MPE_VPAM: Vybrané partie aplikované matematiky

Petr Zemánek (Masarykova Univerzita, Brno)

Kapitola 3: Maticový počet

(verze: 23. září 2020)

Matice

Matice typu $m \times n$ je pravoúhlé (nebo obdélníkové) schéma, které má m řádků a n sloupců

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}.$$

Vektor

Vektor (veličina, která má směr i velikost) je uspořádaná n-tice prvků (nebo matice typu $n \times 1$)

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Typy matic

- čtvercová matice
- nulová matice
- horní/dolní trojúhelníková
- jednotková matice
- diagonální

Součet matic

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Pak součet $A + B$ je matice C taková, že

$$C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \quad \text{(tj. po složkách).}$$

Násobení skalárem

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak αA je matice B taková, že

$$B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \quad \text{(tj. po složkách).}$$

Součin matic

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}}$. Pak součin AB je matice C taková, že

$$C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}} = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}}$$

Pravidla pro počítání s maticemi

Pro matice A, B, C vhodných rozměrů a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C),$$
$$(A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC,$$
$$(AB)C = A(BC), \quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,$$
$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,$$
$$A(\alpha B) = \alpha(AB) = (\alpha A)B$$

Obecně neplatí!

$$AB = BA \quad \text{(ani když oba součiny existují)!}$$

Transponovaná matice

Je-li $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, pak <u>transponovaná</u> matice k A je matice

$$A^\top = B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}},$$

kde $b_{ij} := a_{ji}$ pro $i = 1, \dots n$, $j = 1, \dots, m$.

Pokud $A^\top = A$, nazývá se matice <u>symetrická</u>.

Platí:

$$(AB)^\top = B^\top A^\top$$

Příklad

Sečtěte matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 6 & 5 & 1 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \cdots$$

Příklad

Pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vypočtěte AB a BA.

Příklad

Pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vypočtěte AB, BA a $B^\top A^\top$.

Skalární součin

Pro vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ definujeme (standardní) skalární součin jako

$$u \cdot v = \langle u, v \rangle := \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u^\top v.$$

Vlastnosti skalárního součinu

$$\langle u, u \rangle \geqslant 0 \text{ pro každé } u \in \mathbb{R}^n, \quad \langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0,$$
$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \quad \langle u + v, z \rangle = \langle u, z \rangle + \langle v, z \rangle,$$
$$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle = \langle u, \alpha v \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$
$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^\top v \rangle \text{ pro } A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Norma vektoru

Norma vektoru $u \in \mathbb{R}^n$ je definována jako

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

Vlastnosti normy

$$\|u\| \geqslant 0, \quad \|u\| = 0 \iff u = 0,$$
$$\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$
$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|,$$
$$\big| \|u\| - \|v\| \big| \leqslant \|u - v\|.$$

Odchylka vektorů

Dva vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ svírají úhel $\theta \in [0, \pi]$, pro který platí

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta.$$

Z vlastností funkce kosinus pak plyne

- $\theta \in [0, \pi/2)$, je-li $\langle u, v \rangle > 0$ (tj. ostrý úhel),
- $\theta \in (\pi/2, \pi]$, je-li $\langle u, v \rangle < 0$ (tj. tupý úhel),
- $\theta = \pi/2$, je-li $\langle u, v \rangle = 0$ (tj. pravý úhel).

Ortogonální vektory

$$\langle u, v \rangle = 0$$

Ortonormální systém vektorů

$\{u_1, \dots, u_m\}$, $u_i \in \mathbb{R}^n$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Příklad

Uvažte krychli s délkou hrany a. Určete odchylku tělesové uhlopříčky od jedné z hran (vycházející z téhož vrcholu).

Příklad

Uvažte ekonomiku s n komoditami, kde x_i značí množství i-té komodity. Připusťte, že libovolná komodita může být dodána v libovolném množství, tj. x_i může být libovolné nezáporné číslo.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Řekneme, že vektory $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé, jestliže z rovnosti

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m = 0$$

plyne $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. V opačném případě, tj. když existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, tak, že

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m = 0,$$

říkáme, že vektory $u_1, \dots, u_m$ jsou lineárně závislé.

Příklad

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{vs.} \quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Sloupce (řádky) matice můžeme chápat jako vektory a lineární nezávislost řádků matice pak znamená lineární nezávislost vektorů. Pomocí tohoto pojmu definujeme hodnost matice.

Hodnost matice

Hodnost matice A je číslo, které je rovno maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků. Označujeme ji $h(A)$.

Je-li A čtvercová matice typu $n \times n$, jejíž hodnost je rovna n, nazýváme ji regulární maticí. Je-li $h(A) < n$, nazývá se taková matice singulární.

Jak určíme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice?

Je zřejmé, že v nulové matici neexistuje žádný lineárně nezávislý řádek. Hodnost nulové matice je tedy rovna nule. V dalším proto uvažujme pouze nenulové matice, tj. předpokládejme, že je aspoň jeden prvek této matice nenulový.

U matice 2×2 snadno poznáme, že jsou její řádky lineárně závislé. Nenulová matice A typu 2×2 má hodnost jedna, pokud je druhý řádek násobkem prvního řádku, tj. matice je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{pmatrix},$$

kde k je nějaké reálné číslo. V opačném případě má A hodnost 2.

Hodnost vs. úprava matice

Hodnost matice se nezmění, jestliže:

- zaměníme pořadí řádků,
- vynásobíme libovolný řádek nenulovým číslem,
- přičteme k danému řádku (nebo odečteme od daného řádku) libovolný násobek jiného řádku.

Schodovitý tvaru

Řekneme, že A je matice ve schodovitém tvaru, jestliže v matici A každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než předchozí řádek.

Převod na schodovitý tvar

Každou matici lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést do schodovitého tvaru.

A jak tedy na hodnost větších matic?

Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Soustavy lineárních rovnic

Systém lineárních rovnic

Systémem k lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ rozumíme soustavu rovnic

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad &= \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Je-li $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$, nazývá se takovýto systém homogenní.

Řešením systému (1) je každá uspořádaná n-tice $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ takových čísel t_1, t_2,..., t_n, která dané soustavě vyhovuje.

Jaká mohou být řešení?

Obecně (tj. nezávisle na počtu lineárních rovnic a počtu neznámých) jsou možné tři případy:

- Systém rovnic má právě jedno řešení.
- Systém rovnic má nekonečně mnoho řešení.
- Systém rovnic nemá žádné řešení.

Jak ale poznáme, který z těchto případů nastane?

Studujme matice!

Maticí systému (1) nazýváme matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Rozšířenou maticí systému (1) nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}.$$

Frobeniova věta

Systém lineárních rovnic má řešení (tj. alespoň jedno) právě tehdy, když je hodnost matice systému rovna hodnosti rozšířené matice systému.

Důsledek

Systém k lineárních rovnic o n neznámých má jediné řešení, jestliže je hodnost h matice systému rovna hodnosti rozšířené matice systému a navíc je rovna počtu neznámých n, tedy $h = n$.

Důsledek

Systém k lineárních rovnic o n neznámých má nekonečně mnoho řešení, jestliže se hodnost h matice systému rovná hodnosti rozšířené matice a navíc je tato hodnost menší než počet neznámých, tj. $h < n$. V tomto případě lze $n - h$ neznámých volit libovolně.

Gaussova eliminační metoda

Řešení systému se nezmění, jestliže:

- zaměníme pořadí rovnic,
- vynásobíme libovolnou rovnici nenulovým číslem,
- přičteme k dané rovnici libovolný násobek jiné rovnice.

Těmito úpravami převedeme matici systému na schodovitý tvar a z něj již dokážeme snadno vypočítat řešení.

Příklad

Vyřešte soustavy rovnic

(a)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1, \\ -x + 3y + 2z &= 0, \\ 2x - y + 5z &= 5. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2, \\ x_2 + x_4 &= 1, \\ x_1 - x_3 &= 1. \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 4, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= -3. \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 2, \\ 2x + 2y + 3z &= 3, \\ 5x + 5y + 4z &= 1. \end{aligned}$$

Příklad

Zpět k lineární (ne-)závislosti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice

Determinant čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu 1×1 je číslo $\det A$ (též $|A|$) dané vztahem

$$\det A = \det a_{11} = a_{11}.$$

Determinant čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu $n \times n$, $n \geqslant 2$, je číslo $\det A$ (též $|A|$) dané vztahem

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n} = \\ = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j},$$

kde A_{1j} značí matici, která vznikla z matice A odebráním prvního řádku a j-tého sloupce.

Vlastnosti determinantu

Nechť A, B jsou čtvercová matice řádu n.

- Platí $\det A = \det A^{\top}$.
- Platí $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (nikoli pro součet!).
- Hodnost matice $h(A) = n$ právě tehdy, když $\det A \neq 0$.

Jak ale determinant vypočítat?

Determinanty malých matic

Speciálně pro determinant $\det A$ čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu 2×2 dostáváme tzv. křížové pravidlo:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Pro determinant $\det A$ čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu 3×3 můžeme použít tzv. Sarrusovo pravidlo:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Příklad

Vypočtěte determinant pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Speciální případ

Je-li matice A v horním/dolním trojúhelníkovém tvaru (obzvláště diagonální), pak $\det A$ je roven součinu prvků na diagonále.

Determinanty větších matic

- Zaměníme-li pořadí dvou řádků (sloupců) matice, determinant výsledné matice bude mít opačné znaménko než determinant matice původní.
- Vynásobíme-li libovolný řádek (sloupec) matice číslem k, determinant výsledné matice bude k-násobkem determinantu matice původní.
- Přičtením k-násobek libovolného řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci), determinant matice se nezmění.

Příklad

Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laplaceův rozvoj

Pro výpočet determinantů vyšších řádů můžeme využít i následujícího vztahu:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{l+k} a_{lk} \det A_{lk}, \qquad l \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n,$$

ve kterém A_{lk} je matice, která vznikne z matice A vypuštěním l-tého řádku a k-tého sloupce. Tento vztah vlastně říká, že matici je možné tzv. rozvinout podle libovolného řádku. Výpočet determinantu matice řádu n tak převedeme na výpočet n determinantů řádu $n-1$. Podobně můžeme matici rozvinout i podle libovolného sloupce. Při praktickém výpočtu volíme k rozvoji řádek (sloupec), který obsahuje co nejvíce nul, jelikož pak nemusíme některé příslušné menší determinanty vůbec počítat.

Číslo $\det A_{lk}$ je tzv. (l, k)-tý minor matice A.

Číslo $(-1)^{l+k} \det A_{lk}$ je tzv. (l, k)-tý kofaktor matice A.

Příklad

Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Využití determinantu při řešení soustavy rovnic.

Cramerovo pravidlo

Nechť $b \in \mathbb{R}^n$ a A je matice řádu n, tj $n \times n$. Je-li $\det A \neq 0$, pak pro jediné řešení $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ soustavy $Ax = b$ platí

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n,$$

kde A_i značí matici A, ve které byl nahrazen i-tý sloupec vektorem b.

Příklad

Vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1, \\ -x + 3y + 2z &= 0, \\ 2x - y + 5z &= 5. \end{aligned}$$

Příklad

Analýza jednoduchého IS-LM modelu

$$\begin{aligned} sY + ar &= I^0 + G, \\ mY - hr &= M_s - M^0. \end{aligned}$$

Determinant (užitečné vzorce)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Pak

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

Odtud se dá pro matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times \ell}$ a $D \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ splňující $\det A \neq 0$ ukázat, že

$$\det(A + BCD) = \det A \, \det(I_n + A^{-1}BCD) = \det A \, \det(I_m + CDA^{-1}B).$$

Ekonometrie: Proto v případě $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B = x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C = \alpha \in \mathbb{R}$ a $D = y^\top \in \mathbb{R}^{1\times n}$ s $\det A \neq 0$ platí

$$\det(A + \alpha\, x y^\top) = (1 + \alpha\, y^\top A^{-1} x) \det A.$$

Inverzní matice

Matice B je <u>inverzní</u> k A, jestliže platí $AB = I = BA$.

- Pokud taková matice existuje, označuje se A^{-1}.
- Inverzní matice existuje pouze pro čtvercové matice (a je jediná).
- Inverzní matice existuje právě tehdy, když $h(A) = n$, což je ekvivalentní s $\det A \neq 0$.

  Platí

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (A^{-1})^{\top} = (A^{\top})^{-1}, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Jak ale inverzní matici spočítat?

$$(A \,|\, I) \rightsquigarrow (I \,|\, A^{-1}).$$

Adjungovaná matice

Nechť A je $n \times n$ regulární matice. <u>Adjungovaná</u> matice A^{adj} k matici A je transpozice matice složené z kofaktorů matice A, tj.

$$A^{\mathrm{adj}} = \left((-1)^{i+j} \det A_{ij}\right)^{\top}_{i,j=1,\dots,n}.$$

Potom platí

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\mathrm{adj}}.$$

Příklad

Odvoďte vzorec pro inverzní matici k 2×2 matici.

Příklad

Vypočtěte A^{-1} pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice (užitečné vzorce)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ jsou takové, že $\det(I + AB) \neq 0$, potom

$$(I_m + AB)^{-1} = I_m - A(I_n + BA)^{-1}B.$$

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times \ell}$ a $D \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$. Je-li $\det A \neq 0$ a $\det(A + BCD) \neq 0$, potom platí

$$\begin{aligned}(A + BCD)^{-1} &= A^{-1} - (I_n + A^{-1}BCD)^{-1}A^{-1}BCDA^{-1} = \\ &= A^{-1} - A^{-1}(I_n + BCDA^{-1})^{-1}BCDA^{-1} = \\ &= A^{-1} - A^{-1}B(I_m + CDA^{-1}B)^{-1}CDA^{-1} = \qquad (*) \\ &= A^{-1} - A^{-1}BC(I_\ell + DA^{-1}BC)^{-1}DA^{-1} = \\ &= A^{-1} - A^{-1}BCD(I_n + A^{-1}BCD)^{-1}A^{-1} = \\ &= A^{-1} - A^{-1}BCDA^{-1}(I_n + BCDA^{-1})^{-1}.\end{aligned}$$

Ekonometrie: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B = x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C = \alpha \in \mathbb{R}$ a $D = y^\top \in \mathbb{R}^{1\times n}$ splňující $\det A \neq 0$ a $\det(A + \alpha xy^\top) \neq 0$, pak z $(*)$ plyne

$$(A + \alpha xy^\top)^{-1} = A^{-1} - \beta A^{-1}xy^\top A^{-1}, \quad \text{kde} \quad \beta := \frac{\alpha}{1 + \alpha y^\top A^{-1}x}.$$

Vlastní číslo

Nechť A je čtvercová matice, λ je komplexní číslo a x je nenulový vektor, který je řešením rovnice
$$Ax = \lambda x. \tag{2}$$
Pak se komplexní číslo λ nazývá vlastní číslo matice A a vektor x se nazývá vlastní vektor matice A (příslušný vlastnímu číslu λ).

Geometricky: Vlastní vektor je takový vektor, který se po vynásobení matice pouze „natáhne“ nebo „zkrátí“, ale nemění svůj směr.

Jak vlastní čísla najít?

Z předchozí definice se dá i snadno vyvodit, jak vlastní čísla matice A nalézt. Přepsáním rovnice (2) dostaneme
$$Ax - \lambda x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (A - \lambda I)x = 0.$$
Máme tak vlastně homogenní systém lineárních rovnic, u kterého požadujeme, aby měl jiné než triviální řešení. To znamená, že matice $A - \lambda I$ musí mít hodnost menší než n. Jinými slovy tato matice není regulární a pro její determinant musí platit
$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{3}$$
Rovnice (3) se nazývá charakteristická rovnice matice A.

Příklad

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Některé vlastnosti vlastních čísel

Nechť $\lambda_1, \dots \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A, potom platí:

- $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$,
- matice A^{-1} má vlastní čísla $\frac{1}{\lambda_1}, \dots \frac{1}{\lambda_n}$,
- $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, kde $\operatorname{tr} A$ je stopa matice,
- je-li A symetrická matice, je její hodnost rovna počtu nenulových vlastních čísel, všechna vlastní čísla jsou reálná a příslušné vlastní vektory jsou ortogonální.

Negativně definitní a semidefinitní matice

Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se nazývá negativně semidefinitní, pokud

$$v^\top A v \leqslant 0 \quad \text{pro každé } v \in \mathbb{R}^n.$$

V takovém případě píšeme $A \leqslant 0$. Jestliže dokonce platí $v^\top A v < 0$ pro všechny vektory $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, nazývá se matice A negativně definitní, což zapisujeme jako $A < 0$.

Jestliže je matice A navíc symetrická, pak pro $v = (v_1, \dots, v_n)^\top$ se výraz $v^\top A v$ nazývá kvadratická forma proměnných $v_1, \dots, v_n$.

Věta 3.32(i)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potom platí (analogicky pro $A > 0$)

(i) $A < 0 \Leftrightarrow A + A^\top < 0$ ($v^\top A v = \frac{1}{2} v^\top (A + A^\top) v$).

(ii) $A < 0 \Rightarrow \det A \neq 0$.

(iii) $A < 0$ právě tehdy, když $A^{-1} < 0$.

(iv) $A < 0 \Leftrightarrow -A > 0$ a $A \leqslant 0 \Leftrightarrow -A \geqslant 0$

Definitnost matice

Příklad

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} > 0, \qquad -I = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} < 0,$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} < 0, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0,$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \leqslant 0, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Definitnost vs. vlastní čísla

Je-li A symetrická matice s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak matice A je

(a) pozitivně definitní $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$,

(b) negativně definitní $\Leftrightarrow \lambda_i < 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$,

(c) pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \lambda_i \geqslant 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$,

(d) negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \lambda_i \leqslant 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} < 0, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Definitnost matice

Vedoucí hlavní submatice a minory

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\cdot} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Jak vzniknou?

Vedoucí hlavní submatice a minory

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Jak vzniknou?

Vedoucí hlavní submatice a minory

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Jak vzniknou?

Věta 3.36(i)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matice. Potom

(i) $A < 0$ právě tehdy, když VHM střídají znaménko počínaje záporným;

(ii) $A \leqslant 0$ právě tehdy, když HM lichých řádů jsou nekladné a HM sudých řádů jsou nezáporné;

(iii) $A > 0$ právě tehdy, když VHM jsou kladné;

(iv) $A \geqslant 0$ právě tehdy, když HM jsou nezáporné.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} > 0,$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} < 0, \qquad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Definitnost matice na podprostoru

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, přičemž $m < n$ a navíc $h(B) = m$ (tj. matice B má plnou hodnost). Potom řekneme, že matice A je negativně definitní na podprostoru $\operatorname{Ker} B$ (a píšeme $A < 0$ na $\operatorname{Ker} B$), jestliže

$$v^\top A v < 0 \quad \text{pro každé } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ takové, že } Bv = 0.$$

Negativní semidefinitnost na $\operatorname{Ker} B$ definujeme jako

$$v^\top A v \leqslant 0 \quad \text{pro každé } v \in \mathbb{R}^n \text{ takové, že } Bv = 0.$$

Analogicky definujeme pozitivní (semi-)definitnost.

Poznámka

- Stejně jako v případě „obyčejné“ (semi-)definitnosti se obvykle uvažuje symetrická matice A.
- „Obyčejná“ (semi-)definitnost vs. definitnost na $\operatorname{Ker} B$.
- V případě $n = m$ nemá koncept (semi-)definitnosti na $\operatorname{Ker} B$ smysl, neboť v takovém případě je $\operatorname{Ker} B = \{0\}$, a tedy libovolná matice je negativně i pozitivně semidefinitní na $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ a současně neexistuje pozitivně ani negativně definitní matice na $\operatorname{Ker} B = \{0\}$.

Příklad

Uveďte nutné a postačující podmínky pro negativní (semi-)definitnost na $\operatorname{Ker} B$ v případě $n = 2$ a $m = 1$.

Věta 3.38(i)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická a $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, přičemž $m < n$ a navíc $h(B) = m$ (tj. matice B má plnou hodnost). Potom $A < 0$ na $\operatorname{Ker} B$, jestliže rozšířená matice

$$H := \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{}^{m} & \overbrace{}^{n} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & A \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, n \end{array}$$

má následující vlastnost: posledních $n - m$ VHM počínaje $\det H$ střídá znaménko, přičemž $\operatorname{sgn}(\det H) = (-1)^n$.

$A > 0$ na $\operatorname{Ker} B$

Pro $A > 0$ na $\operatorname{Ker} B$ testujeme posledních $n - m$ VHM počínaje $\det H$, které všechny musí mít znaménko $(-1)^m$.

Poznámka

- Požadavek plné hodnosti matice B je ekvivalentní s podmínkou, že žádnou z rovnic v soustavě $Bv = 0$ nelze vynechat.
- Ekvivalence?
- Semidefinitnost?
- Vlastní čísla?

Příklad

Rozhodněte o definitnosti matice A na $\operatorname{Ker} B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$m = 1$

V případě jediného omezení udávajícího $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} b$, tj. $\operatorname{Ker} b$ je dáno jako $\{v \in \mathbb{R}^n \mid b\, z = 0\}$ pro daný vektor $b \in \mathbb{R}^n$, máme rozšířenou matici ve speciálním tvaru

$$H = \begin{pmatrix} 0_{1\times 1} & \overline{} \\ | & A \end{pmatrix}.$$

Pak pro zjištění definitnosti symetrické matice A na $\operatorname{Ker} b$ pomocí Věty 3.38(i) je potřeba otestovat $n-1$ posledních VHM matice H, přičemž platí:

- jestliže tyto VHM střídají znaménko a $\operatorname{sgn}(\det H) = (-1)^n$, pak $A < 0$ na $\operatorname{Ker} b$,
- jestliže tyto VHM mají stejné znaménko jako $(-1)^m = (-1)^1 = -1$ (tj. jsou-li záporné), pak $A > 0$ na $\operatorname{Ker} b$.

V případě vektoru $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ splňujícího $b_1 \neq 0$, se uvedené postačující podmínky stanou současně nutnými (tj. máme ekvivalentní charakterizaci).

Vlastní čísla

Pro semidefinitnost symetrické matice A na $\operatorname{Ker} b$ máme ekvivalentní charakterizaci také pomocí vlastních čísel:

- $A \leqslant 0$ na $\operatorname{Ker} b$ právě tehdy, když matice H má právě jedno kladné vlastní číslo,
- $A \geqslant 0$ na $\operatorname{Ker} b$ právě tehdy, když matice H má právě jedno záporné vlastní číslo.

Příklad

Uvažte matici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Motivace

Výpočty založené na Gaussově eliminaci mohou být pro matice větších rozměrů poměrně komplikované a početně náročné (zejména při ručním výpočtu). Proto je velmi užitečné mít k dispozici vhodné numerické nástroje pro „automatizaci“ výpočtu. Efektivitu těchto nástrojů je možné zvýšit vhodným tvarem vstupní matice. Např. když se nám v lineární soustavě $Ax = b$ podaří matici A vyjádřit jako $A = TT^\top$ s dolní/horní trojúhelníkovou maticí T, pak je nalezení požadovaného řešení „celkem snadné“ (bez dalších úprav nejdříve spočteme $Ty = b$ a poté $T^\top x = y$). Tímtéž lze také zrychlit výpočet inverzní matice, neboť

$$A^{-1} = (T^\top)^{-1} T^{-1} = (T^{-1})^\top T^{-1}$$

a výpočet inverze horní/dolní trojúhelníkové matice je „celkem snadný“ (viz později; celkem k tomu bude potřeba $n^3/2$ násobení místo $n^3 + n^2 - 2n + 2$). Výše popsaný rozklad matice A do tvaru $A = TT^\top$ se nazývá Choleského (případně trojúhelníkový). Kdy existuje? A jak jej najít?

Existence a výpočet

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňuje $A = A^\top > 0$. Pak existuje jediná dolní trojúhelníková matice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s kladnými (příp. zápornými) prvky na hlavní diagonále a splňující $A = TT^\top$. Jednotlivé prvky matice T lze spočítat po sloupcích (zleva doprava a od shora dolů) pomocí vztahů

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad t_{21} = \frac{a_{21}}{t_{11}}, \quad t_{31} = \frac{a_{31}}{t_{11}}, \quad \cdots \quad , \quad t_{n1} = \frac{a_{n1}}{t_{11}},$$

$$t_{22} = \sqrt{a_{22} - t_{21}^2}, \quad t_{i2} = \frac{a_{i2} - t_{i1}t_{21}}{t_{22}} \quad \text{pro} \quad i = 3, 4, \dots, n,$$

$$t_{33} = \sqrt{a_{33} - t_{31}^2 - t_{32}^2}, \quad t_{i3} = \frac{a_{i3} - t_{i1}t_{31} - t_{i2}t_{32}}{t_{33}}, \quad i = 4, 5, \dots, n,$$

$$\vdots$$

$$t_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j, \\ \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik}^2}, & i = j, \\ \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} t_{ik}t_{jk}\right)/t_{jj}, & i > j. \end{cases}$$

A co $A = A^\top \geqslant 0$?

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Nyní se na matice budeme dívat s trochu „hrubším“ pohledem.

Bloková matice

Nechť A je matice velikosti $m \times n$. Pak <u>blokovým</u> rozdělením matice A rozumíme její zápis s pomocí matic menších rozměrů (bloků), tj.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

kde $A_{11} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$ a $A_{22} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$, přičemž $m_1 + m_2 = m$ a $n_1 + n_2 = n$.

Je-li $A_{12} = 0$, pak máme <u>blokovou dolní trojúhelníkovou</u> matici. Podobně pro $A_{21} = 0$ hovoříme o <u>blokové horní trojúhelníkové</u> matici.

Je-li $A_{12} = 0$ a $A_{21} = 0$, pak máme <u>blokově diagonální matici</u>

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right) = \operatorname{diag}\{A_{11}, A_{22}\}$$

Základní operace

Mají-li matice $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ stejnou blokovou strukturu, pak platí

$$A + B = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ \hline A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{array}\right)$$

Podobně pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a matici $C \in \mathbb{R}^{n \times q}$ s bloky $C_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times q_1}$, $C_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times q_2}$, $C_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times q_1}$ a $C_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times q_2}$ platí

$$\begin{aligned} AC &= \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A_{11}C_{11} + A_{12}C_{21} & A_{11}C_{12} + A_{12}C_{22} \\ \hline A_{21}C_{11} + A_{22}C_{21} & A_{21}C_{12} + A_{22}C_{22} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{m \times q} \end{aligned}$$

s bloky o velikostech $m_1 \times q_1$, $m_1 \times q_2$, $m_2 \times q_1$ a $m_2 \times q_2$.

Kdyby následující vzorce nestačily/nudily:

D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas*, druhé vydání, Princeton University Press, Princeton, 2009. ISBN 978-0-691-14039-1.

Determinant

Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má takovou blokovou strukturu, že bloky A_{21} a A_{12} jsou čtvercové matice (ne nutně stejné velikosti). Potom

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det A_{12} \det A_{21}.$$

Determinant (pokr. i)

Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má takovou blokovou strukturu, že bloky A_{11} a A_{22} jsou čtvercové matice (ne nutně stejné velikosti):

(i) Je-li $A_{12} = 0$ a/nebo $A_{21} = 0$, pak

$$\det A = \det A_{11} \det A_{22}.$$

(ii) Je-li $\det A_{11} \neq 0$, pak

$$\det A = \det A_{11} \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}).$$

Podobně pro $\det A_{22} \neq 0$ dostaneme

$$\det A = \det A_{22} \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}).$$

Obzvláště pro $A_{11} = I_{m_1}$ a $A_{22} = I_{m_2}$ platí

$$\det A = \det(I_{m_2} - A_{21}A_{12}) = \det(I_{m_1} - A_{12}A_{21})$$

Determinant (pokr. ii)

Pro čtvercovou matici s bloky vhodné velikosti platí

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}A_{11} & A_{22} \end{pmatrix} = \det A_{11} \det(A_{22} - A_{21}A_{12}),$$

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}A_{22} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{22}A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det A_{22} \det(A_{11} - A_{12}A_{21}).$$

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ s bloky o velikosti $n \times n$ platí

$$\det A = \begin{cases} \det(A_{22}A_{11} - A_{21}A_{12}), & \text{pokud } A_{11}A_{12} = A_{12}A_{11} \\ \det(A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}), & \text{pokud } A_{11}A_{21} = A_{21}A_{11} \\ \det(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}), & \text{pokud } A_{22}A_{21} = A_{21}A_{22} \\ \det(A_{22}A_{11} - A_{12}A_{21}), & \text{pokud } A_{22}A_{12} = A_{12}A_{22} \\ \det(A_{11}A_{22}^\top - A_{12}^\top A_{21}^\top), & \text{pokud } A_{11}A_{12} = A_{12}A_{11}^\top \\ \det(A_{11}A_{22}^\top - A_{12}A_{21}), & \text{pokud } A_{22}A_{21} = A_{21}A_{22}^\top \\ \det(A_{11}^\top A_{22} - A_{21}A_{12}), & \text{pokud } A_{11}^\top A_{21} = A_{21}A_{11} \\ \det(A_{11}^\top A_{22} - A_{21}^\top A_{12}^\top), & \text{pokud } A_{22}^\top A_{12} = A_{12}A_{22} \\ \det(A_{11}A_{22}^\top - A_{12}A_{21}^\top), & \text{pokud } A_{11}A_{12}^\top = A_{12}A_{11}^\top \\ \det(A_{11}A_{22}^\top - A_{12}A_{21}^\top), & \text{pokud } A_{22}A_{21}^\top = A_{21}A_{22}^\top \\ \det(A_{11}^\top A_{22} - A_{21}^\top A_{12}), & \text{pokud } A_{11}^\top A_{21} = A_{21}^\top A_{11} \\ \det(A_{11}^\top A_{22} - A_{21}^\top A_{12}), & \text{pokud } A_{22}^\top A_{12} = A_{12}^\top A_{22}. \end{cases}$$

Inverzní matice

Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má takovou blokovou strukturu, že bloky A_{11} a A_{22} jsou čtvercové matice (ne nutně stejné velikosti).

(i) Jestliže $\det A_{11} \neq 0$, $\det A_{22} \neq 0$ a $A_{21} = 0$, pak

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Podobně v případě $\det A_{11} \neq 0$, $\det A_{22} \neq 0$ a $A_{12} = 0$ máme

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

(ii) Jestliže $\det A_{11} \neq 0$ a $\det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \neq 0$, pak platí

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} B_{11} &:= A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}, \\ B_{12} &:= -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}, \\ B_{21} &:= -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}, \\ B_{22} &:= (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}. \end{aligned}$$

Inverzní matice (pokr. i)

(iii) Jestliže $\det A_{22} \neq 0$ a $\det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \neq 0$, pak platí

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} B_{11} &:= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}, \\ B_{12} &:= -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}, \\ B_{21} &:= -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}, \\ B_{22} &:= A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}. \end{aligned}$$

Inverzní matice (pokr. ii)

(iv) Jestliže $\det A_{11} \neq 0$, $\det A_{22} \neq 0$ a $\det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \neq 0$, pak platí

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} B_{11} &:= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}, \\ B_{12} &:= -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}, \\ B_{21} &:= -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}, \\ B_{22} &:= (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}. \end{aligned}$$

(v) Jestliže $\det A_{11} = 0 = \det A_{22}$?! …

Inverzní matice (další vzorce)

Je-li $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ s $n \times n$ bloky splňujícími $A_{11} = I = A_{22}$ a $\det(I - A_{21}A_{12}) \neq 0$, potom platí

$$\begin{aligned} A^{-1} = \begin{pmatrix} I & A_{12} \\ A_{21} & I \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} I + A_{12}(I - A_{21}A_{12})^{-1}A_{21} & -A_{12}(I - A_{21}A_{12})^{-1} \\ -(I - A_{21}A_{12})^{-1}A_{21} & (I - A_{21}A_{12})^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (I - A_{12}A_{21})^{-1} & -(I - A_{12}A_{21})^{-1}A_{12} \\ -A_{21}(I - A_{12}A_{21})^{-1} & I + A_{21}(I - A_{12}A_{21})^{-1}A_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Konec.