\partial x_i}(x^*) = p \frac{\partial G}{\partial x_i}(x^*) = w_i \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial G}{\partial x_i}(x^*) = \frac{w_i}{p}$$

pro $i = 1, \dots, N$. Nutná podmínka druhého řádu vyžaduje, aby $D^2F(x^*) \leq 0$. V případě konstantních mezních nákladů tato podmínka znamená, že $D^2G(x^*) \leq 0$, tedy $\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2}(x^*) \leq 0$. Jinými slovy, vektor maximalizující zisk se nachází pouze v těch oblastech prostoru všech vstupních vektorů, kde $\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2}$ jsou nekladné. Pokud pro každé $x \in \mathbb{R}_+^N$ existuje index i takový, že $\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} > 0$, pak pro takovou firmu neexistuje žádný vektor vstupů v $\mathbb{R}_+^N$, který by maximalizoval zisk.

Konkrétně: $G(x) = Ax_1^{a_1} \dots x_N^{a_N}$, přičemž $A, a_1, \dots, a_N > 0$ jsou taková, že $a := \sum_{i=1}^N a_i < 1$.

Příklad (ekonomie)

Diskriminující monopol (nedokonalá konkurence): představme si firmu, která má monopol na dvou různých a oddělených trzích, např. na domácím trhu a zahraničním trhu a každý má svoji vlastní poptávkovou funkci. Nechť Q_i je množství dodávané na i -tý trh a nechť $P_i = G_i(Q_i)$ je inverzní poptávková funkce pro i -tý trh, takže zisk za dodání Q_i jednotek výstupu na i -tý trh je $Q_i G_i(Q_i)$.

Předpokládejme, že produkční náklady C závisí pouze na celkové produkci $Q = Q_1 + Q_2$, tj. náklady celé firmy lze vyjádřit jako $C(Q_1 + Q_2)$. Zisk je potom roven

$$F(Q_1, Q_2) = Q_1 G_1(Q_1) + Q_2 G_2(Q_2) - C(Q_1 + Q_2).$$

Pokud víme, že firma vyrobí nějaké množství výrobků pro každý trh, pak náš problém maximalizace je vlastně otázkou výpočtu maxima „ziskové“ funkce uvnitř prvního kvadrantu. Toto maximum pak nutně splňuje

$$0 = \frac{\partial F}{\partial Q_1} = \frac{d(Q_1 G_1(Q_1))}{dQ_1} - C'(Q_1 + Q_2)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial Q_2} = \frac{d(Q_2 G_2(Q_2))}{dQ_2} - C'(Q_1 + Q_2)$$

neboli

$$\frac{d(Q_1 G_1(Q_1))}{dQ_1} = \frac{d(Q_2 G_2(Q_2))}{dQ_2} = C'(Q_1 + Q_2).$$

Mezní příjem na každém trhu tedy musí být roven mezním nákladům celkové produkce.

Příklad
(ekonomie;
pokr.)

Uvažujme firmu s monopolem, která produkuje jeden výrobek, ale má dva druhy zákazníků. Pokud vyrobí Q_1 jednotek pro zákazníky 1. typu, pak tito zákazníci jsou ochotni zaplatit cenu $50 - 5Q_1$ Kč za jednotku. Pokud vyrobí Q_2 jednotek pro zákazníky 2. typu, tak zaplatí $100 - 10Q_2$ Kč za jednotku. Náklady firmy na výrobu Q jednotek jsou $90 + 20Q$ Kč. Kolik jednotek pro každý trh je nutné vyrobit, aby firma dosáhla maximálního zisku?

Příklad

Metoda nejmenších čtverců.

Jak je to s existencí globálních extrémů na množině $A \subseteq \mathbb{R}^N$?

Věta 6.30(i)

Nechť funkce F je spojitá na uzavřené a ohraničené množině A (=kompaktní množina). Potom funkce F nabývá své maximální a minimální hodnoty na A .

Příklad

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$F(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

na trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0, 0]$, $[9, 0]$ a $[0, 9]$.

Konec.