MPE_VPAM: Vybrané partie aplikované matematiky

Petr Zemánek (Masarykova Univerzita, Brno)

Kapitola 5: Konkávní a kvazikonkávní funkce

(verze: 23. září 2020)

Konvexní množina

Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá <u>konvexní</u>, jestliže pro všechny $x, y \in A$ platí $\lambda y + (1-\lambda)x \in A$ pro každé $\lambda \in [0,1]$.

Příklad

(i) čtverec, (ii) kruh, (iii) otevřený kruh, (iv) otevřený čtverec.

Poznámka

Průnik konvexních množin je konvexní množina. Pro sjednocení toto neplatí (viz příklady).

Konkávní funkce

Funkce $F : A \to \mathbb{R}$ definovaná na konvexní množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá <u>konkávní</u>, jestliže pro každé $x, y \in A$ a $\lambda \in [0,1]$ platí

$$F(\lambda y + (1-\lambda)x) \geqslant \lambda F(y) + (1-\lambda)F(x).$$

Je-li nerovnost ostrá pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$ a $\lambda \in (0,1)$, pak se funkce F nazývá <u>ostře konkávní</u>.

Konvexní funkce

Funkce F se nazývá <u>konvexní</u>, jestliže funkce $-F(x)$ je konkávní, neboli platí

$$F(\lambda y + (1-\lambda)x) \leqslant \lambda F(y) + (1-\lambda)F(x).$$

Konkávnost vs. ekonomie

Je-li $0 \in A$ a $F(0) = 0$, pak konkávnost funkce F na A implikuje nerostoucí výnosy vzhledem k rozsahu (přirozené?).

Příklad

Je funkce $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$F(x, y) = 1 - x^2 + 2xy - y^2$$

(ostře) konkávní?

Poznámka

Obecněji lze říci, že funkce F je konkávní právě tehdy, když pro libovolné $x_1, \dots, x_n \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, platí

$$F\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(x_i)$$

(tzv. Jensenova nerovnost). Je-li F ostře konkávní, pak rovnost nastane právě tehdy, když $x_1 = \cdots = x_n$.

Nerovnosti

Jensenova nerovnost je velmi užitečná při důkazu různých nerovností, např.

- nerovnost aritmetického a geometrického průměru (AG nerovnost)

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

  kde rovnost nastane právě tehdy, když $x_1 = \cdots = x_n$;

- Bernoulliova nerovnost pro $x > -1$ a $p \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

$$(1+x)^p \geqslant 1 + px, \quad p > 1,$$
$$(1+x)^p \leqslant 1 + px, \quad 0 < p < 1,$$

  přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $x = 0$.

Příklad (ekonomie)

Uvažujme produkční firmu s jedním výrobkem. Náklady na produkci množství y výrobků ročně je za část roku λ rovna $\lambda C(y)$, kde $C'(y) > 0$ a $C''(y) > 0$ pro každé $y \geqslant 0$. Ve skutečnosti ovšem hodnota produkce může v průběhu roku kolísat. Ukažte, že při dané celkové produkci Y za rok jsou celkové roční náklady minimalizovány volbou konstantní produkce.

Věta 5.6(i)

Nechť $F_1, \dots, F_k : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou konkávní funkce definované na konvexní množině A a nechť $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}_+$. Potom funkce $F(x) := a_1 F_1(x) + \cdots + a_k F_k(x)$ je konkávní na A.

Věta 5.6(ii)

Funkce $F : A \to \mathbb{R}$ třídy C^1 je konkávní právě tehdy, když

$$F(x+z) \leqslant F(x) + \langle \operatorname{grad} F(x), z \rangle \quad \text{pro každé } x \in A, \ z \in \mathbb{R}^n$$

splňující $x+z \in A$ (též lze vyjádřit jako $F(y) - F(x) \leqslant \langle \operatorname{grad} F(x), (y-x) \rangle$ pro každé $x, y \in A$, tj. $z = y - x$). Funkce $F(x)$ je ostře konkávní právě tehdy, když uvedená nerovnost je ostrá pro každé $x \in A$ a každé $z \neq 0$ takové, že $x + z \in A$.

Důsledek 5.6(iii)

Nechť funkce $F \in C^1$ je konkávní na A a nechť $x \in A$. Je-li $y \in A$, pak

$$\langle \operatorname{grad} F(x), (y-x) \rangle \leqslant 0 \Longrightarrow F(y) \leqslant F(x).$$

Zejména jestliže $\langle \operatorname{grad} F(x), (y-x) \rangle \leqslant 0$ pro každé $y \in A$, pak bod x je globálním maximem funkce F.

Příklad

Ukažte, že funkce $F(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ je konkávní na $\mathbb{R}^2$.

Konkávní funkce a maxima

Nechť funkce F je konkávní na konvexní množině $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Libovolné lokální maximum je zároveň globálním maximem.
- Množina bodů, ve kterých funkce F nabývá svého maxima, je konvexní. Je-li navíc funkce F na množině A ostře konkávní, pak je tato množina nejvýše jednoprvková.
- Je-li $F \in C^1$ konkávní funkce a bod x^* takový, že

  $$\langle \operatorname{grad} F(x^*), (y - x^*) \rangle \leqslant 0$$

  pro každé $y \in A$, pak bod x^* je globální maximum funkce F na množině A.

  Zejména, je-li $F \in C^1$ konkávní funkce a $x^* \in A$ jejím stacionárním bodem, tj. $\operatorname{grad} F(x^*) = 0$, pak $x^* \in A$ je globálním maximem funkce F na množině A.
- Podobně i pro konvexní funkce – stačí zaměnit konkávní $\leftrightarrow$ konvexní a maximum $\leftrightarrow$ minimum.

Příklad

Uvažte konkávní funkci $F(x, y) = x^{1/4}y^{1/4}$ na (konvexním) trojúhelníku

$$B := \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 2\}.$$

Najděte globální maximum funkce F na množině B.

Příklad (ekonomie)

V ekonomii se vyskytují funkce, které jsou zcela přirozeně konkávní. Např. výdajová funkce, která popisuje minimální hodnotu důchodu nutného pro dosažení užitku u při vektoru cen p, tj.

$$e(p, u) = \min\{p_1x_1 + \cdots + p_nx_n = \langle p,\, x\rangle \mid u(x) \geqslant u\}.$$

Tato funkce je konkávní (a homogenní stupně 1) vzhledem k p.

Příklad (ekonomie)

Maximalizace zisku firmy.

Věta 5.9(i)

Nechť $F, G : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou definovány na konvexní množině A.

- Je-li funkce F konkávní, pak množina (<u>horní vrstevnice</u>)
$$V_t^+ := \{x \in A \mid F(x) \geqslant t\}$$
je konvexní pro každé $t \in \mathbb{R}$.
- Je-li funkce F konvexní, pak množina (<u>dolní vrstevnice</u>)
$$V_t^- := \{x \in A \mid F(x) \leqslant t\}$$
je konvexní pro každé $t \in \mathbb{R}$.
- Funkce F je konkávní právě tehdy, když množina (<u>podgraf</u>)
$$M_f^- := \{[x, y] \mid x \in A \ \& \ y \leqslant F(x)\}$$
je konvexní.
- Funkce F je konvexní právě tehdy, když množina (<u>nadgraf</u>)
$$M_f^+ := \{[x, y] \mid x \in A \ \& \ y \geqslant F(x)\}$$
je konvexní.
- Jsou-li funkce F a G konkávní, pak funkce $H(x) := \min\{F(x), G(x)\}$ je konkávní.
- Jsou-li funkce F a G konvexní, pak funkce $H(x) := \max\{F(x), G(x)\}$ je konvexní.

Jak rozhodnout o konkávnosti?

Věta 5.10(i)

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce $F : A \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace až do druhého řádu včetně, tj. $F \in C^2$.

- Je-li Hessova matice $D^2F(x)$ je negativně semidefinitní pro každé $x \in A$, pak F je konkávní na A.
- Je-li Hessova matice $D^2F(x)$ je negativně definitní pro každé $x \in A$, pak F je ostře konkávní na A.
- Je-li $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ a funkce F je konkávní na A, pak Hessova matice $D^2F(x)$ je negativně semidefinitní pro každé $x \in A$.

Poznámky

- Pro ostrou konkávnost ekvivalence s negativní definitností matice $D^2F(x)$ NEPLATÍ! Např. při $n = 1$ je funkce $F(x) = -x^4$ ostře konkávní, ovšem $F''(x) = -12x^2$, tj. $F''(0) = 0$. V případě $n = 1$ lze ale ekvivalenci získat:
  Funkce $F : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ostře konkávní právě tehdy, když $F''(x) \leqslant 0$ a současně $F''(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu množiny A (tj. funkce F je konkávní a současně není graf této funkce nikde roven úsečce).
- Podobná tvrzení platí i pro konvexní funkce (stačí zaměnit konkávní $\leftrightarrow$ konvexní a negativně $\leftrightarrow$ pozitivně).
- Jak poznat definitnost matice?

Příklad

Uvažte $n = 2$. Jaké jsou nutné a postačující podmínky pro konkávnost funkce $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Příklad

Rozhodněte o konkávnosti funkce $F(x, y) = 3x + 8y - x^4 - x^2y^2 - y^4$.

Příklad (ekonomie)

V praxi se často vyskytuje produkční nebo užitková funkce ve tvaru $F(x, y) = xy$. Je konkávní/konvexní?

Příklad

Určete maximální množinu, na které je funkce $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy - x^3$ konkávní.

Příklad (ekonomie)

Uvažujte obecnou Cobbovu-Douglasovu funkci v $\mathbb{R}^2_{++}$ ve tvaru $U(x, y) = A\, x^a y^b$, kde $A, a, b > 0$. Jaké jsou nutné a postačující podmínky pro její konkávnost?

Kvazikonkávní funkce

Funkce $F : A \to \mathbb{R}$ definovaná na konvexní množině $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá kvazikonkávní, jestliže její vrstevnice ohraničují konvexní množinu, tj. množina

$$V_t^+ := \{x \in A \mid F(x) \geqslant t\}$$

je konvexní pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Kvazikonvexní funkce

Obdobně se definuje kvazikonvexní funkce, tj. množina $V_t^- := \{x \in A \mid F(x) \leqslant t\}$ je konvexní pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Poznámka

Konkávní vs. kvazikonkávní? Viz Věta 5.9(i).

Alternativní definice

Funkce $F : A \to \mathbb{R}$ definovaná na konvexní množině $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kvazikonkávní právě tehdy, když pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$F(x) \geqslant t \;\;\&\;\; F(y) \geqslant t \implies F(\lambda y + (1-\lambda)x) \geqslant t$$

pro každé $\lambda \in [0, 1]$.
Jestliže dokonce platí ostrá nerovnost pro každé $x \neq y$ a $\lambda \in (0, 1)$, nazývá se funkce ostře kvazikonkávní.

Linearita

Součet kvazikonkávních funkcí NEMUSÍ být kvazikonkávní funkcí.

Příklad

Monotónní funkce jedné proměnné jsou současně kvazikonkávní i kvazikonvexní. Proč?

Věta 5.14(i)

Nechť funkce $F : A \to \mathbb{R}$ je definovaná na konvexní množině $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

- Funkce F je kvazikonkávní na A.
- Pro každé $x, y \in A$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí implikace

$$F(y) \geqslant F(x) \implies F(\lambda y + (1 - \lambda)x) \geqslant F(x).$$

- Pro každé $x, y \in A$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$F(\lambda y + (1 - \lambda)x) \geqslant \min\{F(x), F(y)\}$$

(tedy funkční hodnota na úsečce je větší nebo rovna hodnotám v krajních bodech).

Příklad

Kvazikonkávní funkce v $\mathbb{R}$?

Příklad (ekonomie)

Každá Cobbova–Douglasova funkce $F(x, y) = A\, x^a y^b$ na $\mathbb{R}^2_{++}$ je kvazikonkávní pro libovolné $A, a, b > 0$.

Příklad (ekonomie)

Leontiefova produkční funkce.

Věta 5.15(i)

Funkce $F \in C^1$, $F : A \to \mathbb{R}$, definována na otevřené konvexní množině $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kvazikonkávní (kvazikonvexní) právě tehdy, když platí

$$F(y) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} F(x) \implies \langle \operatorname{grad} F(x), (y-x) \rangle \underset{(\leqslant)}{\geqslant} 0$$

pro každé $x, y \in A$. Pokud dokonce platí pro každé $x \neq y$, že

$$F(y) \geqslant F(x) \implies \langle \operatorname{grad} F(x), (y-x) \rangle > 0,$$

je funkce F ostře kvazikonkávní.
Naopak, je-li funkce F ostře kvazikonkávní a $\operatorname{grad} F(x) \neq 0$ pro každé $x \in A$, potom platí $\langle \operatorname{grad} F(x), (y-x) \rangle > 0$, kdykoli $F(y) \geqslant F(x)$ a $x \neq y$.

Poznámka

Nutnost podmínky $\operatorname{grad} F(x) \neq 0$ v poslední části může být ilustrována na příkladu funkce $f(x) = x^3$ pro $x \in \mathbb{R}$. Ta je sice ostře kvazikonkávní, ale protože $\operatorname{grad} F(0) = 0$, platí $\langle \operatorname{grad} F(x), (y-x) \rangle = 0$ pro $x = 0$.

Poznámka

Jaký je geometrický význam nerovnosti $\langle \operatorname{grad} F(x), (y-x)\rangle \geqslant 0$?

Kvazikonkávnost pomocí $D^2F(x)$? Komplikovanější než pro konkávnost!

Věta 5.16(i)

Nechť funkce $F \in C^2$, $F: A \to \mathbb{R}$, je definována na otevřené konvexní množině $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(i) Je-li funkce F kvazikonkávní na A, pak pro každé $x \in A$ je Hessova matice $D^2F(x)$ negativně semidefinitní na podprostoru kolmém ke $\operatorname{grad} F(x)$ pro každé $x \in A$ (tj. na $\operatorname{Ker} DF(x) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid DF(x)\, z = \langle \operatorname{grad} F(x), z\rangle = 0\}$), tj. pro všechna $x \in A$ platí

$$z^\top D^2F(x) z \leqslant 0 \quad \text{pro každé } z \in \mathbb{R}^n \text{ takové, že } DF(x)\, z = 0.$$

(ii) Je-li funkce F kvazikonkávní na A, pak Hessova matice $D^2F(x)$ má nejvýše jedno kladné vlastní číslo pro každé $x \in A$.

(iii) Je-li funkce F kvazikonkávní na A, pak rozšířená Hessova matice pro $D^2F(x)$ a $DF(x)$ má právě jedno kladné vlastní číslo pro každé $x \in A$.

Příklad

Ekvivalence ve Větě 5.16(i)? Uvažte např. funkci

$$F(x) = x^4 \quad \text{nebo} \quad F(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^4.$$

Věta 5.17(i)

Nechť funkce $F \in C^2$, $F : A \to \mathbb{R}$, je definována na otevřené konvexní množině $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(i) Funkce F je kvazikonkávní na A, jestliže Hessova matice $D^2F(x)$ je negativně semidefinitní na podprostoru kolmém ke $\operatorname{\mathbf{grad}} F(x)$ pro každé $x \in A$ a současně v bodech x^* splňujících $\operatorname{\mathbf{grad}} F(x^*) = 0$ je matice $D^2F(x^*)$ dokonce negativě definitní, tj. pro všechna $x \in A$ platí

$$z^\top D^2F(x)z \leqslant 0 \quad \text{pro každé } z \in \mathbb{R}^n \text{ takové, že } DF(x)\, z = 0,$$

a současně

$$D^2F(x) < 0 \quad \text{pro každé } x \in A \text{ takové, že } \operatorname{\mathbf{grad}} F(x) = 0.$$

(ii) Jestliže $\operatorname{\mathbf{grad}} F(x) \neq 0$ pro všechna $x \in A$, pak F je kvazikonkávní na A právě tehdy, když pro všechna $x \in A$ platí

$$z^\top D^2F(x)z \leqslant 0 \quad \text{pro každé } z \in \mathbb{R}^n \text{ takové, že } DF(x)\, z = 0,$$

tj. právě tehdy, když rozšířená Hessova matice pro $D^2F(x)$ a $DF(x)$ má právě jedno kladné vlastní číslo pro každé $x \in A$.

Věta 5.18(i)

Nechť funkce $F \in C^2$, $F : A \to \mathbb{R}$, je definována na otevřené konvexní množině $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Je-li $D^2F(x)$ negativně definitní na $\operatorname{Ker} DF(x)$ pro každé $x \in A$, pak je funkce F ostře kvazikonkávní.

Příklad

Pomocí rozšířené Hessovy matice zformulujte podmínky ostré kvazikonkávnosti z Věty 5.18(i) pro funkci dvou proměnných $F(x, y)$. S využitím těchto podmínek rozhodněte o ostré kvazikonkávnosti funkce $F(x, y) = -x^2 - y^4$.

Příklad (ekonomie)

Klasifikace Cobbovy–Douglasovy funkce

$$F(x_1, \dots, x_n) = A x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}, \quad A, a_1, \dots, a_n > 0,$$

definované pro $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$:

- je homogenní stupně $q = a_1 + \cdots + a_n$;
- je kvazikonkávní pro každé $a_1, \dots, a_n > 0$;
- je konkávní, pokud $q \leqslant 1$;
- je ostře konkávní, pokud $q < 1$.

Příklad (ekonomie)

Klasifikace produkční funkce s konstantní pružností substituce

$$F(x_1, \dots, x_n) = A(\delta_1 x_1^{-\rho} + \cdots + \delta_n x_n^{-\rho})^{-\mu/\rho},$$
$$A, \mu, \delta_1, \dots, \delta_n > 0,\ \rho \neq 0,$$

definované pro $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$:

- je homogenní stupně μ;
- je kvazikonkávní pro $\rho \geqslant -1$ a kvazikonvexní pro $\rho \leqslant -1$;
- je konkávní, pokud $0 < \mu \leqslant 1$ a $\rho \geqslant -1$;
- je ostře konkávní, pokud $0 < \mu < 1$ a $\rho > -1$.

Skládání funkcí

Nechť $F : A \to \mathbb{R}$, kde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina. Nechť dále funkce f je definována na intervalu v $\mathbb{R}$, který obsahuje $F(x)$ pro všechna $x \in A$. Potom:

- jestliže funkce F je konkávní a funkce f je konkávní a rostoucí, pak funkce $U(x) = f(F(x))$ je konkávní;
- jestliže funkce F je konvexní a funkce f je konvexní a rostoucí, pak funkce $U(x) = f(F(x))$ je konvexní;
- jestliže funkce F je konkávní a funkce f je konvexní a klesající, pak funkce $U(x) = f(F(x))$ je konvexní;
- jestliže funkce F je konvexní a funkce f je konkávní a klesající, pak funkce $U(x) = f(F(x))$ je konkávní;
- jestliže funkce F je kvazikonkávní/kvazikonvexní a funkce f rostoucí, pak funkce $U(x) = f(F(x))$ je kvazikonkávní/kvazikonvexní;
- jestliže funkce F je kvazikonkávní/kvazikonvexní a funkce f klesající, pak funkce $U(x) = f(F(x))$ je kvazikonvexní/kvazikonkávní.

Pseudo-konkávní funkce

Nechť A je otevřená konvexní množina v $\mathbb{R}^n$, $F \in C^1$ a $F : A \to \mathbb{R}$. Funkce F se nazývá <u>pseudokonkávní</u> v bodě $x^* \in A$, pokud

$$\langle \mathbf{grad}\, F(x^*), (y - x^*) \rangle \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad F(y) \leqslant F(x^*) \;\; \text{pro každé} \;\; y \in A$$

Funkce F je pseudokonkávní na množině A, pokud je pseudokonkávní v každém bodě množiny A.

Konec.