MPE_VPAM: Vybrané partie aplikované matematiky

Petr Zemánek (Masarykova Univerzita, Brno)

Kapitola 4: Diferenciální počet v $\mathbb{R}^n$

(verze: 23. září 2020)

1. Základní pojmy
2. Limita a spojitost
3. Derivování v $\mathbb{R}^n$
4. Taylorova věta
5. Vektorové funkce
6. Derivování maticových funkcí

Funkce více proměnných

Pomocí funkce jedné proměnné můžeme mít funkci poptávky $q = f(p)$, kde velikost poptávky závisí pouze na ceně – to ale není příliš reálné.

Lépe $q = f(p_1, p_2, y)$, např. funkce poptávky s konstantní pružností je dána jako $q = f(p_1, p_2, y) = k_1\, p_1^{a_{11}} p_2^{a_{12}} y^{b_1}$, tj. pomocí

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Poznámka ke značení proměnných ($n = 2$, $n = 3$ a $n > 3$).

Definiční obor

Funkce f je jednoznačně určena udáním definičního oboru $D(f)$ a předpisem, který každému bodu $x = [x_1, \ldots, x_n] \in D(f)$ přiřadí hodnotu $f(x_1, \ldots, x_n)$. Pokud je předpis dán vzorcem a není udán definiční obor $D(f)$, pak jej chápeme jako množinu všech bodů $x \in \mathbb{R}^n$, pro než má tento vzorec smysl.

Kuželosečky a kvadriky

K vyšetřování definičních oborů (případně grafickému znázorňování dalších vlastností) funkcí více proměnných si připomeňme analytická vyjádření (v tzv. normálním tvaru) některých důležitých obrazců z $\mathbb{R}^2$ (kuželosečky) a $\mathbb{R}^3$ (kvadriky).

Kuželosečky

$x^2 + y^2 = r^2$	kružnice
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	elipsa
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	hyperbola
$x^2 + 2py = 0$	parabola
$y^2 + 2px = 0$	parabola
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	dvojice reálných různoběžek
$x^2 - c^2 = 0$	dvojice reálných rovnoběžek
$x^2 = 0$	dvojnásobná přímka

kde pro konstanty platí $a, b, c, r > 0$, $p \neq 0$. Obrázky jsou převzaty z `http://goo.gl/qb5YKo`.

Kvadriky (i)

Pro všechny níže vystupující konstanty platí $a, b, c, d, r > 0$, $p, q \neq 0$. Obrázky jsou převzaty z `http://goo.gl/6rrX5p`.

Kulová plocha: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Elipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Jednodílný hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Kvadriky (ii)

Dvojdílný hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

Kužel: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Eliptický paraboloid: $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$

Kvadriky (iii)

Hyperbolický paraboloid: $z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q}$

Rotační válec:

$x^2 + y^2 = r^2$

Eliptický válec: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Kvadriky (iv)

Hyperbolický válec: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Parabolický válec:

$y^2 = 2px$ nebo $x^2 = 2qy$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$	dvojnásobný bod
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	dvojnásobná přímka
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	dvojice různoběžných rovin
$x^2 - d^2 = 0$	dvojice rovnoběžných rovin
$x^2 = 0$	dvojnásobná rovina

Příklad

Určete a načrtněte definiční obory funkcí

$$\text{(a)}\quad f(x,y)=\frac{x+y}{x-y},\qquad \text{(b)}\quad f(x,y)=\frac{\sqrt{x-y^2}}{\ln(9-x^2-y^2)},$$

$$\text{(c)}\quad f(x,y)=\arcsin(x^2+y^2-2),$$

$$\text{(d)}\quad f(x,y)=\sqrt{(x^2+\frac{(y-2)^2}{4}-1)(x^2+y^2-6x)}.$$

Graf funkce

Grafem funkce f rozumíme množinu

$$G(f):=\left\{[x_1,\dots,x_n,f(x_1,\dots,x_n)]\in\mathbb{R}^{n+1}\;\middle|\;[x_1,\dots,x_n]\in D(f)\right\}$$

(tedy hodnotu $f(x_1,\dots,x_n)$ chápeme jako $n+1$ souřadnici).

Poznámka

Pro $n=2$ si lze graf funkce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ představit jako rovinu nebo její část zakřivenou v $\mathbb{R}^3$. Ovšem pro $n>2$ již tuto možnost názorné představy ztrácíme, a proto graf funkce ztrácí na významu jako prostředek k získání představy o chování funkce n proměnných. Jediný graf funkce tří proměnných, který ještě dokážeme „znázornit“, je graf funkce $f(x,y,z)\equiv 0$ (co je jejím grafem?).

Příklad

Nechť funkce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ je dána předpisem $f(x,y)=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$. Načrtněte její graf.

Pro $n=2,3$ můžeme získat docela dobrou představu o grafu funkce již pomocí vrstevnic.

Vrstevnice funkce

Nechť $M\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:M\to\mathbb{R}$ je funkce n proměnných definovaná na množině M a $c\in\mathbb{R}$. Množina

$$f_c:=\left\{[x_1,\dots,x_n]\in M\mid f(x_1,\dots,x_n)=c\right\}$$

se nazývá vrstevnicí funkce f na úrovni c (srov. indiferenční křivka).

Příklad

Načrtněte vrstevnice pro funkce

$$\text{(a)}\quad f(x,y)=x^2-y^2,\qquad \text{(b)}\quad f(x,y)=e^{2x/(x^2+y^2)}.$$

Příklad

- Pomocí vrstevnic a řezů rovinami ρ_{xz}, ρ_{yz} zobrazte graf funkce
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$
- Zobrazte v $\mathbb{R}^3$ graf funkce $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, kde $a, b > 0$.
- Zobrazte v $\mathbb{R}^3$ graf funkce $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$.

Funkce mohou mít i mnohem komplikovanější chování, ačkoli jsou zadány jednoduchým předpisem.

$$z = e^{-(x^2+y^2)/8}(\sin(x^2)+\cos(y^2))$$

$$z = \sin(x) + 2\sin(y)$$

$$z = (4x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$$

$$z = xy\,e^{-y^2}$$

1 Základní pojmy

2 Limita a spojitost

3 Derivování v $\mathbb{R}^n$

4 Taylorova věta

5 Vektorové funkce

6 Derivování maticových funkcí

Hromadný bod

Pro následující definici limity potřebujeme, aby uvažovaná funkce byla definována alespoň v jednom bodě libovolně malého ryzího okolí daného bodu z definičního oboru. To znamená, že budeme uvažovat pouze hromadné body definičního oboru (=bod, jehož každé ryzí okolí obsahuje alespoň jeden bod z této množiny – v takovém případě jich obsahuje dokonce nekonečně mnoho). Hromadný bod může (ale nemusí) být prvkem dané množiny (je to buď vnitřní nebo hraniční bod).

Definice 4.17(i)

Nechť x^* je hromadným bodem $D(f)$. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $x^* \in (\mathbb{R}^*)^n$ limitu $L \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}^*(x^*)$ bodu x^* takové, že pro každý bod $x \in \mathcal{O}^*(x^*) \cap D(f)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$. V takovém, případě píšeme

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = L.$$

Limita funkce více proměnných má podobné vlastnosti jako v $\mathbb{R}$. Pro jednoduchost jsou tvrzení zformulovaná v $\mathbb{R}^2$ (analogická tvrzení platí ale i ve vyšších dimenzích).

Věta 4.18(i)

Nechť $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou funkce dvou proměnných.

- Funkce f má v bodě $[x^*, y^*]$ nejvýše jednu limitu.
- Nechť platí

$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} f(x,y) = L_1 \quad \& \quad \lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} g(x,y) = L_2,$$

kde $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} [c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)] = c_1 L_1 + c_2 L_2,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} [f(x,y)\, g(x,y)] = L_1 L_2.$$

Je-li $L_2 \neq 0$, pak také

$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Příklad

Vypočtěte limity

$$\text{(a)} \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x+y+1}{x+y+3}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}.$$

Věta 4.19(i)

Nechť $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou funkce dvou proměnných.

- Nechť $\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} f(x,y) = 0$ a funkce g je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu $[x^*, y^*]$ (tj. existuje konstanta $K \geqslant 0$ taková, že platí $|g(x,y)| \leqslant K$ v tomto okolí $\cap D(f)$). Potom
$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} f(x,y)\, g(x,y) = 0.$$
- Nechť $h(x,y) \leqslant f(x,y) \leqslant g(x,y)$ v nějakém ryzím okolí bodu $[x^*, y^*]$ a současně platí
$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} g(x,y) = L.$$
Pak také
$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} f(x,y) = L.$$
- Má-li funkce f v bodě $[x^*, y^*] \in (\mathbb{R}^*)^2 \cap D(f)$ vlastní limitu, pak existuje ryzí okolí bodu $[x^*, y^*]$, v němž je funkce f ohraničená.

Příklad

Vypočtěte limity

$$\text{(a)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \sin\frac{1}{x}.$$

Zásadní rozdíl mezi limitami v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{R}^n$ pro $n \geqslant 2$ spočívá v dimenzi okolí limitního bodu. U funkce jedné proměnné jsme se do limitního bodu mohli blížit pouze po přímce (zprava nebo zleva, pokud se rovnají, má funkce limitu), zatímco u funkce dvou a více proměnných se do limitního bodu můžeme dostat v nekonečně mnoha směrech – po přímkách, parabolách, kubických křivkách, … Ovšem existence limity musí být nezávislá na cestě, po které se do limitního bodu blížíme.

Pokud se nám tedy podaří najít dvě různé křivky takové, že při přibližování do limitního bodu po těchto křivkách dostaneme různé (částečné) limity (ty bude obvykle mnohem jednodušší určit), tak samotná limita nemůže existovat.

Obvykle se za tyto křivky volí přímky $y = k(x-x^*)+y^*$ (typicky $y = kx$). S jejich pomocí lze ukázat neexistenci limity (pokud výraz závisí na k).

Příklad

Ukažte, že následující limita neexistuje

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}.$$

Ovšem to, že výsledná limita nezávisí na k pro libovolnou přímku, ještě neznamená, že daná limita existuje (museli bychom vyšetřit všechny možné křivky).

Příklad

Ukažte, že následující limita neexistuje

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2}.$$

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Pak limita ve smyslu Definice 4.17(i) se nazývá dvojná. Limitní proces také můžeme aplikovat postupně.

Dvojnásobná limita

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Pak limity

$$L_{yx} = \lim_{x\to x^*}\Big(\lim_{y\to y^*} f(x,y)\Big) \quad \& \quad L_{xy} = \lim_{y\to y^*}\Big(\lim_{x\to x^*} f(x,y)\Big)$$

se nazývají dvojnásobné (též postupné).

Jaký je vztah mezi L_{xy}, L_{yx} a $L := \lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} f(x,y)$?

Věta 4.22(i)

(i) Nechť existují limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} = L_{yx}$. Pak limita L nemusí existovat.

(ii) Nechť existuje limita L. Pak L_{xy} a L_{yx} nemusí existovat.

(iii) Existují-li limity L_{xy}, L_{yx} a L, pak $L_{xy} = L_{yx} = L$.

(iv) Nechť existují limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} \neq L_{yx}$. Pak limita L neexistuje.

Poznámka

Poslední část předchozí věty nám dává nutnou podmínku pro existenci limity L.

Příklad

Vypočtěte limity

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2-3y^2}{x^2+2y^2}$, b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$,

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$, d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+2y^2}$.

Ovšem výpočet konkrétní limity v $\mathbb{R}^n$ může být značně obtížné (zejména když nemáme ani l'Hospitalovo pravidlo). Velmi účinným nástrojem v $\mathbb{R}^2$ je tzv. transformace do polárních souřadnic

$$x = x^* + \rho\cos\varphi \quad y = y^* + \rho\sin\varphi,$$

kde $[x^*, y^*]$ je limitní bod, $\rho \in [0,\infty)$ popisuje vzdálenost bodu $[x,y]$ od pevného bodu $[x^*, y^*]$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$ je úhel, který svírá polopřímka z bodu $[x^*, y^*]$ procházející bodem $[x,y]$ s kladnou částí osy x.

Věta 4.24(i)

Je-li $L \in \mathbb{R}$ a existuje-li nezáporná funkce $g(\rho)$ taková, že

$$\lim_{\rho\to 0+} g(\rho) = 0 \quad \& \quad |f(x^*+\rho\cos\varphi, y^*+\rho\sin\varphi) - L| \leqslant g(\rho)$$

pro každé ρ z nějakého ryzího okolí 0 a každé $\varphi \in [0, 2\pi)$, pak platí

$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} f(x,y) = L.$$

Poznámka

Zejména pokud po transformaci do polárních souřadnic platí

$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0+} h(\varphi)g(\rho),$$

kde $\lim_{\rho\to 0+} g(\rho) = 0$ a funkce $h(\varphi)$ je ohraničená pro $\varphi \in [0, 2\pi)$, pak

$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} f(x,y) = 0.$$

Pomocí transformace do polárních souřadnic převedeme výpočet limity funkce dvou proměnných na výpočet limity $\lim_{\rho\to 0+} g(\rho)$, k čemuž již můžeme využít i l'Hospitalovo pravidlo.

Příklad

Vypočtěte limity

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+(y-1)^2y}{x^2+(y-1)^2}$, (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

Poznámka

Podobně lze postupovat i v $\mathbb{R}^3$, kde se využívá transformace do <u>sférických souřadnic</u>

$$x = x^* + \rho\cos\varphi\sin\vartheta \quad y = y^* + \rho\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = z^* + \rho\cos\vartheta.$$

Spojitost v bodě

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je <u>spojitá</u> v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$, jestliže platí jedno z následujících tvrzení

(a) bod x^* je hromadným bodem definičního oboru $D(f)$, existuje v tomto bodě vlastní limita a platí

$$\lim_{x\to x^*} f(x) = f(x^*);$$

(b) bod x^* je izolovaným bodem definičního oboru $D(f)$.

Poznámka

- Z části (a) vyplývá, že f musí být definována v bodě x^*, musí mít v tomto bodě limitu a tato čísla si musí být rovna.
- Část (b) zahrnuje body, v nichž nelze limitu počítat.

Příklad

Určete body nespojitosti funkcí

(a) $f(x,y) = \dfrac{2x-5y}{x^2+y^2-1}$, (b) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2y+xy^2)}{\cos(x-y)}$.

Poznámka

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $x^* \in D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$, ve kterém je funkce f ohraničená (tj. existuje číslo $K \geqslant 0$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x^*) \cap D(f)$ platí $|f(x)| \leqslant K$). Je-li navíc $f(x^*) \neq 0$, pak existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$, ve kterém funkce f nemění znaménko.

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá v bodě $[x^*, y^*]$, pak jsou spojité i funkce jedné proměnné $g(x) = f(x, y^*)$ a $h(y) = f(x^*, y)$. Tedy spojitá funkce dvou proměnných je zároveň spojitou funkcí v proměnné x při konstantním y a také spojitou funkcí v proměnné y při konstantním x (analogické tvrzení platí i pro funkce více proměnných). Opačné tvrzení ale neplatí.

Příklad

Rozhodněte o spojitosti funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & xy \neq 0, \\ 1 & xy = 0. \end{cases}$$

Příklad

Rozhodněte o spojitosti funkcí

$$\text{(a) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^4} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0]; \end{cases}$$

$$\text{(b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

Nyní se podíváme blíže na některé vlastnosti spojitých funkci dvou proměnných (analogická tvrzení platí i pro funkce více proměnných).

Věta 4.29(i) Nechť jsou funkce $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojité v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$. Pak jsou v bodě x^* spojité také funkce $f \pm g$, fg, a je-li $g(x^*) \neq 0$, pak i funkce f/g.

Věta 4.29(ii) Nechť $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou spojité v bodě $[x^*, y^*]$. Položme $u^* = g(x^*, y^*)$, $v^* = h(x^*, y^*)$ a nechť funkce f je spojitá v bodě $[u^*, v^*]$. Pak je v bodě $[x^*, y^*]$ také spojitá složená funkce $F(x, y) := f\big(g(x, y), h(x, y)\big)$.

Spojitost na množině Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je <u>spojitá na množině</u> $M \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$, jestliže pro každý bod $[x^*, y^*] \in M$ platí

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x^*,y^*)\\(x,y)\in M}} f(x, y) = f(x^*, y^*).$$

Limitní vztah z předchozí definice chápeme takto: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $(x, y) \in \mathcal{O}_\delta([x^*, y^*]) \cap M$ platí $f(x, y) \in \mathcal{O}_\varepsilon(f(x^*, y^*))$.

Z teorie funkcí jedné proměnné známe (Weierstrassova věta):

Je-li funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá na uzavřeném intervalu (jednostranná spojitost v krajních bodech intervalu), pak funkce f je na tomto intervalu ohraničená a nabývá zde své největší i nejmenší hodnoty.

Věta 4.30(i) Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na uzavřené a ohraničené množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak funkce f je na množině M ohraničená a nabývá zde své největší i nejmenší hodnoty (tj. existují čísla $m, M \in \mathbb{R}$ taková, že $m \leqslant M$ a $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ pro každé $[x, y] \in M$).

Příklad Rozhodněte, zda funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0], \end{cases}$$

nabývá své největší a nejmenší hodnoty na množině $M : x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Z teorie funkcí jedné proměnné známe (Bolzanova věta):

Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ (jednostranná spojitost v krajních bodech intervalu), pak funkce f nabývá všech hodnot mezi svojí největší a nejmenší hodnotou (tj. pro libovolné body $x_1, x_2 \in [a, b]$ a číslo c ležící mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$ existuje $x_3 \in [a, b]$ takové, že $f(x_3) = c$).

Otevřená množina A se nazývá <u>souvislá</u>, pokud libovolné dva body z A lze spojit lomenou čarou, která leží celá v A.

Věta 4.31(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na otevřené souvislé množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Nechť pro body $A, B \in M$ platí $f(A) \neq f(B)$. Pak ke každému číslu c ležícímu mezi hodnotami $f(A)$ a $f(B)$ existuje bod $C \in M$ takový, že $f(C) = c$.

Zejména pro $f(A)\,f(B) < 0$ existuje C takové, že $f(C) = 0$.

1. Základní pojmy
2. Limita a spojitost
3. Derivování v $\mathbb{R}^n$
4. Taylorova věta
5. Vektorové funkce
6. Derivování maticových funkcí

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f'(x^*) := \lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$$

Jak derivovat v $\mathbb{R}^2$?

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována v bodě $[x^*, y^*]$ a nějakém jeho okolí. Položme $\varphi(x) := f(x, y^*)$. Má-li funkce $\varphi(x)$ derivaci v bodě x^*, nazýváme ji parciální derivací funkce f podle proměnné x v bodě $[x^*, y^*]$ a označujeme ji jako $f_x(x^*, y^*)$ nebo $f'_x(x^*, y^*)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)$. Tedy

$$f_x(x^*, y^*) = \lim_{x \to x^*} \frac{\varphi(x) - \varphi(x^*)}{x - x^*} = \lim_{x \to x^*} \frac{f(x, y^*) - f(x^*, y^*)}{x - x^*}.$$

Podobně, má-li funkce $\psi(y) := f(x^*, y)$ derivaci v bodě y^*, nazýváme ji parciální derivací funkce f podle proměnné y v bodě $[x^*, y^*]$ a označujeme ji jako $f_y(x^*, y^*)$ nebo $f'_y(x^*, y^*)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)$.

Pro nás budou důležité především vlastní derivace, proto budeme slovem „derivace“ vždy mít na mysli „vlastní derivaci“.

Více proměnných

Parciální derivace pro funkce n proměnných se definují zcela analogicky. Pro $f(x_1, \dots, x_n)$ a vhodný bod $[x_1^*, \dots, x_n^*]$ definujeme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) := \lim_{x_i \to x_i^*} \frac{f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{x_i - x_i^*},$$

kde $i \in \{1, \dots, n\}$.

Věta 4.34(i)

Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mají parciální derivace podle proměnné x_i, kde $i \in \{1, \dots, n\}$, na otevřené množině M. Pak jejich součet, rozdíl, součin a podíl (pokud $g(x) \neq 0$) má na M také parciální derivaci podle x_i, přičemž pro všechna $x \in M$ platí

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big[f(x) \pm g(x)\big] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \pm \frac{\partial g}{\partial x_i}(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big[f(x)\, g(x)\big] = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) g(x) + f(x)\, \frac{\partial g}{\partial x_i}(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) g(x) - f(x)\, \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)}{g^2(x)}.$$

Příklad

Vypočtěte parciální derivace funkcí

$$\text{(a)} \quad f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \qquad \text{(b)} \quad f(x, y) = x^y, \ x > 0,$$

$$\text{(c)} \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)^3/2 \ \text{ v bodě } [1, 1], \qquad \text{(d)} \quad f(x, y) = x \ln(x^2 - y^2),$$

$$\text{(e)} \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\, e^{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Geometrický význam parciální derivace

Průnikem roviny $\pi : y = y^*$ a plochy dané jako graf funkce $f(x, y)$ je křivka γ, která je grafem funkce $\varphi(x)$. Pak parciální derivace $f_x(x^*, y^*)$ udává směrnici tečny t_1 k této křivce v bodě $M^* = [x^*, y^*, f(x^*, y^*)]$, tj. $\operatorname{tg} \alpha = f_x(x^*, y^*)$.

Analogicky parciální derivace $f_y(x^*, y^*)$ určuje směrnici tečny t_2 vedené bodem M^* ke křivce, která vznikne průnikem roviny $x = y^*$ a grafem funkce $f(x, y)$, tj. $\operatorname{tg} \beta = f_y(x^*, y^*)$.

↑ Obrázek převzat z: J. Kuben, Š. Mayerová, P. Račková a P. Šarmanová, *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, dostupné z `http://goo.gl/ssl6OK`. ↑

→ Obrázek převzat z: Z. Došlá, R. Plch a P. Sojka, *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, dostupné z `http://goo.gl/x9eRgT`. →

Z teorie funkcí jedné proměnné známe:

Má-li funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě x^* vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá. Opačné tvrzení již neplatí (např. $f(x) = |x|$). Požadavek existence „vlastní“ derivace je důležitý, neboť při existenci pouze nevlastní derivace tvrzení nemusí platit (např. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ vs. $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ pro $x^* = 0$).

Poznámka

Ovšem pro parciální derivace funkce více proměnných podobné tvrzení již neplatí. Např. funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & xy \neq 0, \\ 1 & xy = 0. \end{cases}$$

není spojitá v bodě $[0, 0]$. Ovšem platí $f_x(0, 0) = 0$ a $f_y(0, 0) = 0$.

Toto je ale zcela přirozené, neboť parciální derivace nám dávají informace pouze o chování dané funkce ve směrech rovnoběžných se souřadnými osami, přičemž v jiných směrech může být chování i „velmi divoké“.

Věta 4.36(i)

Má-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ohraničené parciální derivace na otevřené množině $K \subseteq \mathbb{R}^2$, je funkce f na množině K spojitá.

Z teorie funkcí jedné proměnné známe:

Nechť funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mají vlastní derivace v každém bodě otevřeného intervalu (a, b). Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $f'(x) = g'(x)$, pak se funkce f, g liší o konstantu, tj. existuje číslo $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x) + c$. Zejména jestliže $f(x) = 0$ na (a, b), je f na (a, b) konstantní.

Věta 4.37(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má na otevřené souvislé množině $M \subseteq D(f)$ všechny parciální derivace nulové. Pak je funkce f na množině M konstantní.

Věta 4.37(ii)

Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mají na otevřené souvislé množině $M \subseteq D(f) \cap D(g)$ totožné všechny parciální derivace. Pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že na množině M platí $f(x, y) = g(x, y) + c$.

Podobně jako pro funkce jedné proměnné můžeme uvažovat i „derivace derivací“ (nyní ovšem máme různé permutace).

Pokud existuje f_x ve všech bodech nějaké množiny M, pak dostáváme na M novou funkci $f_x(x, y)$, jejíž definiční obor je $D(f_x)$, přičemž obecně platí $D(f) \neq D(f_x)$ (např. $f(x) = \sqrt{x + \sin xy}$). Pro tuto funkci můžeme také uvažovat parciální derivace.

Parciální derivace druhého řádu

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $[x^*, y^*] \in D(f)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x^*, y^*]$, nazýváme ji <u>parciální derivací druhého řádu podle proměnné x funkce f v bodě $[x^*, y^*]$</u> a značíme jako $f_{xx}(x^*, y^*)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné y v bodě $[x^*, y^*]$, nazýváme ji <u>smíšenou parciální derivací druhého řádu funkce f v bodě $[x^*, y^*]$</u> a značíme jako $f_{xy}(x^*, y^*)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*)$.

Poznámka

- Parciální derivace druhého řádu $f_{yx}(x^*, y^*)$ a $f_{yy}(x^*, y^*)$ jsou definovány zcela analogicky.
- Parciální derivace m-tého řádu ($m \geqslant 3$) definujeme jako parciální derivace derivací $(m-1)$-ho řádu. Kolik má funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivací m-tého řádu?

Příklad

Vypočtěte parciální derivace druhého řádu pro funkce

$$\text{(a)} \quad f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \qquad \text{(b)} \quad f(x,y) = x^y,\ x > 0.$$

Příklad

Ukažte, že funkce $u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ splňuje rovnost $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

Záleží u smíšených parciálních derivací na pořadí derivování?

Příklad

Vypočtěte smíšené parciální derivace druhého řádu v bodě $[0,0]$ pro funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Youngova věta

Má-li funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojité parciální derivace druhého řádu na otevřené množině v $\mathbb{R}^n$, pak na této množině pro libovolnou dvojici indexů i, j platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}$$

(tedy smíšené parciální derivace druhého řádu jsou zaměnitelné).

Pro $n = 2$ je věta známa spíše jako Schwarzova. Tvrzení lze indukcí rozšířit i na derivace vyšších řádů.

Směrová derivace

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x^* \in D(f)$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ a $\varphi(t) := f(x^* + t\vec{u})$. Potom $\varphi'(0)$ se nazývá <u>směrová derivace funkce f v bodě x^* ve směru vektoru $\vec{u}$</u>, tj.

$$f_{\vec{u}}(x^*) := \varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^* + t\vec{u}) - f(x^*)}{t}$$

Věta 4.40(i)

Vzhledem k tomu, že i směrová derivace je vlastně definována jako obyčejná derivace funkce $\varphi(t)$, platí pro její počítání následující pravidla. Nechť pro $x^* \in \mathbb{R}^n$ existuje $f_{\vec{u}}(x^*)$ a $g_{\vec{u}}(x^*)$, pak

- pro každé $c \in \mathbb{R}$ existuje $f_{c\vec{u}}(x^*)$ a platí $f_{c\vec{u}}(x^*) = c\, f_{\vec{u}}(x^*)$,
- $(f \pm g)_{\vec{u}}(x^*) = f_{\vec{u}}(x^*) \pm g_{\vec{u}}(x^*)$,
- $(fg)_{\vec{u}}(x^*) = f_{\vec{u}}(x^*)\, g(x^*) + f(x^*)\, g_{\vec{u}}(x^*)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)_{\vec{u}}(x^*) = \frac{f_{\vec{u}}(x^*)\, g(x^*) - f(x^*)\, g_{\vec{u}}(x^*)}{g^2(x^*)}$, je-li $g(x^*) \neq 0$.

Spojitost $f_{\vec{u}\vec{v}}(x^*)$ a $f_{\vec{v}\vec{u}}(x^*)$ zaručuje jejich rovnost („Youngova věta“).

Poznámka

Vedle těchto identit již však nemusí platit aditivita směrových derivací vzhledem k vektorům určujícím směr derivace. Jestliže existují $f_{\vec{u}}(x^*)$ a $f_{\vec{v}}(x^*)$, nemusí existovat $f_{\vec{u}+\vec{v}}(x^*)$. A i když existuje $f_{\vec{u}+\vec{v}}(x^*)$ může být $f_{\vec{u}+\vec{v}}(x^*) \neq f_{\vec{u}}(x^*) + f_{\vec{v}}(x^*)$. Ovšem platí:

Nechť $f_{\vec{u}}(x^*)$ je spojitá v nějakém okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* a nechť existuje $f_{\vec{v}}(x^*)$. Potom platí $f_{\vec{u}+\vec{v}}(x^*) = f_{\vec{u}}(x^*) + f_{\vec{v}}(x^*)$.

Geometrický význam směrové derivace: $\operatorname{tg}\alpha = f_{\vec{u}}(x^*)$.

Parciální derivace

Parciální derivace 1. řádu odpovídají směrovým derivacím ve směru vektorů $\vec{u} = e_i$.

Příklad

Vypočtěte směrovou derivaci $f_{\vec{u}}(x^*, y^*)$, je-li dáno:

(a) $f(x,y) = x^2 - 3xy - 2y^2$, $[x^*, y^*] = [-1, 1]$, $\vec{u} = (2, -1)^\top$,

(b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$, $[x^*, y^*] = [1, -1]$, $\vec{u} = (1, 2)^\top$,

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $[x^*, y^*] = [1, 1]$, $\vec{u} = (2, 1)^\top$,

(d) $f(x,y) = x^2 y \ln \dfrac{x}{y}$, $[x^*, y^*] = [2, 3]$, $\vec{u} = (1, -2)^\top$,

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^4}{x^2 + y^2} & [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & [x,y] = [0,0], \end{cases}$ $[x^*, y^*] = [0, 0]$, $\vec{u} = (3, 1)^\top$.

Příklad

Nechť

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

$[x^*, y^*] = [0, 0]$, $\vec{u} = (1, 0)^\top$ a $\vec{v} = (0, 1)^\top$. Ukažte, že existují $f_{\vec{u}}(0,0)$, $f_{\vec{v}}(0,0)$, $f_{\vec{u}+\vec{v}}(0,0)$, avšak $f_{\vec{u}+\vec{v}}(0,0) \neq f_{\vec{u}}(0,0) + f_{\vec{v}}(0,0)$.

Poznámka

Již víme, že z existence všech parciálních derivací prvního řádu funkce f v bodě x^* neplyne spojitost funkce f v bodě x^*. Ovšem ani existence směrové derivace $f_{\vec{u}}(x^*)$ v libovolném směru neimplikuje spojitost funkce f v bodě x^*. Toto může být na první pohled překvapující, protože nyní již zahrnujeme všechny směry přiblížení. Ovšem všechny tyto směry reprezentují přiblížené po přímkách, přičemž definice limity (s jejíž pomocí je definována spojitost) zahrnuje všechny způsoby přiblížení do bodu x^* (paraboly, kubické křivky, ...).

Příklad

Ukažte, že funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} & [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & [x,y] = [0,0], \end{cases}$$

má v bodě $[0,0]$ směrovou derivaci $f_{\vec{u}}(0,0)$ pro libovolný vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ovšem není v tomto bodě spojitá.

Gradient funkce

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a nechť v bodě $x^* \in D(f)$ existují všechny parciální derivace prvního řádu. Pak vektor

$$\operatorname{grad} f(x^*) := \left(f_{x_1}(x^*), \dots, f_{x_n}(x^*)\right)^\top$$

se nazývá <u>gradientem</u> funkce f v bodě x^*.

Věta 4.44(i)

Má-li funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $x^* \in D(f)$ spojité všechny parciální derivace prvního řádu, pak platí

$$f_{\vec{u}}(x^*) = \langle \operatorname{grad} f(x^*), u \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f_{x_1}(x^*) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x^*) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{1}$$

Poznámka

Jsou-li splněny podmínky Věty 4.44(i), pak ze vzorce pro odchylku dvou vektorů $\cos\varphi = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$, kde $\|\vec{u}\| := \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle}$, a z předchozí rovnosti (1) plyne

$$f_{\vec{u}}(x^*) = \langle \operatorname{grad} f(x^*), \vec{u}\rangle = \|\operatorname{grad} f(x^*)\|\,\|\vec{u}\|\cos\varphi, \tag{2}$$

kde $\varphi \in [0, \pi]$ je odchylka vektorů $\operatorname{grad} f(x^*)$ a $\vec{u}$.

Směrová derivace (podobně jako obyčejná a parciální derivace) udává míru změny funkce f ve směru vektoru $\vec{u}$. Uvažme nyní všechny vektory $\vec{u}$ s konstantní délkou, pak hodnota $f_{\vec{u}}(x^*)$ bude podle (2) maximální, jestliže $\varphi = 0$ (skalární součin $\langle \operatorname{grad} f(x^*), \vec{u}\rangle$ nabývá pro vektory $\vec{u}$ největší hodnoty, jestliže jsou vektory $\operatorname{grad} f(x^*)$ a $\vec{u}$ lineárně závislé). Proto $\operatorname{grad} f(x^*)$ udává směr, ve kterém funkce f v bodě x^* roste nejrychleji. Podobně $-\operatorname{grad} f(x^*)$ je směr nejrychlejšího poklesu funkce f v bodě x^*. Je-li $\vec{u} \perp \operatorname{grad} f(x^*)$, pak $f_{\vec{u}}(x^*) = 0$, tedy v tomto směru se hodnota funkce f v bodě x^* nemění. Nebo-li platí následující věta.

Věta 4.45(i)

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x^*, y^*]$ spojité všechny parciální derivace prvního řádu, přičemž $\operatorname{grad} f(x^*, y^*) \neq 0$. Pak směrová derivace $f_{\vec{u}}(x^*, y^*)$ ve směru jednotkového vektoru $\vec{u}$ nabývá největší hodnoty pro $\vec{u} = \frac{\operatorname{grad} f(x^*,y^*)}{\|\operatorname{grad} f(x^*,y^*)\|}$ a nejmenší hodnoty pro $\vec{u} = -\frac{\operatorname{grad} f(x^*,y^*)}{\|\operatorname{grad} f(x^*,y^*)\|}$. Maximální hodnota potom je $f_{\vec{u}}(x^*, y^*) = \|\operatorname{grad} f(x^*, y^*)\|$ a minimální $f_{\vec{u}}(x^*, y^*) = -\|\operatorname{grad} f(x^*, y^*)\|$.

Ilustrace významu $\operatorname{grad} f$ pro $f(x, y) = x^2/2 + y^2/2$ v bodě $[1, 1]$.

Občas se užívá značení $\nabla f(x) := \left(\operatorname{grad} f(x)\right)^\top$, tj. ∇ značí tzv. Hamiltonův nabla operátor $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

Gradient vlastně udává směr největšího sklonu/spádu. Také platí, že vektor $\operatorname{grad} f(x^*)$ je normálou (tj. kolmý k tečně) pro vrstevnici funkce f, která prochází bodem x^*.

Příklad

Najděte jednotkový vektor $\vec{u}$, pro který je směrová derivace funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4}$ v bodě $[2,1]$ největší, a určeme její hodnotu.

1 Základní pojmy

2 Limita a spojitost

3 Derivování v $\mathbb{R}^n$

4 Taylorova věta

5 Vektorové funkce

6 Derivování maticových funkcí

Taylorova věta

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x^*, y^*]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $n+1$ včetně pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro každý bod $[x, y]$ z tohoto okolí platí

$$f(x,y) = T_n(x,y) + R_n(x,y),$$

kde pro $h = x - x^*$, $k = y - y^*$ a $\vartheta \in (0,1)$ klademe (Taylorův polynom & zbytek)

$$\begin{aligned} T_n(x,y) = f(x^*,y^*) &+ \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*)k\right) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*,y^*)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x^*,y^*)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*,y^*)k^2\right) + \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\,\partial y^j}(x^*,y^*)h^{n-j}k^j, \end{aligned}$$

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\,\partial y^j}(x^* + \vartheta h, y^* + \vartheta k)h^{n+1-j}k^j.$$

$n \in \{1, 2\}$

V případě $n = 1$ dává Taylorova věta přibližné vyjádření (pravá strana vlastně popisuje tečnou rovinu)

$$f(x, y) \approx f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*).$$

Pro $n = 2$ dostaneme

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx f(x^*, y^*) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*)(x - x^*)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x^*, y^*)(x - x^*)(y - y^*) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*)(y - y^*)^2. \end{aligned}$$

1 Základní pojmy

2 Limita a spojitost

3 Derivování v $\mathbb{R}^n$

4 Taylorova věta

5 Vektorové funkce

6 Derivování maticových funkcí

Vektorová funkce

Funkce $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se nazývá vektorová funkce m proměnných, tj.

$$x = (x_1, \dots, x_n)^\top,\ F(x) \in \mathbb{R}^m \Longrightarrow F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Jacobiho matice

Pro funkci $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definujeme Jacobiho matici $DF(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jako

$$DF(x) = \frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \underbrace{\begin{pmatrix} (f_1)_{x_1} & \dots & (f_1)_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_m)_{x_1} & \dots & (f_m)_{x_n} \end{pmatrix}}_{n} \Bigg\} m.$$

Jacobián (též Jacobiho determinant) je $\det DF(x)$.

Příklad

Vypočtěte Jacobiho matici pro funkci

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \\ \cos(x - y) \end{pmatrix}.$$

Jacobi vs. Hamilton

V případě $m = 1$ Jacobiho matice odpovídá Hamiltonovu nabla operátoru, tj.

$$DF(x) = \nabla F(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1} & \dots & f_{x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n},$$

a máme tedy také jednoduchý vztah mezi gradientem a Jacobiho maticí

$$\operatorname{grad} F(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} = \left[DF(x)\right]^\top.$$

Rozdělení do bloků

Uvažujme $F : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^k$, potom

$$D_x F(x,y) = \frac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(x_1,\dots,x_n)} = \begin{pmatrix} (f_1)_{x_1} & \dots & (f_1)_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_m)_{x_1} & \dots & (f_m)_{x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

$$D_y F(x,y) = \frac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(y_1,\dots,y_K)} = \begin{pmatrix} (f_1)_{y_1} & \dots & (f_1)_{y_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_m)_{y_1} & \dots & (f_m)_{y_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times k},$$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} (f_1)_{x_1} & \dots & (f_1)_{x_n} & (f_1)_{y_1} & \dots & (f_1)_{y_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_m)_{x_1} & \dots & (f_m)_{x_n} & (f_m)_{y_1} & \dots & (f_1)_{y_k} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} D_x f & D_y f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(n+k)}.$$

Příklad

Vypočtěte Jacobiho matice $D_x F(x,y)$ a $D_y F(x,y)$ pro funkci

$$F(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \sin x_1 + y_2 \cos x_2 \\ y_1 \cos x_1 + y_2 \sin x_3 \\ y_1 \cos x_2 + y_2 \sin x_2 \end{pmatrix}.$$

Hessova matice

Pro $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definujeme Hessovu matici jako

$$D^2 f(x) := D\big[\operatorname{grad} f(x)\big] = D\begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \dots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \dots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Hessova matice se někdy značí jako $\nabla^2 f(x)$ nebo $Hf(x)$. Jsou-li splněny požadavky Youngovy věty, je Hessova matice symetrická.

Příklad

Vypočtěte Hessovu matici pro funkci

$$f(x,y) = \sin(xy^2).$$

$$u'(x) = f'(y)\, g'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

Příklad

$g(x) = 2x^2$, $f(y) = \cos y$, $u'(x) = ?$

Jacobiho matice pro složení vektorových funkcí

Nechť $g : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jsou třídy C^1 (tj. mají spojité všechny parciální derivace prvního řádu), potom

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} (g_1)_{x_1} & \dots & (g_1)_{x_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_n)_{x_1} & \dots & (g_n)_{x_s} \end{pmatrix}, \quad Df(y) = \begin{pmatrix} (f_1)_{y_1} & \dots & (f_1)_{y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_m)_{y_1} & \dots & (f_m)_{y_n} \end{pmatrix}$$

a platí

$$D(f(g(x))) = \underbrace{Df(g(x))}_{\mathbb{R}^{m \times n}} \underbrace{Dg(x)}_{\mathbb{R}^{n \times s}} \in \mathbb{R}^{m \times s}.$$

Příklad

Vypočtěte Jacobiho matici $D(f(g(x)))$, je-li

$$g(x) = g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 x_2^2 \end{pmatrix}, \quad f(y) = f(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_1^2 + y_2 \\ y_2^2 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Pro $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí

$$(gh)'(x) = g'(x)\,h(x) + g(x)\,h'(x)$$

Jacobiho matice pro součin

Pro skalární funkce více proměnných $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí stejné pravidlo, tj. pro $f(x) = g(x)\,h(x)$ máme

$$Df(x) = Dg(x)\,h(x) + g(x)\,Dh(x),$$

tj. pomocí gradientů

$$\operatorname{grad} f(x) = \big[\operatorname{grad} g(x)\big]\,h(x) + g(x)\,\big[\operatorname{grad} h(x)\big].$$

Příklad

Vypočtěte Jacobiho matici součinu $D(g(x)\,h(x))$, je-li

$$g(x,y) = x^2 + y, \quad h(x,y) = \sin(xy).$$

Jacobiho matice pro součin vektorových funkcí

Podobné pravidlo platí i pro vektorové funkce $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ovšem s použitím skalárního součinu, tj. pro funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) := \langle g(x), h(x)\rangle = \underbrace{[g(x)]^\top}_{\mathbb{R}^{1\times m}}\,\underbrace{h(x)}_{\mathbb{R}^{m\times 1}}$$

platí

$$\begin{aligned} Df(x) &= \langle g(x), Dh(x)\rangle + \langle h(x), Dg(x)\rangle = \\ &= \underbrace{\underbrace{[g(x)]^\top}_{\mathbb{R}^{1\times m}}\,\underbrace{Dh(x)}_{\mathbb{R}^{m\times n}}}_{\mathbb{R}^{1\times n}} + \underbrace{\underbrace{[h(x)]^\top}_{\mathbb{R}^{1\times m}}\,\underbrace{Dg(x)}_{\mathbb{R}^{m\times n}}}_{\mathbb{R}^{1\times n}} \\ &\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\mathbb{R}^{1\times n}} \end{aligned}$$

Příklad

Vypočtěte Jacobiho matici součinu $D(\langle g(x), h(x)\rangle)$, je-li

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ x + y^3 \end{pmatrix}, \quad h(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(xy) \\ \cos(xy) \end{pmatrix}.$$

Jacobiho matice pro součin vektorové a skalární funkce

Je-li jedna z funkcí skalární a $x \in \mathbb{R}$, pak místo $D\alpha(x)$ budeme psát pouze $\alpha'(x)$ (a je jedno, z které strany tímto číslem násobíme), potom pro funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ definovanou předpisem

$$f(x) := \alpha(x)\, g(x), \quad \text{kde} \quad \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \& \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m,$$

platí

$$Df(x) = \underbrace{\underbrace{\alpha'(x)}_{\mathbb{R}}\ \underbrace{g(x)}_{\mathbb{R}^{m\times 1}} + \underbrace{\alpha(x)}_{\mathbb{R}}\ \underbrace{Dg(x)}_{\mathbb{R}^{m\times 1}}}_{\mathbb{R}^{m\times 1}}$$

Součin vektorové a skalární funkce pro více proměnných

Je-li $f(x) := h(x)\, g(x)$, přičemž $x \in \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je skalární funkce a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, pak $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a platí

$$Df(x) = \underbrace{\underbrace{h(x)}_{\mathbb{R}}\ \underbrace{Dg(x)}_{\mathbb{R}^{m\times n}} + \underbrace{g(x)}_{\mathbb{R}^{m\times 1}}\ \underbrace{Dh(x)}_{\mathbb{R}^{1\times n}}}_{\mathbb{R}^{m\times n}}$$

Příklad

Vypočtěte Jacobiho matici součinu $D(h(x,y)\, g(x,y))$, je-li

$$h(x,y) = x^2 + y^3, \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x y^3 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

1 Základní pojmy

2 Limita a spojitost

3 Derivování v $\mathbb{R}^n$

4 Taylorova věta

5 Vektorové funkce

6 Derivování maticových funkcí

Nyní se podíváme na derivování některých funkcí, které lze vyjádřit pomocí vhodných operací na maticích a vektorech. Ovšem v tomto kontextu nebudeme počítat (parciální) derivace vzhledem k jednotlivým proměnným, ale vzhledem k celému vektoru proměnných. Jinými slovy, pro m-vektorovou funkci F budeme zápisem

$$\frac{dF}{dx}$$

rozumět $m \times n$ Jacobiho matici pro funkci F vzhledem ke složkám n-rozměrného vektoru x (přičemž je možné i $m = 1$ nebo $n = 1$), tj. budeme derivovat „skalární/vektorovou funkci vzhledem k vektoru/skaláru“. (Transponování?)

Derivování „maticové funkce vzhledem ke skaláru“ probíhá po složkách matice, zatímco derivováním „skalární funkce vzhledem k matici“ rozumíme matici stejného rozměru, jejíž složky odpovídají parciálním derivacím dané funkce vzhledem k odpovídající komponentě matice proměnných, tj.

$$\frac{df}{dA} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_{11}} & \frac{\partial f}{\partial a_{12}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Derivování „vektorové funkce vzhledem k matici“ (a naopak)? $\rightsquigarrow$ „Vektorizace“ & „rematicování“!

Lineární funkce

Pro funkce $F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ určené předpisy $F(x) = Ax$ a $G(z) = z^\top A$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je dána matice, platí

$$\frac{dF}{dx} = A \quad \& \quad \frac{dG}{dz} = A^\top.$$

Kvadratické funkce

Pro funkci $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ určenou předpisem $F(x) = z^\top Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je dána matice a $z \in \mathbb{R}^m$ je daný vektor, platí

$$\frac{dF}{dx} = z^\top A.$$

Podobně pro funkci $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ určenou předpisem $F(z) = z^\top Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je dána matice a $x \in \mathbb{R}^n$ je daný vektor, platí

$$\frac{dF}{dz} = x^\top A^\top.$$

Konečně pro funkci $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ určenou předpisem $F(z) = x^\top Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je dána matice, platí

$$\frac{dF}{dx} = x^\top (A + A^\top) \quad \text{a} \quad \frac{d^2F}{dx^2} = A + A^\top.$$

Je-li matice A navíc symetrická, pak

$$\frac{dF}{dx} = 2x^\top A \quad \text{a} \quad \frac{d^2F}{dx^2} = 2A.$$

Stopa

Nechť je dána matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,A}{\mathrm{d}A} = I.$$

Nechť jsou dány matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tr}(AX)}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tr}(XA)}{\mathrm{d}X} = A^\top \quad \& \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tr}(A^\top X^\top)}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tr}(X^\top A^\top)}{\mathrm{d}X} = A^\top$$

Nechť jsou dány matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tr}(AXB)}{\mathrm{d}X} = A^\top B^\top.$$

Nechť jsou dány matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $B \in \mathbb{R}^{q\times r}$ a $Z \in \mathbb{R}^{r\times m}$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tr}(AXBZ)}{\mathrm{d}X} = A^\top Z^\top B^\top \quad \& \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tr}(AXBZ)}{\mathrm{d}Z} = B^\top X^\top A^\top.$$

Nechť jsou dány matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tr}(AX^\top BX)}{\mathrm{d}X} = B^\top XA^\top + BXA.$$

Inverzní matice

Jestliže $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je maticová funkce splňující $\det F(x) \neq 0$ na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, pak

$$\frac{\mathrm{d}F^{-1}}{\mathrm{d}x}(x) = -F^{-1}(x)\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x)\,F^{-1}(x) \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Determinant

Nechť je dána matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}\det A}{\mathrm{d}A} = A^{\mathrm{adj}} (= (\det A)\,A^{\top -1}).$$

Jsou-li dány takové matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, že $\det X \neq 0$, pak

$$\frac{\mathrm{d}\det(AXB)}{\mathrm{d}X} = \det(AXB)\,X^{\top -1}.$$

Jsou-li dány matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, pak

$$\frac{\mathrm{d}\det(X^\top AX)}{\mathrm{d}X} = \begin{cases} 2[\det(X^\top AX)]\,X^{\top -1}, & m = n \;\&\; \det X \neq 0 \;\&\; \det A \neq 0, \\ 2AX\,(X^\top AX)^{\mathrm{adj}} & \\ \quad (= 2[\det(X^\top AX)]\,AX\,(X^\top AX)^{-1}), & A = A^\top, \\ AX\,(X^\top AX)^{\mathrm{adj}} + A^\top X\,(X^\top A^\top X)^{\mathrm{adj}} = & \\ \quad \big(= [\det(X^\top AX)]\,[AX\,(X^\top AX)^{-1} + A^\top X\,(X^\top A^\top X)^{-1}]\big). & \end{cases}$$

Kdyby to nestačilo, tak (s velkou obezřetností) viz

K. B. Petersen, M. S. Pedersen, *The Matrix Cookbook*, 2012. Dostupné z https://mpevpam.page.link/gZ44, [vid. 23. září 2018].

Nebo

stránku https://mpevpam.page.link/Kc7E na Wikipedii.

Konec.