MPE_VPAM: Vybrané partie aplikované matematiky

Petr Zemánek (Masarykova Univerzita, Brno)

Kapitola 3: Maticový počet

(verze: 23. září 2020)

Matice

Matice typu $m \times n$ je pravoúhlé (nebo obdélníkové) schéma, které má m řádků a n sloupců

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}.$$

Vektor

Vektor (veličina, která má směr i velikost) je uspořádaná n-tice prvků (nebo matice typu $n \times 1$)

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Typy matic

- čtvercová matice
- nulová matice
- horní/dolní trojúhelníková
- jednotková matice
- diagonální

Součet matic

$A = \big(a_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$, $B = \big(b_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$. Pak součet $A+B$ je matice C taková, že

$$C = \big(c_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} = \big(a_{ij}+b_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \quad \text{(tj. po složkách).}$$

Násobení skalárem

$A = \big(a_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak αA je matice B taková, že

$$B = \big(b_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} = \big(\alpha a_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \quad \text{(tj. po složkách).}$$

Součin matic

$A = \big(a_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$, $B = \big(b_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,p}}$. Pak součin AB je matice C taková, že

$$C = \big(c_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,p}} = \big(a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,p}} =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,p}}$$

Pravidla pro počítání s maticemi

Pro matice A, B, C vhodných rozměrů a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C),$$
$$(A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC,$$
$$(AB)C = A(BC), \quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,$$
$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,$$
$$A(\alpha B) = \alpha(AB) = (\alpha A)B$$

Obecně neplatí!

$$AB = BA \quad \text{(ani když oba součiny existují)!}$$

Transponovaná matice

Je-li $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$, pak transponovaná matice k A je matice

$$A^\top = B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}},$$

kde $b_{ij} := a_{ji}$ pro $i = 1, \dots n$, $j = 1, \dots, m$.

Pokud $A^\top = A$, nazývá se matice symetrická.

Platí:

$$(AB)^\top = B^\top A^\top$$

Příklad

Sečtěte matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 6 & 5 & 1 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \cdots$$

Příklad

Pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vypočtěte AB a BA.

Příklad

Pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vypočtěte AB, BA a $B^\top A^\top$.

Skalární součin

Pro vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ definujeme (standardní) skalární součin jako

$$u \cdot v = \langle u, v \rangle \coloneqq \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u^\top v.$$

Vlastnosti skalárního součinu

$$\langle u, u \rangle \geqslant 0 \text{ pro každé } u \in \mathbb{R}^n, \quad \langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0,$$
$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \quad \langle u + v, z \rangle = \langle u, z \rangle + \langle v, z \rangle,$$
$$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle = \langle u, \alpha v \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$
$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^\top v \rangle \text{ pro } A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Norma vektoru

Norma vektoru $u \in \mathbb{R}^n$ je definována jako

$$\|u\| \coloneqq \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

Vlastnosti normy

$$\|u\| \geqslant 0, \quad \|u\| = 0 \iff u = 0,$$
$$\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$
$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|,$$
$$\big| \|u\| - \|v\| \big| \leqslant \|u - v\|.$$

Odchylka vektorů

Dva vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ svírají úhel $\theta \in [0, \pi]$, pro který platí

$$\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\| \cos\theta.$$

Z vlastností funkce kosinus pak plyne

- $\theta \in [0, \pi/2)$, je-li $\langle u, v\rangle > 0$ (tj. ostrý úhel),
- $\theta \in (\pi/2, \pi]$, je-li $\langle u, v\rangle < 0$ (tj. tupý úhel),
- $\theta = \pi/2$, je-li $\langle u, v\rangle = 0$ (tj. pravý úhel).

Ortogonální vektory

$$\langle u, v\rangle = 0$$

Ortonormální systém vektorů

$\{u_1, \dots, u_m\}$, $u_i \in \mathbb{R}^n$

$$\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Příklad

Uvažte krychli s délkou hrany a. Určete odchylku tělesové uhlopříčky od jedné z hran (vycházející z téhož vrcholu).

Příklad

Uvažte ekonomiku s n komoditami, kde x_i značí množství i-té komodity. Připusťte, že libovolná komodita může být dodána v libovolném množství, tj. x_i může být libovolné nezáporné číslo.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Řekneme, že vektory $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ jsou <u>lineárně nezávislé</u>, jestliže z rovnosti

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m = 0$$

plyne $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. V opačném případě, tj. když existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, tak, že

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m = 0,$$

říkáme, že vektory $u_1, \dots, u_m$ jsou <u>lineárně závislé</u>.

Příklad

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{vs.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sloupce (řádky) matice můžeme chápat jako vektory a lineární nezávislost řádků matice pak znamená lineární nezávislost vektorů. Pomocí tohoto pojmu definujeme hodnost matice.

Hodnost matice

<u>Hodnost matice</u> A je číslo, které je rovno maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků. Označujeme ji $h(A)$.

Je-li A čtvercová matice typu $n \times n$, jejíž hodnost je rovna n, nazýváme ji <u>regulární</u> maticí. Je-li $h(A) < n$, nazývá se taková matice <u>singulární</u>.

Jak určíme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice?

Je zřejmé, že v nulové matici neexistuje žádný lineárně nezávislý řádek. Hodnost nulové matice je tedy rovna nule. V dalším proto uvažujme pouze nenulové matice, tj. předpokládejme, že je aspoň jeden prvek této matice nenulový.

U matice 2×2 snadno poznáme, že jsou její řádky lineárně závislé. Nenulová matice A typu 2×2 má hodnost jedna, pokud je druhý řádek násobkem prvního řádku, tj. matice je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{pmatrix},$$

kde k je nějaké reálné číslo. V opačném případě má A hodnost 2.

Hodnost vs. úprava matice

Schodovitý tvaru

Převod na schodovitý tvar

A jak tedy na hodnost větších matic?

Hodnost matice se nezmění, jestliže:

- zaměníme pořadí řádků,
- vynásobíme libovolný řádek nenulovým číslem,
- přičteme k danému řádku (nebo odečteme od daného řádku) libovolný násobek jiného řádku.

Řekneme, že A je <u>matice ve schodovitém tvaru</u>, jestliže v matici A každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než předchozí řádek.

Každou matici lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést do schodovitého tvaru.

Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Systém lineárních rovnic

Systémem k lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumíme soustavu rovnic

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad &= \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Je-li $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$, nazývá se takovýto systém homogenní.

Řešením systému (1) je každá uspořádaná n-tice $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ takových čísel t_1, $t_2, \ldots$, t_n, která dané soustavě vyhovuje.

Jaká mohou být řešení?

Obecně (tj. nezávisle na počtu lineárních rovnic a počtu neznámých) jsou možné tři případy:

- Systém rovnic má právě jedno řešení.
- Systém rovnic má nekonečně mnoho řešení.
- Systém rovnic nemá žádné řešení.

Jak ale poznáme, který z těchto případů nastane?

Studujme matice!

Maticí systému (1) nazýváme matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Rozšířenou maticí systému (1) nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}.$$

Frobeniova věta

Systém lineárních rovnic má řešení (tj. alespoň jedno) právě tehdy, když je hodnost matice systému rovna hodnosti rozšířené matice systému.

Důsledek

Systém k lineárních rovnic o n neznámých má jediné řešení, jestliže je hodnost h matice systému rovna hodnosti rozšířené matice systému a navíc je rovna počtu neznámých n, tedy $h = n$.

Důsledek

Systém k lineárních rovnic o n neznámých má nekonečně mnoho řešení, jestliže se hodnost h matice systému rovná hodnosti rozšířené matice a navíc je tato hodnost menší než počet neznámých, tj. $h < n$. V tomto případě lze $n - h$ neznámých volit libovolně.

Gaussova eliminační metoda

Řešení systému se nezmění, jestliže:

- zaměníme pořadí rovnic,
- vynásobíme libovolnou rovnici nenulovým číslem,
- přičteme k dané rovnici libovolný násobek jiné rovnice.

Těmito úpravami převedeme matici systému na schodovitý tvar a z něj již dokážeme snadno vypočítat řešení.

Příklad

Vyřešte soustavy rovnic

(a)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1,\\ -x + 3y + 2z &= 0,\\ 2x - y + 5z &= 5. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -2,\\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2,\\ x_2 + x_4 &= 1,\\ x_1 - x_3 &= 1. \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2,\\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0,\\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 4,\\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= -3. \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 2,\\ 2x + 2y + 3z &= 3,\\ 5x + 5y + 4z &= 1. \end{aligned}$$

Příklad

Zpět k lineární (ne-)závislosti

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}.$$

Determinant matice

Determinant čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu 1×1 je číslo $\det A$ (též $|A|$) dané vztahem

$$\det A = \det a_{11} = a_{11}.$$

Determinant čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu $n \times n$, $n \geqslant 2$, je číslo $\det A$ (též $|A|$) dané vztahem

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n} = \\ = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j},$$

kde A_{1j} značí matici, která vznikla z matice A odebráním prvního řádku a j-tého sloupce.

Vlastnosti determinantu

Nechť A, B jsou čtvercová matice řádu n.

- Platí $\det A = \det A^{\top}$.
- Platí $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (nikoli pro součet!).
- Hodnost matice $h(A) = n$ právě tehdy, když $\det A \neq 0$.

Jak ale determinant vypočítat?

Determinanty malých matic

Speciálně pro determinant $\det A$ čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu 2×2 dostáváme tzv. <u>křížové pravidlo</u>:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Pro determinant $\det A$ čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu 3×3 můžeme použít tzv. <u>Sarrusovo pravidlo</u>:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Příklad

Vypočtěte determinant pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Speciální případ

Je-li matice A v horním/dolním trojúhelníkovém tvaru (obzvláště diagonální), pak $\det A$ je roven součinu prvků na diagonále.

Determinanty větších matic

- Zaměníme-li pořadí dvou řádků (sloupců) matice, determinant výsledné matice bude mít opačné znaménko než determinant matice původní.
- Vynásobíme-li libovolný řádek (sloupec) matice číslem k, determinant výsledné matice bude k-násobkem determinantu matice původní.
- Přičtením k-násobek libovolného řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci), determinant matice se nezmění.

Příklad

Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laplaceův rozvoj

Pro výpočet determinantů vyšších řádů můžeme využít i následujícího vztahu:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{l+k} a_{lk} \det A_{lk}, \qquad l \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n,$$

ve kterém A_{lk} je matice, která vznikne z matice A vypuštěním l-tého řádku a k-tého sloupce. Tento vztah vlastně říká, že matici je možné tzv. rozvinout podle libovolného řádku. Výpočet determinantu matice řádu n tak převedeme na výpočet n determinantů řádu $n-1$. Podobně můžeme matici rozvinout i podle libovolného sloupce. Při praktickém výpočtu volíme k rozvoji řádek (sloupec), který obsahuje co nejvíce nul, jelikož pak nemusíme některé příslušné menší determinanty vůbec počítat.

Číslo $\det A_{lk}$ je tzv. (l, k)-tý minor matice A.

Číslo $(-1)^{l+k} \det A_{lk}$ je tzv. (l, k)-tý kofaktor matice A.

Příklad

Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Využití determinantu při řešení soustavy rovnic.

Cramerovo pravidlo

Nechť $b \in \mathbb{R}^n$ a A je matice řádu n, tj $n \times n$. Je-li $\det A \neq 0$, pak pro jediné řešení $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ soustavy $Ax = b$ platí

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n,$$

kde A_i značí matici A, ve které byl nahrazen i-tý sloupec vektorem b.

Příklad

Vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1, \\ -x + 3y + 2z &= 0, \\ 2x - y + 5z &= 5. \end{aligned}$$

Příklad

Analýza jednoduchého IS-LM modelu

$$\begin{aligned} sY + ar &= I^0 + G, \\ mY - hr &= M_s - M^0. \end{aligned}$$

Determinant (užitečné vzorce)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Pak

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

Odtud se dá pro matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times \ell}$ a $D \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ splňující $\det A \neq 0$ ukázat, že

$$\det(A + BCD) = \det A \, \det(I_n + A^{-1}BCD) = \det A \, \det(I_m + CDA^{-1}B).$$

Ekonometrie: Proto v případě $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B = x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C = \alpha \in \mathbb{R}$ a $D = y^\top \in \mathbb{R}^{1\times n}$ s $\det A \neq 0$ platí

$$\det(A + \alpha\, x y^\top) = (1 + \alpha\, y^\top A^{-1} x) \det A.$$

Inverzní matice

Matice B je <u>inverzní</u> k A, jestliže platí $AB = I = BA$.

- Pokud taková matice existuje, označuje se A^{-1}.
- Inverzní matice existuje pouze pro čtvercové matice (a je jediná).
- Inverzní matice existuje právě tehdy, když $h(A) = n$, což je ekvivalentní s $\det A \neq 0$.

  Platí

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (A^{-1})^{\top} = (A^{\top})^{-1}, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Jak ale inverzní matici spočítat?

$$(A|I) \rightsquigarrow (I|A^{-1}).$$

Adjungovaná matice

Nechť A je $n \times n$ regulární matice. Adjungovaná matice A^{adj} k matici A je transpozice matice složené z kofaktorů matice A, tj.

$$A^{\mathsf{adj}} = \left((-1)^{i+j} \det A_{ij}\right)^{\top}_{i,j=1,\dots,n}.$$

Potom platí

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, A^{\mathsf{adj}}.$$

Příklad

Odvoďte vzorec pro inverzní matici k 2×2 matici.

Příklad

Vypočtěte A^{-1} pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice (užitečné vzorce)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ jsou takové, že $\det(I + AB) \neq 0$, potom

$$(I_m + AB)^{-1} = I_m - A(I_n + BA)^{-1}B.$$

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times \ell}$ a $D \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$. Je-li $\det A \neq 0$ a $\det(A + BCD) \neq 0$, potom platí

$$\begin{aligned}
(A + BCD)^{-1} &= A^{-1} - (I_n + A^{-1}BCD)^{-1}A^{-1}BCDA^{-1} = \\
&= A^{-1} - A^{-1}(I_n + BCDA^{-1})^{-1}BCDA^{-1} = \\
&= A^{-1} - A^{-1}B(I_m + CDA^{-1}B)^{-1}CDA^{-1} = \qquad (*) \\
&= A^{-1} - A^{-1}BC(I_\ell + DA^{-1}BC)^{-1}DA^{-1} = \\
&= A^{-1} - A^{-1}BCD(I_n + A^{-1}BCD)^{-1}A^{-1} = \\
&= A^{-1} - A^{-1}BCDA^{-1}(I_n + BCDA^{-1})^{-1}.
\end{aligned}$$

Ekonometrie: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B = x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C = \alpha \in \mathbb{R}$ a $D = y^\top \in \mathbb{R}^{1\times n}$ splňující $\det A \neq 0$ a $\det(A + \alpha\, xy^\top) \neq 0$, pak z $(*)$ plyne

$$(A + \alpha\, xy^\top)^{-1} = A^{-1} - \beta A^{-1}xy^\top A^{-1}, \quad \text{kde} \quad \beta := \frac{\alpha}{1 + \alpha\, y^\top A^{-1}x}.$$

Vlastní číslo

Nechť A je čtvercová matice, λ je komplexní číslo a x je nenulový vektor, který je řešením rovnice

$$Ax = \lambda x. \tag{2}$$

Pak se komplexní číslo λ nazývá vlastní číslo matice A a vektor x se nazývá vlastní vektor matice A (příslušný vlastnímu číslu λ).

Geometricky: Vlastní vektor je takový vektor, který se po vynásobení matice pouze „natáhne“ nebo „zkrátí“, ale nemění svůj směr.

Jak vlastní čísla najít?

Z předchozí definice se dá i snadno vyvodit, jak vlastní čísla matice A nalézt. Přepsáním rovnice (2) dostaneme

$$Ax - \lambda x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (A - \lambda I)x = 0.$$

Máme tak vlastně homogenní systém lineárních rovnic, u kterého požadujeme, aby měl jiné než triviální řešení. To znamená, že matice $A - \lambda I$ musí mít hodnost menší než n. Jinými slovy tato matice není regulární a pro její determinant musí platit

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{3}$$

Rovnice (3) se nazývá charakteristická rovnice matice A.

Příklad

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Některé vlastnosti vlastních čísel

Nechť $\lambda_1, \dots \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A, potom platí:

- $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$,
- matice A^{-1} má vlastní čísla $\frac{1}{\lambda_1}, \dots \frac{1}{\lambda_n}$,
- $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, kde $\operatorname{tr} A$ je stopa matice,
- je-li A symetrická matice, je její hodnost rovna počtu nenulových vlastních čísel, všechna vlastní čísla jsou reálná a příslušné vlastní vektory jsou ortogonální.

Negativně definitní a semidefinitní matice

Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se nazývá negativně semidefinitní, pokud

$$v^\top A v \leqslant 0 \quad \text{pro každé } v \in \mathbb{R}^n.$$

V takovém případě píšeme $A \leqslant 0$. Jestliže dokonce platí $v^\top A v < 0$ pro všechny vektory $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, nazývá se matice A negativně definitní, což zapisujeme jako $A < 0$.

Jestliže je matice A navíc symetrická, pak pro $v = (v_1, \dots, v_n)^\top$ se výraz $v^\top A v$ nazývá kvadratická forma proměnných $v_1, \dots, v_n$.

Věta 3.32(i)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potom platí (analogicky pro $A > 0$)

(i) $A < 0 \Leftrightarrow A + A^\top < 0$ ($v^\top A v = \frac{1}{2} v^\top (A + A^\top) v$).

(ii) $A < 0 \Rightarrow \det A \neq 0$.

(iii) $A < 0$ právě tehdy, když $A^{-1} < 0$.

(iv) $A < 0 \Leftrightarrow -A > 0$ a $A \leqslant 0 \Leftrightarrow -A \geqslant 0$

Definitnost matice

Příklad

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} > 0, \qquad -I = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} < 0,$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} < 0, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0,$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \leqslant 0, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Definitnost vs. vlastní čísla

Je-li A symetrická matice s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak matice A je

(a) pozitivně definitní $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$,

(b) negativně definitní $\Leftrightarrow \lambda_i < 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$,

(c) pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \lambda_i \geqslant 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$,

(d) negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \lambda_i \leqslant 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} < 0, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Definitnost matice

Vedoucí hlavní submatice a minory

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\cdot} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Jak vzniknou?

Vedoucí hlavní submatice a minory

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Jak vzniknou?

Vedoucí hlavní submatice a minory

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Jak vzniknou?

Věta 3.36(i)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matice. Potom

(i) $A < 0$ právě tehdy, když VHM střídají znaménko počínaje záporným;

(ii) $A \leqslant 0$ právě tehdy, když HM lichých řádů jsou nekladné a HM sudých řádů jsou nezáporné;

(iii) $A > 0$ právě tehdy, když VHM jsou kladné;

(iv) $A \geqslant 0$ právě tehdy, když HM jsou nezáporné.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} > 0,$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} < 0, \qquad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Definitnost matice na podprostoru

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, přičemž $m < n$ a navíc $h(B) = m$ (tj. matice B má plnou hodnost). Potom řekneme, že matice A je negativně definitní na podprostoru $\operatorname{Ker} B$ (a píšeme $A < 0$ na $\operatorname{Ker} B$), jestliže

$$v^\top A v < 0 \quad \text{pro každé } v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \text{ takové, že } Bv = 0.$$

Negativní semidefinitnost na $\operatorname{Ker} B$ definujeme jako

$$v^\top A v \leqslant 0 \quad \text{pro každé } v \in \mathbb{R}^n \text{ takové, že } Bv = 0.$$

Analogicky definujeme pozitivní (semi-)definitnost.

Poznámka

- Stejně jako v případě „obyčejné" (semi-)definitnosti se obvykle uvažuje symetrická matice A.
- „Obyčejná" (semi-)definitnost vs. definitnost na $\operatorname{Ker} B$.
- V případě $n = m$ nemá koncept (semi-)definitnosti na $\operatorname{Ker} B$ smysl, neboť v takovém případě je $\operatorname{Ker} B = \{0\}$, a tedy libovolná matice je negativně i pozitivně semidefinitní na $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ a současně neexistuje pozitivně ani negativně definitní matice na $\operatorname{Ker} B = \{0\}$.

Příklad

Uveďte nutné a postačující podmínky pro negativní (semi-)definitnost na $\operatorname{Ker} B$ v případě $n = 2$ a $m = 1$.

Věta 3.38(i)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická a $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, přičemž $m < n$ a navíc $h(B) = m$ (tj. matice B má plnou hodnost). Potom $A < 0$ na $\operatorname{Ker} B$, jestliže rozšířená matice

$$H := \begin{array}{c c} \begin{matrix} \overbrace{}^{m} & \overbrace{}^{n} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & A \end{pmatrix} & \begin{matrix} \}\, m \\ \}\, n \end{matrix} \end{array}$$

má následující vlastnost: posledních $n - m$ VHM počínaje $\det H$ střídá znaménko, přičemž $\operatorname{sgn}(\det H) = (-1)^n$.

$A > 0$ na Ker B

Pro $A > 0$ na $\operatorname{Ker} B$ testujeme posledních $n - m$ VHM počínaje $\det H$, které všechny musí mít znaménko $(-1)^m$.

Poznámka

- Požadavek plné hodnosti matice B je ekvivalentní s podmínkou, že žádnou z rovnic v soustavě $Bv = 0$ nelze vynechat.
- Ekvivalence?
- Semidefinitnost?
- Vlastní čísla?

Příklad

Rozhodněte o definitnosti matice A na $\operatorname{Ker} B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$m = 1$ V případě jediného omezení udávajícího $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} b$, tj. $\operatorname{Ker} b$ je dáno jako $\{v \in \mathbb{R}^n \mid b\, z = 0\}$ pro daný vektor $b \in \mathbb{R}^n$, máme rozšířenou matici ve speciálním tvaru

$$H = \begin{pmatrix} 0_{1\times 1} & \overline{} \\ | & A \end{pmatrix}.$$

Pak pro zjištění definitnosti symetrické matice A na $\operatorname{Ker} b$ pomocí Věty 3.38(i) je potřeba otestovat $n-1$ posledních VHM matice H, přičemž platí:

- jestliže tyto VHM střídají znaménko a $\operatorname{sgn}(\det H) = (-1)^n$, pak $A < 0$ na $\operatorname{Ker} b$,
- jestliže tyto VHM mají stejné znaménko jako $(-1)^m = (-1)^1 = -1$ (tj. jsou-li záporné), pak $A > 0$ na $\operatorname{Ker} b$.

V případě vektoru $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ splňujícího $b_1 \neq 0$, se uvedené postačující podmínky stanou současně nutnými (tj. máme ekvivalentní charakterizaci).

Vlastní čísla

Pro semidefinitnost symetrické matice A na $\operatorname{Ker} b$ máme ekvivalentní charakterizaci také pomocí vlastních čísel:

- $A \leqslant 0$ na $\operatorname{Ker} b$ právě tehdy, když matice H má právě jedno kladné vlastní číslo,
- $A \geqslant 0$ na $\operatorname{Ker} b$ právě tehdy, když matice H má právě jedno záporné vlastní číslo.

Příklad

Uvažte matici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Motivace

Výpočty založené na Gaussově eliminaci mohou být pro matice větších rozměrů poměrně komplikované a početně náročné (zejména při ručním výpočtu). Proto je velmi užitečné mít k dispozici vhodné numerické nástroje pro „automatizaci" výpočtu. Efektivitu těchto nástrojů je možné zvýšit vhodným tvarem vstupní matice. Např. když se nám v lineární soustavě $Ax = b$ podaří matici A vyjádřit jako $A = TT^\top$ s dolní/horní trojúhelníkovou maticí T, pak je nalezení požadovaného řešení „celkem snadné" (bez dalších úprav nejdříve spočteme $Ty = b$ a poté $T^\top x = y$). Tímtéž lze také zrychlit výpočet inverzní matice, neboť

$$A^{-1} = (T^\top)^{-1} T^{-1} = (T^{-1})^\top T^{-1}$$

a výpočet inverze horní/dolní trojúhelníkové matice je „celkem snadný" (viz později; celkem k tomu bude potřeba $n^3/2$ násobení místo $n^3 + n^2 - 2n + 2$). Výše popsaný rozklad matice A do tvaru $A = TT^\top$ se nazývá <u>Choleského</u> (případně <u>trojúhelníkový</u>). Kdy existuje? A jak jej najít?

Existence a výpočet

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňuje $A = A^\top > 0$. Pak existuje jediná dolní trojúhelníková matice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s kladnými (příp. zápornými) prvky na hlavní diagonále a splňující $A = TT^\top$. Jednotlivé prvky matice T lze spočítat po sloupcích (zleva doprava a od shora dolů) pomocí vztahů

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad t_{21} = \frac{a_{21}}{t_{11}}, \quad t_{31} = \frac{a_{31}}{t_{11}}, \quad \cdots \quad , \quad t_{n1} = \frac{a_{n1}}{t_{11}},$$

$$t_{22} = \sqrt{a_{22} - t_{21}^2}, \quad t_{i2} = \frac{a_{i2} - t_{i1}t_{21}}{t_{22}} \quad \text{pro} \quad i = 3, 4, \ldots, n,$$

$$t_{33} = \sqrt{a_{33} - t_{31}^2 - t_{32}^2}, \quad t_{i3} = \frac{a_{i3} - t_{i1}t_{31} - t_{i2}t_{32}}{t_{33}}, \quad i = 4, 5, \ldots, n,$$

$$\vdots$$

$$t_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j, \\ \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik}^2}, & i = j, \\ \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} t_{ik}t_{jk}\right)/t_{jj}, & i > j. \end{cases}$$

A co $A = A^\top \geqslant 0$?

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Nyní se na matice budeme dívat s trochu „hrubším“ pohledem.

Bloková matice

Nechť A je matice velikosti $m \times n$. Pak blokovým rozdělením matice A rozumíme její zápis s pomocí matic menších rozměrů (bloků), tj.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

kde $A_{11} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$ a $A_{22} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$, přičemž $m_1 + m_2 = m$ a $n_1 + n_2 = n$.

Je-li $A_{12} = 0$, pak máme blokovou dolní trojúhelníkovou matici. Podobně pro $A_{21} = 0$ hovoříme o blokové horní trojúhelníkové matici.

Je-li $A_{12} = 0$ a $A_{21} = 0$, pak máme blokově diagonální matici

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right) = \mathrm{diag}\{A_{11}, A_{22}\}$$

Základní operace

Mají-li matice $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ stejnou blokovou strukturu, pak platí

$$A + B = \left(\begin{array}{c:c} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ \hdashline A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{array}\right)$$

Podobně pro $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a matici $C \in \mathbb{R}^{n\times q}$ s bloky $C_{11} \in \mathbb{R}^{n_1\times q_1}$, $C_{12} \in \mathbb{R}^{n_1\times q_2}$, $C_{21} \in \mathbb{R}^{n_2\times q_1}$ a $C_{22} \in \mathbb{R}^{n_2\times q_2}$ platí

$$\begin{aligned} AC &= \left(\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c} C_{11} & C_{12} \\ \hdashline C_{21} & C_{22} \end{array}\right) = \\ &= \left(\begin{array}{c:c} A_{11}C_{11} + A_{12}C_{21} & A_{11}C_{12} + A_{12}C_{22} \\ \hdashline A_{21}C_{11} + A_{22}C_{21} & A_{21}C_{12} + A_{22}C_{22} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{m\times q} \end{aligned}$$

s bloky o velikostech $m_1 \times q_1$, $m_1 \times q_2$, $m_2 \times q_1$ a $m_2 \times q_2$.

Kdyby následující vzorce nestačily/nudily:

D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas*, druhé vydání, Princeton University Press, Princeton, 2009. ISBN 978-0-691-14039-1.

Determinant

Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má takovou blokovou strukturu, že bloky A_{21} a A_{12} jsou čtvercové matice (ne nutně stejné velikosti). Potom

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det A_{12} \det A_{21}.$$

Determinant (pokr. i)

Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má takovou blokovou strukturu, že bloky A_{11} a A_{22} jsou čtvercové matice (ne nutně stejné velikosti):

(i) Je-li $A_{12} = 0$ a/nebo $A_{21} = 0$, pak

$$\det A = \det A_{11} \, \det A_{22}.$$

(ii) Je-li $\det A_{11} \neq 0$, pak

$$\det A = \det A_{11} \, \det(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}).$$

Podobně pro $\det A_{22} \neq 0$ dostaneme

$$\det A = \det A_{22} \, \det(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}).$$

Obzvláště pro $A_{11} = I_{m_1}$ a $A_{22} = I_{m_2}$ platí

$$\det A = \det(I_{m_2} - A_{21} A_{12}) = \det(I_{m_1} - A_{12} A_{21})$$

Determinant (pokr. ii)

Pro čtvercovou matici s bloky vhodné velikosti platí

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}A_{11} & A_{22} \end{pmatrix} = \det A_{11} \det(A_{22} - A_{21}A_{12}),$$

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}A_{22} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{22}A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det A_{22} \det(A_{11} - A_{12}A_{21}).$$

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ s bloky o velikosti $n \times n$ platí

$$\det A = \begin{cases} \det(A_{22}A_{11} - A_{21}A_{12}), & \text{pokud } A_{11}A_{12} = A_{12}A_{11} \\ \det(A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}), & \text{pokud } A_{11}A_{21} = A_{21}A_{11} \\ \det(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}), & \text{pokud } A_{22}A_{21} = A_{21}A_{22} \\ \det(A_{22}A_{11} - A_{12}A_{21}), & \text{pokud } A_{22}A_{12} = A_{12}A_{22} \\ \det(A_{11}A_{22}^\top - A_{12}^\top A_{21}^\top), & \text{pokud } A_{11}A_{12} = A_{12}A_{11}^\top \\ \det(A_{11}A_{22}^\top - A_{12}A_{21}), & \text{pokud } A_{22}A_{21} = A_{21}A_{22}^\top \\ \det(A_{11}^\top A_{22} - A_{21}A_{12}), & \text{pokud } A_{11}^\top A_{21} = A_{21}A_{11} \\ \det(A_{11}^\top A_{22} - A_{21}^\top A_{12}^\top), & \text{pokud } A_{22}^\top A_{12} = A_{12}A_{22} \\ \det(A_{11}A_{22}^\top - A_{12}A_{21}^\top), & \text{pokud } A_{11}A_{12}^\top = A_{12}A_{11}^\top \\ \det(A_{11}A_{22}^\top - A_{12}A_{21}^\top), & \text{pokud } A_{22}A_{21}^\top = A_{21}A_{22}^\top \\ \det(A_{11}^\top A_{22} - A_{21}^\top A_{12}), & \text{pokud } A_{11}^\top A_{21} = A_{21}^\top A_{11} \\ \det(A_{11}^\top A_{22} - A_{21}^\top A_{12}), & \text{pokud } A_{22}^\top A_{12} = A_{12}^\top A_{22}. \end{cases}$$

Inverzní matice

Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má takovou blokovou strukturu, že bloky A_{11} a A_{22} jsou čtvercové matice (ne nutně stejné velikosti).

(i) Jestliže $\det A_{11} \neq 0$, $\det A_{22} \neq 0$ a $A_{21} = 0$, pak

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Podobně v případě $\det A_{11} \neq 0$, $\det A_{22} \neq 0$ a $A_{12} = 0$ máme

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

(ii) Jestliže $\det A_{11} \neq 0$ a $\det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \neq 0$, pak platí

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} B_{11} &:= A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}, \\ B_{12} &:= -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}, \\ B_{21} &:= -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}, \\ B_{22} &:= (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}. \end{aligned}$$

Inverzní matice (pokr. i)

(iii) Jestliže $\det A_{22} \neq 0$ a $\det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \neq 0$, pak platí

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned}
B_{11} &:= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}, \\
B_{12} &:= -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}, \\
B_{21} &:= -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}, \\
B_{22} &:= A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}.
\end{aligned}$$

Inverzní matice (pokr. ii)

(iv) Jestliže $\det A_{11} \neq 0$, $\det A_{22} \neq 0$ a $\det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \neq 0$, pak platí

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} B_{11} &:= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}, \\ B_{12} &:= -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}, \\ B_{21} &:= -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}, \\ B_{22} &:= (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}. \end{aligned}$$

(v) Jestliže $\det A_{11} = 0 = \det A_{22}$?! …

Inverzní matice (další vzorce)

Je-li $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ s $n \times n$ bloky splňujícími $A_{11} = I = A_{22}$ a $\det(I - A_{21}A_{12}) \neq 0$, potom platí

$$\begin{aligned} A^{-1} = \begin{pmatrix} I & A_{12} \\ A_{21} & I \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} I + A_{12}(I - A_{21}A_{12})^{-1}A_{21} & -A_{12}(I - A_{21}A_{12})^{-1} \\ -(I - A_{21}A_{12})^{-1}A_{21} & (I - A_{21}A_{12})^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (I - A_{12}A_{21})^{-1} & -(I - A_{12}A_{21})^{-1}A_{12} \\ -A_{21}(I - A_{12}A_{21})^{-1} & I + A_{21}(I - A_{12}A_{21})^{-1}A_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Konec.